第 54 卷 第 11 期 2005 年 11 月
1000-3290/2005/54(11)/5018-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.11,November,2005

用量子隧穿法研究带质量四极矩静态黑洞的 Hawking 辐射*

韩亦文

(达县师范高等专科学校物理系,达州 635000)

(2005 年 4 月 20 日收到;2005 年 5 月 19 日收到修改稿)

对带质量四极矩的静态黑洞 Hawking 辐射的隧穿过程进行了简单直接的推导,得到了热谱.因推导过程应用了能量守恒定律,故真正的辐射不一定是纯热的.这一结果支持了这样一种观点:隧穿的辐射携带信息是可能的.

关键词:黑洞,辐射,隧穿,能量守恒

PACC:0420,9760L

1. 引　　言

Hawking 关于黑洞存在温度和 $T = \kappa/2\pi$ 的量子辐射[1,2]这个令人震惊的发现,引导人们在黑洞热力学的研究上做了大量卓有成效的工作.由此产生了如温度格林函数法、路径积分法、Damour-Ruffini 法以及 Unruch 的二次量子化等方法[3—6]研究黑洞的热辐射.一系列的研究结果显示[7—10],从宏观上看黑洞辐射伴随着信息的损失,即黑洞有精确的热谱,无毛定理成立.不过,热谱的获得完全取决于一个唯一的因素即温度.然而,当热量被控制时,外幅射就不会有任何信息,即 Hawking 结果的幺正性丧失.同时,无毛理论认为一个稳定黑洞外面的几何完全被如质量、电荷、角动量等少数参量具体化,因此,时空几何也没有携带其他信息.尽管弦理论也支持 Hawking 辐射可以在一个幺正理论中被描述[11],但有关辐射过程中信息是怎样返回的问题,仍然令人不可思议,因为已有的研究结果并没有直接地展示出黑洞在蒸发过程中所剩塌缩物质的宏观特征.尽管宏观信息的丢失在本质上与量子力学并不矛盾,但如果能够展示出与塌缩物质组态相关的外辐射特征,则至少有部分信息可以返回而勿需苛求去解决全量子引力问题.关于这个问题,有人曾经猜测可能非局域性起了作用[12].

然而,在黑洞辐射过程中,热谱和无毛都不能在视界面处得到.如果确实如此,则违背能量守恒定律,因为热谱包含了一个任意高能层,对于一个孤立黑洞,当辐射量子被发射时,其黑洞质量必然会减少,洞也会随之收缩.因此,能量守恒保证在获得更高能量的同时,热谱开始脱离对热量的依赖,即在微正则系综里,温度只是低能量的近似值.换句话说,描述稳定不变黑洞组态的无毛定理只是一个提供近似值的理论.

事实上,黑洞辐射出的只是低于它的质量.最近的研究显示[13,14],在量子引力中,应该把极端黑洞看作是受激亚稳态,而黑洞辐射的根源应该是在考虑引力反作用后,能像隧穿一样可以直接加以描述.这种描述直接体现了 Hawking 提出的非常具有启发性的物理图像,即黑洞辐射是粒子通过隧道效应穿越视界这样一个图像.运用这种方法,人们对静态球对称 Schwarzschild 时空,de sitter 时空,anti-de sitter 时空 Hawking 辐射的隧穿过程进行了直接推导[15—17].本文用此方法对带质量四极矩的静态黑洞 Hawking 辐射的隧穿过程进行了研究,结果表明,在考虑自引力的情况下,辐射谱偏离纯热谱.

2. 时空的 Painleve 坐标变换

带有质量四极矩的静态时空的线元为[18]

$$\mathrm{d}s^2 = m^2 \mathrm{e}^{-2\psi}\left\{\mathrm{e}^{2\gamma}\left(x^2 - y^2\right)\left[\frac{\mathrm{d}x^2}{x^2-1} + \frac{\mathrm{d}y^2}{y^2-1}\right]\right.$$

* 四川省教育厅自然科学基金(批准号:03B047)资助的课题.

$$+(x^2-1)(y^2-1)\mathrm{d}\varphi^2\}-\mathrm{e}^{2\psi}\mathrm{d}t^2. \tag{1}$$

