

偏置信号调制下色关联噪声驱动的线性系统的 随机共振^{*}

徐 伟^{1)†} 靳艳飞^{1)‡} 徐 猛³⁾ 李 伟¹⁾

¹⁾ (西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

²⁾ (南京航空航天大学振动工程研究所, 南京 210016)

³⁾ (西北工业大学自动控制系, 西安 710072)

(2005 年 3 月 15 日收到, 2005 年 4 月 25 日收到修改稿)

研究了偏置信号调制下关联分段噪声驱动的过阻尼线性系统的随机共振现象, 推导出了一阶矩、二阶矩和信噪比的解析表达式. 通过对信噪比曲线的分析, 发现该系统中存在三种不同形式的随机共振: 传统的随机共振、真正的随机共振和广义的随机共振. 此外, 数值结果还表明, 加性噪声能够减弱输出的信噪比, 而噪声之间的互相关强度能够使输出的信噪比增强.

关键词: 随机共振, 信噪比, 偏置信号调制的噪声, 分段噪声

PACC: 0540

1. 引 言

随机共振的概念是由 Benzi 等^[1]在研究第四纪全球气象冰川问题时提出的. 1983 年, Fauve 等^[2]在具有双稳输出特性的 Schmitt 触发器电路系统中, 用实验证实了随机共振的存在, 并把信噪比的概念引入随机共振的理论和实验研究. 从此, 信噪比成为随机共振研究的焦点之一. 然而, 人们对随机共振的研究大多集中在具有周期信号和噪声的非线性双稳或多稳系统中^[3-9]. 罗晓琴等^[8,9]将噪声之间的色关联引入双稳系统的随机共振的研究中, 发现噪声之间的关联强度和关联时间在随机共振的研究中起着重要的作用. 近来的一些研究表明, 随机共振在线性系统或非周期信号作用的系统中仍然可以发生. 如在输入非周期信号的双稳系统中出现了“非周期随机共振”^[10], 由色乘性噪声驱动的线性系统也发现了随机共振^[11-13]. 因此, 随机共振被认为是动力学系统中存在的一种较为普遍的现象, 引起了人们的普遍关注和浓厚兴趣.

通常情况下, 噪声和周期信号都是以相加的形式引入系统的. 但是, 在实际的物理系统中, 例如,

在光学或射电天文学的扩充器中需要使用信号调制的噪声, 即噪声和信号必须以相乘的方式出现. 于是, Dykman 等^[14]研究了具有信号调制噪声的非对称双稳系统并证实了随机共振的存在. 信号调制的噪声一般分为两种: 一种是直接信号调制, 另一种是偏置信号调制. 曹力等^[15-18]对具有信号调制噪声的单模激光系统进行了深入的研究并得到一些新的结果. 偏置信号调制的噪声广泛应用于光通信系统^[19], 用来提高通信的质量. 然而, 对于具有偏置信号调制噪声的过阻尼线性系统的随机共振的研究甚少.

本文研究了具有偏置信号调制噪声的线性模型的随机共振现象, 为了方便研究, 采取了非对称的分段噪声. 通过平均法, 得到了响应的一、二阶矩及信噪比的精确解析表达式, 该表达式适用于任意的噪声强度和信号的振幅和频率, 不必限制在小的噪声和信号范围内. 同时讨论了噪声和信号对信噪比的影响, 发现了真正的随机共振, 传统随机共振和广义随机共振现象. 这里真正的随机共振是指在固定噪声水平的前提下, 通过调制系统的频率所产生的随机共振效果. 传统的随机共振是指在受调下信号输入的系统, 通过调制噪声水平使输出的信噪比达

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10472091 和 10332030)和陕西自然科学基金资助的课题(批准号: 2003A03)资助的课题.

[†] E-mail: weixu@nwpu.edu.cn

到最大;广义随机共振是指信噪比随系统的其他一些特征参数(如信号的振幅、噪声的相关时间等)是非单调变化的.值得指出的是,文中发现了传统的随机共振,然而该现象在由噪声和周期信号以相加形式引入的线性系统中是不存在的.

