

电压反馈型 DC-DC 变换器的稳定性研究^{*}

赵益波¹⁾ 罗晓曙^{1)†} 方锦清²⁾ 汪秉宏³⁾

¹⁾ 广西师范大学物理与信息工程学院, 桂林 541004)

²⁾ 中国原子能科学研究院, 北京 102413)

³⁾ 中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230026)

(2005 年 1 月 4 日收到, 2005 年 4 月 8 日收到修改稿)

建立了电压反馈型 DC-DC 变换器连续运行模式下的频闪映射模型, 利用离散映射方程的 Jacobian 矩阵的特征值分析了变换器在参数变化时不动点的失稳情况. 以具体的电压反馈型 buck 变换器为例, 通过理论分析与数值仿真, 两者的结果具有很好的一致性, 表明利用离散映射分析 DC-DC 变换器的稳定性是切实可行的.

关键词: 离散映射模型, DC-DC 变换器, 稳定性

PACC: 0525

1. 引言

DC-DC(直流-直流)变换器又称斩波器, 其功能是将不稳的直流电压变换成所需的各种稳定的直流电压. 它在邮电通信、军事设备、计算机、仪器仪表、工业自动化设备和家用电气等民用电子工业和军工系统中有着极其广泛的应用. 近年来人们对 DC-DC 变换器的动力学性质进行了深入的研究, 通过研究发现, 该变换器中有着十分丰富的非线性动力学行为^[1-4], 例如 DC-DC 变换器经过一系列分岔如倍周期分岔、边界碰撞分岔等可以达到混沌. 该系统发生分岔时, 原有的周期态失稳, 可能出现新的稳态或失去稳定性^[5], 时常表现出一些奇异或不规则现象, 如高幅的电磁噪声、控制系统的间歇不稳定、临界运行的突然崩溃和反馈振荡等^[6,7], 所以研究非线性系统周期态的失稳情况, 对于研究 DC-DC 变换器非线性动力学性质和稳定性, 从而提高这种直流电压变换器的各种物理性能有着十分重要的意义.

要研究非线性系统的动力学性质和稳定性, 关键是要对系统建立合适的模型和采取适当的分析方法. 由于 DC-DC 变换器在运行中, 其电路拓扑结构随时间随机改变, 使其成为一个典型的分段光滑非

线性动力学系统^[8], 其特有的非线性特性给数学模型的建立和求解带来较大的困难. 文献[9]采用状态空间平均模型分析了 DC-DC 变换器的稳定性. 然而实际上, 只有 $f \gg f_T$ 时(f 为开关切换频率, f_T 为附加低通滤波器的截止频率), 状态空间平均法才能近似分析系统的稳定性. 文献[10,11]的研究结果表明, 状态空间平均法是平均原理的一阶近似, 不能以任意精度逼近原系统的平均值. 为此, 本文利用频闪采样方法建立了电压反馈型 DC-DC 变换器的离散映射模型. 在建立过程中, 首先利用变换器各个拓扑结构之间的异步切换条件来确定占空比, 然后借助于 Jacobian 矩阵这一有效工具来研究了该电路系统不动点的稳定性, 最后以电压反馈型 buck 变换器为研究对象, 进行理论分析与数值计算. 研究结果表明, 理论分析与数值计算结果具有很好的一致性.

2. 系统描述

图 1 为电压反馈模式下 DC-DC 开关变换器的基本框图, 按实际需要的电压不同, 这种变换器主要可分为降压式(buck)、升压式(boost)、降升压式(buck-boost)等三种典型的变换器电路. 图 2 所示的

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10247005,10472116)、国家自然科学基金重点项目(批准号:70431002)、广西自然科学基金(批准号:9714005)、广西新世纪十百千人才工程专项资金(批准号:2002226)资助的课题.