度规函数

$$\psi(x,y)=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+\psi^0(x,y), \tag{2}$$

$$\psi^0(x,y)=A_2x(x^2-3x^2y^2+3y^2-4y^4)/(x^2-y^2)^3, \tag{3}$$

$$\gamma(x,y)=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-1}{x^2-y^2}+\gamma^0(x,y), \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\gamma^0(x,y)=&\frac{1}{2}A_2\frac{1-y^2}{(x^2-y^2)^4}[3(1-5y^2)(x^2-x^2)^2\\&+8y^2(3-5y^2)(x^2-y^2)+24y^4(1-y^2)]\\&+\frac{1}{8}A_2^2\frac{1-y^2}{(x^2-y^2)^8}[-12(1-4y^2+25y^4)(x^2-y^2)^5\\&+3(3-153y^2+697y^2-675y^6)(x^2+y^2)^4\\&+32y^2(9-105y^2+259y^4-171y^6)(x^2-y^2)^3\\&+32y^4(45-271y^2+451y^4-225y^6)(x^2-y^2)^2\\&+2384y^6(1-4y^2+5y^4-2y^6)(x^2-y^2)\\&+1152y^8(1-3y^2+3y^4-y^6)],\end{aligned} \tag{5}$$

其中 m 为引力场的场源质量，A_2 为场源质量四极矩因子. 变换到球极坐标系 $x=\dfrac{r}{m-1}$，$y=\cos\theta$，$\varphi=\varphi$ 则(1)式可改写成

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{e}^{2\psi^0}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2+\mathrm{e}^{2(\gamma^0-\psi^0)}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{e}^{2(\gamma^0-\psi^0)}\mathrm{d}\varphi^2+r^2\mathrm{e}^{-2\psi^0}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta^2. \tag{6}$$

由文献[19]可知，当 $r\approx 2m$ 时，在视界附近存在如下近似：

$$\mathrm{e}^{2(\gamma^0-2\psi^0)}=\mathrm{e}^{2(-A_2/2-3A_2^2/8)}. \tag{7}$$

利用(7)式，可将(6)式改写成

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{e}^{3A_2^2/8}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2+\mathrm{e}^{-A_2-3A_2^2/8}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2+\mathrm{e}^{3A_2^2/8}r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{e}^{-A_2-3A_2^2/8}r^2\mathrm{d}\varphi^2. \tag{8}$$

欲描述视界的隧穿，需进行坐标变换，当然，这种变换不同于 Schwarzschild 坐标变换. 于是我们引入 Painleve 坐标[20]，以期在视界处时空不再奇异. 为了获得新的线元，定义如下新的坐标时间：

$$t_s=t+f(r), \tag{9}$$

其中，f 仅与 r 有关. 为此，根据(9)式，时空线元(8)式可写成

$$\mathrm{d}s^2=-(1-g(r))\mathrm{d}t_s^2+\frac{\mathrm{e}^{-A_2}}{1-g(r)}\mathrm{d}r^2+\mathrm{e}^{3A_2^2/8}r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{e}^{-A_2-3A_2^2/8}r^2\mathrm{d}\varphi^2. \tag{10}$$

在四维时空中，对于带质量四极矩的静态黑洞，$1-g(r)=\mathrm{e}^{3A_2^2/8}(1-2m/r)$，在视界面 $r=2m$ 处度规(10)式不再奇异但仍然是固有时间反演的不变量. 因此，对于一个径直下落的观者，在穿越视界面时不会观察到任何不正常的情况. 为此，可以选择观者的时间作为坐标时间. 作为推论，我们要求这个时间应是平直的，于是有如下条件：

$$\frac{1}{1-g(r)}-\frac{1-g(r)}{\mathrm{e}^{-A_2}}(f'(r))^2=1. \tag{11}$$

对(9)式微分，可得

$$\mathrm{d}t_s=\mathrm{d}t+f'(r)\mathrm{d}r. \tag{12}$$

将(11)式及(12)式代入(10)式，得 Painleve 坐标下的新的时空线元为

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{e}^{3A_2/8}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2-2\mathrm{e}^{-A_2/2+3A_2^2/16}\sqrt{\frac{2m}{r}}\mathrm{d}t\mathrm{d}r+\mathrm{e}^{-A_2}\mathrm{d}r^2+\mathrm{e}^{3A_2^2/8}r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{e}^{-A_2-3A_2^2/8}r^2\mathrm{d}\varphi^2. \tag{13}$$