2. 偏置信号调制噪声驱动的线性系统的信噪比

具有偏置信号调制噪声的过阻尼线性系统可由下列微分方程来描述:

$$\frac{dx}{dt} = -(a + \xi(t))x + \left(\alpha + \frac{1}{2}A_0 \cos(\Omega t)\right)\eta(t), \quad (1)$$

其中 A_0 和 Ω 分别为周期信号的振幅和频率,常数 α 可以取 0 和 1 两个值, $\alpha = 0$ 代表直接信号调制的噪声, $\alpha = 1$ 代表偏置信号调制的噪声.在文中, α 均取为 1. $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 为非对称的具有指数形式相关函数的分段噪声,其统计性质为

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \eta(t) = 0, \\ \xi(t)\xi(t') &= \sigma_1 \exp(-\lambda_1 |t - t'|), \\ \eta(t)\eta(t') &= \sigma_2 \exp(-\lambda_2 |t - t'|). \end{aligned} \quad (2)$$

实际上 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 可以看作一个两态随机过程,即

$$\begin{aligned} \xi(t) &\in \{M_1, -N_1\}, \quad \sigma_1 = M_1 N_1, \\ \lambda_1 &= p_1 + p_2, \quad \Delta_1 = M_1 - N_1, \\ \eta(t) &\in \{M_2, -N_2\}, \quad \sigma_2 = M_2 N_2, \\ \lambda_2 &= q_1 + q_2, \quad \Delta_2 = M_2 - N_2. \end{aligned} \quad (3)$$

这里 p_1 是由 M_1 到 $-N_1$ 的转换率, p_2 是由 $-N_1$ 到 M_1 的转换率. q_1 是由 M_2 到 $-N_2$ 的转换率, q_2 是相应的逆转换率. Δ_1 和 Δ_2 分别表示分段噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的非对称性.

通常人们认为 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 是相互独立的,但是在某些情况下,如激光系统中,其噪声之间存在某种互关联性.故这里假设 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 之间具有指数关联形式

$$\begin{aligned} \xi(t)\eta(t') &= \eta(t)\xi(t') \\ &= \sigma_3 \exp(-\lambda_3 |t - t'|), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\sigma_i (i=1, 2, 3)$ 为噪声强度, $\lambda_i^{-1} = \tau_i (i=1, 2, 3)$ 为噪声的相关时间.

首先,对方程(1)进行平均,然后将(1)式两边乘以 $2x$ 后再平均,即可得一、二阶矩的运动微分方程

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = -a \langle x \rangle - \langle \xi(t) \rangle \langle x \rangle, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} &= -2a \langle x^2 \rangle - 2 \langle \xi(t) \rangle \langle x^2 \rangle \\ &\quad + (2\alpha + A_0 \cos(\Omega t)) \langle x \eta(t) \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

利用 Shapiro-Logonov 公式^[20],可以得到下列方程:

$$\frac{d\langle \xi x \rangle}{dt} = \langle \xi \rangle \frac{dx}{dt} - \lambda_1 \langle \xi x \rangle. \quad (7)$$

方程(1)两边同乘以 $\xi(t)$ 后作平均,然后将方程(7)代入可得

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \xi x \rangle}{dt} &= -(a + \lambda_1) \langle \xi x \rangle - \langle \xi^2 \rangle \langle x \rangle \\ &\quad + \left(\alpha + \frac{1}{2}A_0 \cos(\Omega t)\right) \sigma_3. \end{aligned} \quad (8)$$

利用分段噪声的性质(3),较高阶的相关函数 $\langle \xi^2 x \rangle$ 能由比其低阶的相关函数 $\langle \xi(t) \rangle \langle x \rangle$ 来表示:

$$\langle \xi^2 x \rangle = \sigma_1 \langle x \rangle + \Delta_1 \langle \xi x \rangle. \quad (9)$$