[†]E-mail: lxs@mailbox.gxnu.edu.cn

buck 变换器即为图 1 中 DC-DC 变换器的一种 ,其工作原理将结合图 1 给予说明 . 图 1 中 $v(t)$ 为输出电压 (即电容电压 u_c), V_{ref} 为参考电压 , a 为反馈增益 ($a > 0$), V_{offset} 为补偿电压 . 由图 1 可知控制电压为

$$V_{con} = V_{offset} - a(v(t) - V_{ref}), \tag{1}$$

设 V_{ramp} 为锯齿波电压 ,一般取为

$$V_{ramp} = V_U + (V_U - V_L) \chi t \bmod T), \tag{2}$$

其中 , T 为开关周期 , V_U, V_L 为锯齿波电压最大值和最小值 .

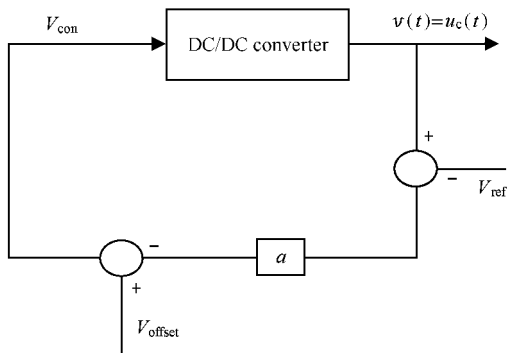


图 1 电压反馈型 DC-DC 变换器方框图

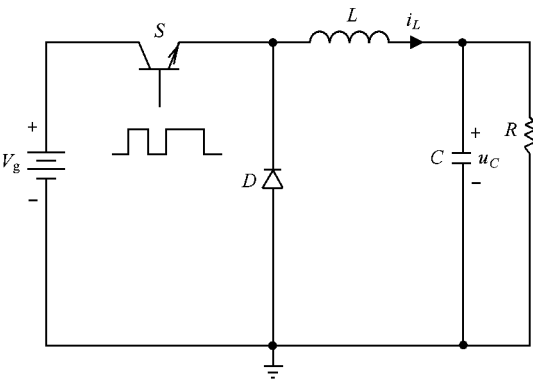


图 2 buck 变换器电路原理图

图 1 中的 DC-DC 变换器的三极管调整方式为脉宽调制 (PWM) 方式 ,即控制电压 V_{con} 与锯齿波电压 V_{ramp} 进行比较产生出脉宽调制信号以驱动三极管 . 结合图 2 及图 3 所示的脉宽调制信号波形图 ,图 1 所示的电压反馈型 DC-DC 变换器的 PWM 控制策略可概述如下 :

当 $V_{con} > V_{ramp}$ 时 ,输出高电平脉冲 ,相当于图 2 中三极管 S 闭合 (饱和导通) ,此时二极管 D 受到反向电压断开 ,电感电流 i_L 增大 ;当 $V_{con} < V_{ramp}$ 时 ,输出低电平脉冲 ,相当于图 2 中三极管 S 断开 (截

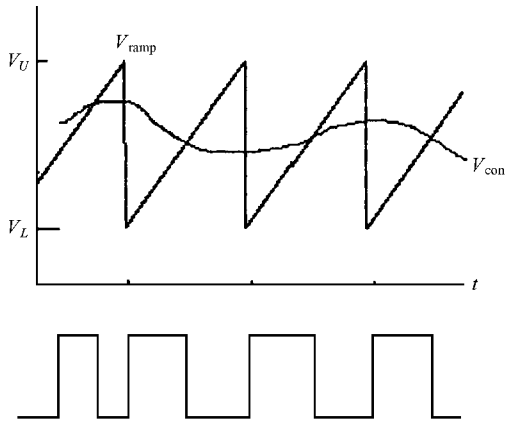


图 3 脉宽调制信号波形图

止) 此时 ,二极管 D 正向导通 ,电感电流 i_L 通过 D 进行续流 ,所以 D 又称续流二极管 ,在 S 断开过程中 , i_L 减小 . 根据电感电流 i_L 在一开关周期内是否降为零 ,DC-DC 变换器可能有两种工作模式 :连续电流模式 (CCM ,即一开关周期内电感电流 $i_L > 0$) 和不连续电流模式 (DCM ,即一开关周期内电感电流下降到零) . 本文只分析 DC-DC 变换器工作于 CCM 情况 . 由 KCL 和 KVL 定律及变换器工作的拓扑结构 ,变换器的状态方程可写成如下的矩阵形式 :