不难验证，(13)式确定的度规分量在视界面 $r=2m$ 处不再奇异. 而且，对于无穷远观者，度规(13)与度规(8)不可区分，考虑径向类光测地线 $\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\omega=0$，$\mathrm{d}s^2=0$，得

$$\dot{r}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{A_2/2+3A_2^2/16}\left(\pm1+\sqrt{\frac{2m}{r}}\right). \tag{14}$$

当考虑到粒子的自引力时，上述方程将被修正. 对于球面波即穿越视界薄层的粒子，如果薄层有能量 ω，则视界内外的几何为相同的时空几何，不同之处在于质量参数. 当总的能量固定时，质量 m 应该用 $m-\omega$ 来替代.

3. 视界的隧穿效应

下面讨论辐射粒子穿越视界的物理行为. 这里以无质量的壳的出射为例来研究，对于球面引力而言，Brikhoff 理论认为‘壳’出现在时空几何上的唯一影响是为‘壳’的内外总质量的联系提供了匹配条件，即因自引力的作用，出射粒子应遵从的方程中的 m 应被 $m-\omega$ 取代. 于是(13)式改写成

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{e}^{3A_2^2/8}\left(1-\frac{2(m-\omega)}{r}\right)\mathrm{d}t^2-2\mathrm{e}^{-A_2/2+3A_2^2/16}\sqrt{\frac{2(m-\omega)}{r}}\mathrm{d}t\mathrm{d}r+\mathrm{e}^{-A_2}\mathrm{d}r+\mathrm{e}^{3A_2^2/8}r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{e}^{-A_2-3A_2^2/8}r^2\mathrm{d}\varphi^2. \tag{15}$$

由于在视界面附近的无限蓝移，在那里任何波包的波长总是任意小量. 在半经典极限中，我们采用

WKB 近似.以此将隧穿振幅与粒子作用量的虚部相联系,发射率 Γ 是隧穿幅的平方[21],即

$$\Gamma \approx e^{-2\mathrm{Im}Z}, \tag{16}$$

为了计算作用量,先将它表示成

$$\mathrm{Im}Z = \mathrm{Im}\int_{r_{\rm in}}^{r_{\rm out}} p_{\rm r}\mathrm{d}r = \mathrm{Im}\int_{r_{\rm in}}^{r_{\rm out}}\int_0^{p_r}\mathrm{d}p'_{\rm r}\mathrm{d}r, \tag{17}$$

其中 $p_{\rm r}$ 为径向动量 $r_{\rm in}=2m$ 为初始半径,$r_{\rm out}=2(m-\omega)$ 为终极半径,由于视界面的收缩,所以 $r_{\rm in}>r_{\rm out}$.由于辐射反作用导致视界面半径的收缩,在 $r_{\rm in}$ 与 $r_{\rm out}$ 之间的有限区域就会形成经典的势垒禁区.(17)式中的动量,我们可以通过 Hamilton 方程来消除,于是有

$$\left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}p}\right|_r = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \tag{18}$$

其中 Hamilton 函数是 Painleve 时间的生成元.因此,作用量虚部为

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}Z &= \mathrm{Im}\int_m^{m-\omega}\int_{r_{\rm in}}^{r_{\rm out}}\frac{\mathrm{d}r}{\dot r}\mathrm{d}H\\ &= \mathrm{Im}\int_0^{\omega}\int_{r_{\rm in}}^{r_{\rm out}}\frac{e^{-(A_2/2+3A_2^2/16)}\mathrm{d}r}{1+\sqrt{\dfrac{2(m-\omega')}{r}}}(-\mathrm{d}\omega'),\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $\dot r = +\mathrm{d}H/\mathrm{d}p_{\rm r}|_r$.利用(14)式,并注意到 $r_{\rm in}>r_{\rm out}$ 及 $H=m-\omega'$,由(19)式可得

$$\mathrm{Im}Z = +4\pi\omega e^{-A_2/2-3A_2^2/16}(m-\omega/2). \tag{20}$$

将(20)式及(22)式代入(16)式,可得

$$\begin{aligned}\Gamma &\approx e^{-2\mathrm{Im}Z} = e^{-8\pi\omega\exp(-A_2/2-3A_2^2/16)(m-\omega/2)}\\ &= e^{\Delta S},\end{aligned} \tag{21}$$

其中 ΔS 为黑洞的 Bekenstein-Hawkng 熵,按照文献[22]的方法可以计算得到,这也正是我们所期望的结果.