将方程(9)代入方程(8)可得

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \xi x \rangle}{dt} &= -(a + \lambda_1 + \Delta_1) \langle \xi x \rangle - \sigma_1 \langle x \rangle \\ &\quad + \left(\alpha + \frac{1}{2}A_0 \cos(\Omega t)\right) \sigma_3. \end{aligned} \quad (10)$$

这样,方程(5)和方程(10)就构成了未知函数 x 和 $\langle \xi x \rangle$ 的一个微分方程组

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \langle \xi x \rangle \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a & -1 \\ -\sigma_1 & -(a + \lambda_1 + \Delta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \langle \xi x \rangle \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\alpha + \frac{1}{2}A_0 \cos(\Omega t)\right) \sigma_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

求解方程组(11),并令 $t \rightarrow \infty$ 可得一阶矩 x 的渐近表达式

$$x = A_0 \sigma_3 \frac{f_1 \cos(\Omega t) + f_2 \sin(\Omega t)}{2f_3} - \alpha f_4 \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} f_1 &= \Omega^2 - r_1 r_2, \\ f_2 &= -\Omega(r_1 + f_2), \\ f_3 &= (\Omega^2 + r_2^2)(\Omega^2 + r_1^2), \\ f_4 &= \frac{\sigma_3}{r_1 r_2}, \end{aligned}$$

$$r_{1,2} = a + \epsilon_{1,2}$$

$$= a + \frac{\lambda_1 + \Delta_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\lambda_1 + \Delta_1)^2}{4} + \sigma_1}.$$

用类似的方法,可以得到关于二阶矩 x^2 的微分方程

$$\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = -(2a + \lambda_1 + 2\Delta_1) \langle x^2 \rangle - 2\sigma_1 \langle x \rangle^2$$

$$+ (2\alpha + A_0 \cos(\Omega t)) \xi \eta x, \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} x \eta = -(a + \lambda_2) x \eta - \xi \eta x$$

$$+ \left(\alpha + \frac{1}{2} A_0 \cos(\Omega t) \right) \sigma_2, \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \xi \eta x = -(a + \Delta_1 + \lambda_1 + \lambda_2) \xi \eta x - \sigma_1 x \eta$$

$$+ \left(\alpha + \frac{1}{2} A_0 \cos(\Omega t) \right) \sigma_3 \Delta_2. \quad (15)$$

方程(6)和方程(13)–(15)组成了关于未知函数 x^2 , ξx^2 , $x \eta$ 和 $\xi \eta x$ 的一个微分方程组. 通过求解该方程组并令 $t \rightarrow \infty$, 即可求得二阶矩的表达式

$$\begin{aligned} x^2_{st} = & \left\{ \alpha [(a + \lambda_1/2 + \Delta_1) (\sigma_2 f_5 + \Delta_2 \sigma_3 f_6) \right. \\ & - (\epsilon_2 \sigma_2 f_5 + \epsilon_1 \Delta_2 \sigma_3 f_6)] \\ & - (\epsilon_2 \sigma_2 f_5 + \epsilon_1 \Delta_2 \sigma_3 f_6) A_0 / 2 \} \\ & \times \{ \chi r_3^2 + \Omega^2 \} \chi r_4^2 + \Omega^2 \} \\ & \cdot [\alpha (2a + \lambda_1 + 2\Delta_1) - 2\sigma_1]^{-1}, \quad (16) \end{aligned}$$

其中

$$r_{3,4} = 2a + \frac{\lambda_1 + 2\Delta_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\lambda_1 + 2\Delta_1)^2}{4} + 4\sigma_1},$$

$$f_5 = \frac{\alpha}{r_2 + \lambda_2} + \frac{A_0 \Omega}{\chi (r_2 + \lambda_2)^2 + \Omega^2},$$

$$f_6 = \frac{\alpha}{r_1 + \lambda_2} + \frac{A_0 \Omega}{\chi (r_1 + \lambda_2)^2 + \Omega^2}.$$

并且这里 ϵ_i, r_i ($i=1, 2$) 同(12)式的定义.