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 E, \quad \text{三极管 } S \text{ 闭合}, \tag{3}$$

$$\dot{x} = A_2 x + B_2 E, \quad \text{三极管 } S \text{ 断开}, \tag{4}$$

其中 $x = [x_1 \ x_2]^T = [i_L \ u_c]^T$ 为状态变量 , i_L 为电感电流 , u_c 为电容电压 . A_1, A_2 为系统的参数矩阵 , B_1, B_2 为输入矩阵 ,且 A_1, A_2, B_1, B_2 都是常数矩阵 .

3. DC-DC 变换器的离散迭代映射方程建立及其稳定性分析

由于 DC-DC 功率变换器的状态方程 (3) (4) 式是分段光滑非线性动力学系统 ,直接通过状态方程来分析其动力学系统的稳定性是很困难的 ,所以本文利用离散映射模型来分析其稳定性 .

3.1. DC-DC 功率变换器的离散迭代映射方程建立

我们采取闪频采样方法^[12]求方程 (3) (4) 式的离散映射方程 . 令 d_n 为第 n 个周期 T 的占空比 . 则离散映射方程可写为

$$x_{n+1} = f(x_n, d_n), \tag{5}$$

其中 $x_n = x(nT) = [x_{1n}, x_{2n}]^T$ 为 n 个周期 T 时刻状态 x 的采样值, 则变换器的状态方程(3)(4)两式可表示为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + B_1 E, & nT < t < nT + d_n T, & (6) \\ \dot{x} &= A_2 x + B_2 E, & nT + d_n T < t < (n+1)T. & (7) \end{aligned}$$

利用线性系统理论中状态微分方程的求解方法, 可得到(5)式中 x_{n+1} 的表达式为

$$\begin{aligned} x' &= x(nT + d_n T) \\ &= \phi_1(d_n T)x_n + (\phi_1(d_n T) - I)A_1^{-1}B_1 E, \\ x_{n+1} &= x[(n+1)T] \\ &= \phi_2[(1-d_n)T]\phi_1(d_n T)x_n \\ &\quad + \phi_2[(1-d_n)T][\phi_1(d_n T) - I]A_1^{-1}B_1 E \\ &\quad + [\phi_2[(1-d_n)T] - I]A_2^{-1}B_2 E, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\phi_j(\xi) = e^{A_j \xi} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A_j^k \xi^k$, $j=1, 2$, 为 A_j 的状态转移矩阵.

下面利用异步切换条件^[13]来求解占空比 d_n . 为简化计算, 将 V_{con}, V_{ramp} 重写为

$$V_{con} = U_1 + kx, \quad V_{ramp} = \alpha + \beta(t \bmod T), \quad (9)$$

其中 $U_1 = V_{offset} + aV_{ref}$, $\alpha = V_U$, $\beta = V_U - V_L$ 都为常量. $k^T = [0 \quad -a]$. 由图3可知, 当 $V_{con} = V_{ramp}$ 时, 三极管 S 断开. 定义异步切换函数为

$$\begin{aligned} s(x_n, d_n) &\stackrel{\text{def}}{=} V_{con} - V_{ramp} \\ &= U_1 + k^T x(d_n T) - (\alpha + \beta d_n T) \\ &= U_1 + k^T [\phi_1(d_n T)x_n + (\phi_1(d_n T) - I)A_1^{-1}B_1 E] - (\alpha + \beta d_n T). \end{aligned} \quad (10)$$

则当 $s(x_n, d_n) = 0$ 时, 三极管 S 断开, 解此方程, 即可求出 d_n , 但该方程是个超越方程, 所以只能通过数值方法求解.