4. 结 论

综上所述,我们对带质量四极矩静态黑洞视界隧穿的辐射进行了简单的推导,发现能量守恒不仅提供了黑洞辐射过程中粒子隧穿的势垒,而且使热谱在较高能态时产生热能偏离.对辐射的修正结果与 Hawking 的观点一致.这个结果同时支持了文献[13,14]的结论,即黑洞在辐射过程中携带信息是可能的.

[1] Hawking S W 1974 *Nature* **248** 30

[2] Hawking S W 1975 *Math . Phys* . **43** 199

[3] Gibbons G W and Perry M J 1978 *Proc . R . Soc* . A **358** 467

[4] Unruh W G 1976 *Phys . Rev* . D **41** 870

[5] Damour T and Ruffini R 1976 *Phys . Rev* . D **14** 332

[6] Dai X X and Zhao Z 1992 *Acta Phys . Sin* . **41** 869(in Chinese)[戴宪新、赵 峥 1992 物理学报 **41** 869]

[7] Luo Z Q and Zhao Z 1993 *Acta Phys . Sin* . **42** 506 (in Chinese)[罗志强、赵 峥 1993 物理学报 **42** 506]

[8] Ma Y and Yang S Z 1997 *Acta Phys . Sin* . **46** 2280(in Chinese)[马勇、杨树政 1997 物理学报 **46** 2280]

[9] Song T P and Yao G Z 2001 *Acta Phys . Sin* . **51** 1144(in Chinese)[宋太平、姚国政 2001 物理学报 **51** 1144]

[10] Zhang J Y 2003 *Commun . Theor . Phys* . **40** 244(in Chinese)[张靖仪 2003 理论物理通讯 **40** 244]

[11] Callan C G Jr. and Maldacena J M 1996 *Nucl . Phys* . B **472** 591

[12] Schoutens K, Verlinde E and Verlinde H, hep-th :19401081

[13] Parkh M K and Wilczek F 2000 *Phys . Rev . Lett* . **85** 5042

[14] Vagenas E C 2002 *Phys . Lett* . B **533** 302

[15] Hemming S and Keski-Vakkuri E 2001 *Phys . Rev* . D **64** 044006

[16] Parirh M K 2002 *Phys . Lett* . B **546** 189

[17] Medved A J 2002 *Phys . Rev* . D **66** 124009

[18] Gutsunaev Ts I and Manko V S 1985 *Gen . Rel . Grav* . **17** 1025

[19] Meng X D an d Zhao Z 1992 *Journal of Beijing Normal University* (Natural Science)**28**(1)43(in Chinese)[孟晓东、赵 峥 1992 北京师范大学学报(自然科学版)**28**(1)43]

[20] Painleve P 1921 *C . R . Acad . Sci* . (Paris)**173** 677

[21] Massar S and Parentani R 2000 *Nucl . Phys* . B **575** 333

[22] Han Y W and Yang S Z, Liu W B 2005 *Commun . Theor . Phys* . **43** 382(in Chinese)[韩亦文、杨树政、刘文彪 2005 理论物理通讯 **43** 382]

Using quantum tunneling method Hawking radiation of a static black hole horizon with a mass-quadrupole moment is studied *

Han Yi-Wen

(*Department of Physics*, *Daxian Teacther 's College*, *Dazhou* 635000, *China*)

(Received 20 April 2005; revised manuscript received 19 May 2005)

Abstract

This paper presents a straightforward derivation of Hawking radiation from a static black hole possessing mass-quadrupole moment as a tunneling process, and the radiation spectrum is obtained. Because the derivation assumes conservation laws, the exact spectrum is not precisely thermal. This result supports the viewpoint that it is possible for the radiation via tunneling to have information-carrying capabilities.

Keywords: black hole, radiation, tunneling, energy conservation

PACC: 0420, 9760L

* Project supported by the Foundation of Sichuan Education Departments Youth Scientific (Grant No. 03B047).