由方程(1)很容易写出方程一般解的形式

$$\begin{aligned} x(t + \tau) = & x(t) g(\tau) \exp(-a\tau) \\ & + \frac{A_0}{2} \int_0^\tau \exp(-av) h(v) \\ & \times \cos[\Omega(t + \tau - v)] dv \\ & + \alpha \int_0^\tau \exp(-av) h(v) \chi dv, \quad (17) \end{aligned}$$

其中

$$g(v) = \exp\left[-\int_0^v \xi(u) \chi du\right],$$

$$h(t - v) = \chi(v) \exp\left[-\int_v^t \xi(u) \chi du\right].$$

由于(17)式含有乘性噪声的指数形式的积分, 我们将函数 $g(v)$ 和 $h(v)$ 展开成级数的形式, 然后经过计算得到下列表达式^[21]:

$$\begin{aligned} g(v) = & \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \exp[-\epsilon_2 v] \\ & - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \exp[-\epsilon_1 v], \quad (18) \end{aligned}$$

$$h(t - v) = \frac{\sigma_3}{\lambda_3} \exp[-\lambda_3(t - v) - 1] g(t - v). \quad (19)$$

利用(17)式和平均方法, 可将相关函数的表达式写为

$$\begin{aligned} x(t + \tau)x(t) = & x^2_{st} g(\tau) \exp(-a\tau) \\ & + \frac{x A_0 \sigma_3 \exp(-at - 1)}{2\lambda_3(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \\ & \times [f_7 \cos(\Omega t) + f_8 \sin(\Omega t)] \\ & + \alpha x \int_0^\tau \exp(-av) h(v) \chi dv, \quad (20) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} f_7 = & \exp[-(\lambda_3 - r_2)t] \\ & \times \frac{-\epsilon_1(\lambda_3 - r_2)f_{12} + \epsilon_1 \Omega \sin(\Omega \tau)}{(\lambda_3 - r_2)^2 + \Omega^2} \\ & + \exp[-(\lambda_3 - r_1)t] \\ & \times \frac{\epsilon_2(\lambda_3 - r_1)f_{10} - \epsilon_2 \Omega \sin(\Omega \tau)}{(\lambda_3 - r_2)^2 + \Omega^2}, \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_8 = & \exp[-(\lambda_3 - r_2)t] \\ & \times \frac{\epsilon_1(\lambda_3 - r_2) \sin(\Omega \tau) + \epsilon_1 \Omega f_{11}}{(\lambda_3 - r_2)^2 + \Omega^2} \\ & + \exp[-(\lambda_3 - r_1)t] \\ & \times \frac{-\epsilon_2(\lambda_3 - r_1) \sin(\Omega \tau) - \epsilon_2 \Omega f_9}{(\lambda_3 - r_2)^2 + \Omega^2}. \quad (22) \end{aligned}$$

$$f_{9,10} = \cos(\Omega \tau) \pm \exp[(\lambda_3 - r_1)\tau],$$

$$f_{11,12} = \cos(\Omega \tau) \pm \exp[(\lambda_3 - r_2)\tau]. \quad (23)$$

由平均相关函数的定义, 有下列公式成立:

$$\begin{aligned} x(t + \tau)x(t)_{st} = & \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t)x(t + \Omega) dt \\ = & x^2_{st} g(\tau) \exp(-a\tau) \\ & + \frac{A_0^2 \sigma_3^2}{4\lambda_3(\epsilon_1 - \epsilon_2)f_3} \{ \varphi_5 [f_1 \varphi_1(\lambda_3 + \epsilon_2)^2 \\ & - \Omega(\lambda_3 + \epsilon_2) \chi f_1 \varphi_3 + f_2 \varphi_1] \\ & + 2\Omega^2(f_1 \varphi_1 - f_2 \varphi_3) \} + \varphi_6 [f_1 \varphi_2(\lambda_3 + \epsilon_1)^2 \\ & - \Omega(\lambda_3 + \epsilon_1) \chi f_1 \varphi_4 + f_2 \varphi_2] \\ & + 2\Omega^2(f_1 \varphi_2 - f_2 \varphi_4) \} - \alpha f_4 \sigma_3 / \lambda_3(\epsilon_1 - \epsilon_2) \\ & \times \left\{ \frac{r_1 e^{-1}}{a + \lambda_3 + r_2} [1 - \exp\{- (a + \lambda_3 + r_2)\tau\}] \right. \\ & \left. - \frac{r_2 e^{-1}}{a + \lambda_3 + r_1} [1 - \exp\{- (a + \lambda_3 + r_1)\tau\}] \right\}, \quad (24) \end{aligned}$$

其是

$$\varphi_1 = \frac{-\varepsilon_1(\lambda_3 - r_2)f_{12} + \varepsilon_1\Omega\sin(\Omega\tau)}{(\lambda_3 - r_2)^2 + \Omega^2},$$

$$\varphi_2 = \frac{\varepsilon_2(\lambda_3 - r_1)f_{10} - \varepsilon_2\Omega\sin(\Omega\tau)}{(\lambda_3 - r_2)^2 + \Omega^2},$$

$$\varphi_3 = \frac{\varepsilon_1(\lambda_3 - r_2)\sin(\Omega\tau) + \varepsilon_1\Omega f_{11}}{(\lambda_3 - r_2)^2 + \Omega^2},$$

$$\varphi_4 = \frac{-\varepsilon_2(\lambda_3 - r_1)\sin(\Omega\tau) - \varepsilon_2\Omega f_9}{(\lambda_3 - r_2)^2 + \Omega^2},$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{(\lambda_3 + \varepsilon_2)[(\lambda_3 + \varepsilon_2)^2 + 4\Omega^2]},$$

$$\varphi_6 = \frac{1}{(\lambda_3 + \varepsilon_1)[(\lambda_3 + \varepsilon_1)^2 + 4\Omega^2]}.$$

根据定义可知,相应的功率谱函数 $S(\omega)$ 为 (24) 式的傅里叶变换(这里仅取正 ω 的谱来讨论):

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)_{st} \exp(-i\omega\tau) d\tau \\ &= S_0\delta(\omega) + S_1(\omega) + S_2(\omega)\delta(\omega - \Omega) \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$S_0 = \frac{2e^{-1}\pi\alpha f_4\sigma_3}{\lambda_3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \left[\frac{r_2}{a + \lambda_3 + r_1} - \frac{r_1}{a + \lambda_3 + r_2} \right],$$

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= \frac{x^2_{st}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \left[\frac{\varepsilon_2 r_1}{r_1^2 + \omega^2} - \frac{\varepsilon_1 r_2}{r_2^2 + \omega^2} \right] - \frac{A_0^2\sigma_3^2[\varphi_5\varepsilon_1(f_1A_1 + f_2\Omega A_2) + \varphi_6\varepsilon_2(f_1A_3 + f_2\Omega A_4)]}{4\lambda_3 f_3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)[(\lambda_3 - r_2)^2 + \Omega^2]} \\ &\quad + \frac{2e^{-1}\alpha f_4\sigma_3}{\lambda_3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \left[\frac{a + \lambda_3 + r_2}{(a + \lambda_3 + r_2)^2 + \omega^2} - \frac{a + \lambda_3 + r_1}{(a + \lambda_3 + r_1)^2 + \omega^2} \right], \end{aligned} \quad (26)$$

$$S_2(\omega) = \frac{\pi A_0^2\sigma_3^2[\varphi_5\varepsilon_1(f_1B_1 + f_2\Omega B_2) + \varphi_6\varepsilon_2(f_1B_3 + f_2\Omega B_4)]}{4\lambda_3 f_3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)[(\lambda_3 - r_2)^2 + \Omega^2]}, \quad (27)$$