3.2. Jacobian 矩阵

Jacobian 矩阵是分析离散系统不动点或周期轨道(稳定或不稳定)附近动力学的有力工具^[14]. 本文着重分析离散系统(5)的不动点在参数变化时的失稳情况. 设不动点 $x_n = x(nT) = x[(n+1)T] = x_Q$, 则不动点 x_Q 处的 Jacobian 矩阵^[15]为

$$J(x_Q) = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \frac{\partial f}{\partial d_n} \left(\frac{\partial s}{\partial d_n} \right)^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial x_n} \right) \bigg|_{x_n = x_Q}, \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_n} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{1n}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{1n}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{2n}} \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial f}{\partial d_n} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial d_n} & \frac{\partial f_2}{\partial d_n} \end{bmatrix}^T, \\ \frac{\partial s}{\partial x_n} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{1n}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{2n}} \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

利用方程(8)(10)可求得

$$\partial f / \partial x_n = \phi_2[(1-d_n)T]\phi_2(d_n T), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \partial f / \partial d_n &= T\phi_2[(1-d_n)T][A_1 - A_2]\phi_1(d_n T)x_n \\ &\quad - TA_2\phi_2[(1-d_n)T][\phi_1(d_n T) - I] \\ &\quad \times A_1^{-1}B_1 E \\ &\quad + T\phi_2[(1-d_n)T]\phi_1(d_n T)B_1 E \\ &\quad - T\phi_2[(1-d_n)T]B_2 E, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\partial s / \partial d_n = Tk^T\phi_1(d_n T)[A_1 x_n + B_1 E] - \beta T, \quad (14)$$

$$\partial s / \partial x_n = k^T\phi_1(d_n T). \quad (15)$$

将(12)–(15)式代入(11)式, 并由矩阵 $J(x_Q)$ 特征方程

$$\det(\lambda I - J(x_Q)) = 0, \quad (16)$$

就可以得到 $J(x_Q)$ 在不同参数条件下对应特征值的数值解.

当(16)式的其中一个特征值 $\lambda = 1$, 而其余的特征值模小于1(即复平面单位圆内), 系统在该平衡点处发生鞍结分岔; 当其中一个 $\lambda = -1$, 而其余的特征值模小于1, 系统在该平衡点处发生倍周期分岔; 当 λ 中有一对共轭复值, 且模为1, 其余模均小于1, 系统发生环面分岔.

4. 电压反馈型 buck 变换器稳定性分析

为了验证上述方法的正确性, 以一个具体的电压反馈型 buck 变换器为例, 来研究电路系统的分岔和失稳情况. 电压反馈型 buck 变换器的电路原理图如图4所示.

取状态变量 $x = [x_1 \quad x_2]^T = [i_L \quad u_C]^T$, 可得电路系统状态微分方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{x_2}{L} + \frac{V_g}{L}u, \\ \dot{x}_2 = \frac{x_1}{C} - \frac{x_2}{RC}, \end{cases} \quad (17)$$

u 在三极管 S 闭合时为1, 在三极管 S 断开时为0. 由(17)式可得(6)(7)两式中相应的矩阵为 $A = A_1$

$$= A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1/L \\ 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
 图 4

所示电路的各元件及参数取值如下：

$$T = 200\mu\text{s}, \quad C = 40\mu\text{F}, \quad L = 1\text{mH}, \quad E = 48\text{V}, \\ R = 5\Omega, \quad V_U = 4\text{V}, \quad V_L = 1\text{V}, \quad V_{\text{ref}} = 24\text{V}.$$

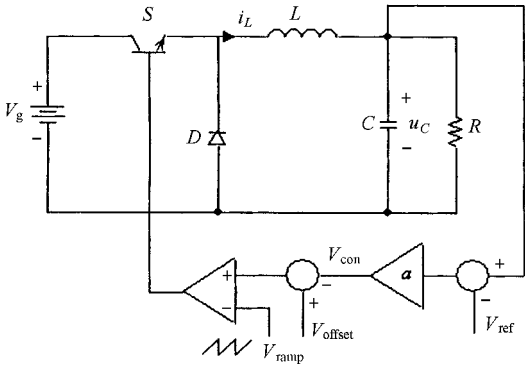


图 4 电压反馈型 buck 电路原理图

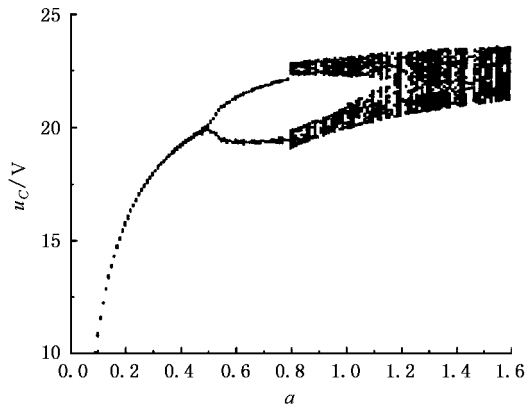


图 5 以反馈增益为分岔参数电压 u_C 的分岔图

以反馈增益 a 为分岔参数,采用闪频采样^[11]用 4 阶龙格-库塔法进行数值仿真,得分岔图如图 5 所示。下面利用上述离散映射模型来分析该电路系统在周期 1(即离散映射模型的不动点)的失稳情况。由(8)式,并考虑到 $A = A_1 = A_2$ 和 $B_2 = (0 \ 0)^T$ 可得迭代映射方程为

$$x_{n+1} = e^{AT} x_n + (e^{AT} - e^{A(1-d_n)T})A^{-1}B_1E, \quad (18)$$
$$d_n \text{ 由下式决定:}$$

$$S(x_n, d_n) = U_1 + k[e^{A_d n T} x_n + (e^{A_d n T} - I)A^{-1}B_1E] - \alpha - \beta d_n T = 0, \quad (19)$$

这是超越方程,可由牛顿迭代法求出。将 d_n 代入(18)式可解得平衡点 x_Q (即 $x_Q = x_{n+1} = x_n$)。

上述方程中, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -L/R & C \\ -L & 0 \end{bmatrix}.$

进一步可求得平衡点 x_Q 的 Jacobian 矩阵为

$$J(x_Q) = e^{AT} - Te^{A(1-d_n)T}B_1E \cdot ke^{A_d n T} \cdot (Tke^{A_d n T}(Ax_n + B_1E) - \beta T)^{-1} \mid x_n = x_Q, \quad (20)$$

其中, $e^{AT} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k, t = 1, 2, \dots$ 为 A 的状态转移矩阵,在这里取 $k = 4$ 。

将(20)式代入(16)式得到 a 取不同值时离散映射模型(18)式的 Jacobian 矩阵的特征值 λ 的数值解见表 1。

表 1		
a	特征值 $\lambda_1 \ \lambda_2$	备注
0.483	$-0.481746 \pm j0.380338$	稳定周期 1
0.487	$-0.0674432 \pm j0.611356$	稳定周期 1
0.491	$-0.0667711 \pm j0.611445$	稳定周期 1
0.496	$-0.0255492 \pm j0.614861$	稳定周期 1
0.497	$-0.370745 \quad -1.01616$	倍周期分岔

根据表 1 的理论计算结果可知当系统在 $a \approx 0.497$ 处发生了倍周期分岔,与数值仿真结果(图 5)有很好的-致性。这说明利用离散映射模型来分析 DC-DC 变换器的稳定性是切实可行的。

5. 结 论

DC-DC 变换器在现代工业、交通、国防、生活等领域中具有很强的应用前景,但由于该变换器是分段光滑的强非线性系统,用解析的方法对其进行稳定性分析是很复杂的,甚至是不可能的。本文利用离散映射模型来研究了其稳定性,并通过理论分析和数值仿真证明了该方法的有效性。在求解过程中,由于开关周期 T 很小,故计算状态转移矩阵带来的误差数量级完全可忽略。影响精确性主要是占空比 d_n 的求解,所以采取适当的算法是得到 d_n 的精确数值解的关键。

本文以 buck 变换器为例,验证了利用离散映射模型来分析不动点稳定性的正确性。该模型可以应用到其他变换器,如 boost, buck-boost 变换器等。但计算时必须考虑到系统参数矩阵的可逆性,故必要时要考虑到元件的损耗等,这更符合实际情况,所以该离散映射模型具有较好的实用价值。

- [1] Tse C K 1994 *IEEE Trans. Circuit Syst. I* **41** 16
- [2] Yuan G H, Soumitro Banerjee, Edward Ott 1998 *IEEE Trans. Circuit Syst. I* **45** 133
- [3] Dai D, Ma X K and Li X F 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2729 (in Chinese) [戴 栋、马西奎、李小峰 2003 物理学报 **52** 2729]
- [4] Zhou Y F, Chen J N and C. K. Tse 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3676 (in Chinese) [周宇飞、陈军宁、谢智刚 2004 物理学报 **53** 3676]
- [5] Ehusubal E T and Moscklolo E 2003 *World Scientific* 138
- [6] Deane J H B, Hamill D C 1990 *IEEE Trans. on Power Electronics* **5** 260
- [7] Luo X S, Wang B H, Chen G R *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 12 (in Chinese) [罗晓曙、汪秉宏、陈关荣等 2003 物理学报 **52** 12]
- [8] He D R, Wang B H, Wang H M *et al* 2001 *Introduce of Nonlinear Dynamics* (Shanxi : Press of Shanxi Science and Technology) p 135 (in Chinese) [何大韧、汪秉宏、汪海梅等 2001 非线性动力学引论 (陕西 陕西科学技术出版社) 第 135 页]
- [9] Liu D N and Cao W D 2001 *Journal of Yangzhou University* (Natural Science Edition) **4** 62 (in Chinese) [刘大年、曹卫东 2001 扬州大学学报 (自然科学版) **4** 62]
- [10] Middlebrook R 1976 *IEEE PESC Rec* 18
- [11] Lin B T and Qiu S S 1997 *Journal of South China University of Technology* (Natural Science) **25** 58 (in Chinese) [林波涛、丘水生 1997 华南理工大学学报 (自然科学版) **25** 58]
- [12] Wang G R and Chen G Z 1995 *Chaotic motion nonlinear constant differential equation* (Guangxi : Press of Guangxi Science and Technology) p 89 (in Chinese) [王光瑞、陈光旨 1995 非线性微分方程的混沌运动 (广西 广西科学技术出版社) 第 89 页]
- [13] Mario di Bernardo, Francesco vasca 2000 *IEEE Trans. Circuit Syst. I* **47** 130
- [14] Zhang B, Li P and Qi Q 2002 *Proceedings of the CSEE* **22** 81 (in Chinese) [张 波、李 萍、齐 群 2002 中国电机工程学报 **22** 81]
- [15] Alligood K T, Sauer T D and Yoke J A 1996 *Chaos : An Introduction to Dynamical Systems* (New York , Springer)

Study on stability of the voltage-mode DC-DC converters *

Zhao Yi-Bo¹⁾ Luo Xiao-Shu^{1)*} Fang Jin-Qing²⁾ Wang Bing-Hong³⁾

¹⁾(Department of Physics and Electronic Science , Guangxi Normal University , Guilin 541004 , China)

²⁾(China Institute of Atomic Energy , Beijing 102413 , China)

³⁾(Department of Modern Physics , University of Science and Technology of China , Hefei 230026 , China)

(Received 4 January 2005 ; revised manuscript received 8 April 2005)

Abstract

Stroboscopic maps for voltage-mode converters in the continuous conduction mode (CCM) are build up. The stability of one-periodic point is analyzed together with eigenvalues of Jacobian matrix of discrete-maps. The voltage-mode buck converter is taken as an example , and the results of theoretical analysis and numerical simulation coincide with each other , which shows that the stability analysis of the DC-DC converters is feasible using the discrete-map model.

Keywords : discrete-time model , DC-DC converters , stability

PACC : 0525

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10247005 , 10472116) , the Key National Natural Science Foundation of China (Grant No. 70431002) , the Guangxi Natural Science Foundation (Grant No. 9714005) and the Guangxi New Century Foundation for Ten , Hundred and Thousand Talents (Grant No. 2002226) .

[†]E-mail : jxs@mailbox.gxnu.edu.cn