并且有

$$A_1 = \Omega^2(\varepsilon_2 + 2r_2 - \lambda_3)$$

$$+ (\lambda_3 + \varepsilon_2)(r_2 - \lambda_3),$$

$$A_2 = 2\Omega^2 + (\lambda_3 + \varepsilon_2)(-r_2 + \lambda_3),$$

$$A_3 = \Omega^2(-\varepsilon_1 - 2r_1 + \lambda_3)$$

$$+ (\lambda_3 + \varepsilon_1)(-r_1 + \lambda_3),$$

$$A_4 = -2\Omega^2 + (-\lambda_3 + r_1)(\lambda_3 + \varepsilon_1),$$

$$B_1 = \Omega^2(-\varepsilon_2 + 2r_2 + 3\lambda_3) + \varepsilon_2^2(r_2 - \lambda_3)$$

$$+ \lambda_3(\lambda_3 + \varepsilon_2)(r_2 - 2\lambda_3),$$

$$B_2 = -2\Omega^2 + (\lambda_3 + \varepsilon_2)(-r_2 + \lambda_3),$$

$$B_3 = \Omega^2(\varepsilon_1 - 2r_1 + 3\lambda_3) + \varepsilon_1^2(-r_1 + \lambda_3)$$

$$+ \lambda_3(\lambda_3 + 2\varepsilon_1)(-r_1 + \lambda_3),$$

$$B_4 = 2\Omega^2 + (-\lambda_3 + r_1)(\varepsilon_1 + \lambda_3).$$

这里谱 S_0 为在零频率处的功率谱密度, $S_1(\omega)$ 来源于输出噪声, 而 $S_2(\omega)$ 则是来源于输出信号. 那么, 输出信噪比 R 定义为输出总信号功率与 $\omega = \Omega$ 处的单位噪声谱的平均功率之比^[4]:

$$R = \frac{\int_0^{\infty} S_2(\omega)\delta(\omega - \Omega)d\omega}{S_1(\omega = \Omega)}, \quad (28)$$

其中 $S_i(\omega)$ ($i = 1, 2$) 为 (26) (27) 式定义的功率谱函数.

3. 噪声和信号对系统信噪比的影响

利用信噪比的表达式 (28), 讨论信噪比受噪声和信号的影响.

图 1 是根据 (28) 式以乘性噪声的非对称性 Δ_1 为参数画出的 $R-\Omega$ 曲线. R 随 Ω 的增大出现一个共振峰, 故出现了频率调制的随机共振, 即真正的随机共振. 当 $\Omega < 0.84$ 时, 随着 Δ_1 的增加, R 的峰值逐渐降低. 当 $\Omega > 0.84$ 时, 随着 Δ_1 的增加, R 的值

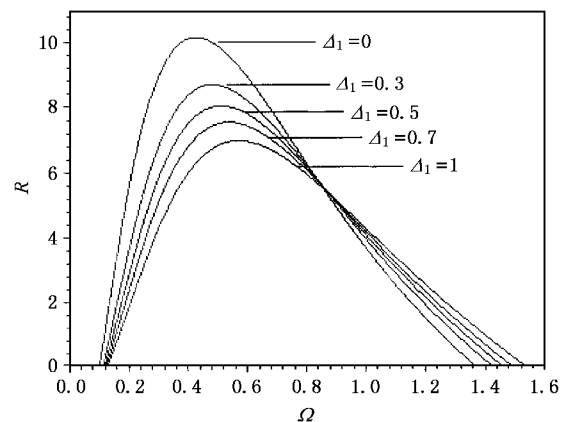


图 1 信噪比 R 作为频率 Ω 的函数随乘性噪声非对称性 Δ_1 变化的曲线 ($a = 2, A = 1, \rho_1 = \rho_3 = 1, \rho_2 = 2, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \Delta_2 = 1$)

逐渐增加,同时,峰值位置右移. 因此,存在一个临界频率 Ω_0 , 当 $\Omega > \Omega_0$ 时, Δ_1 增加输出的 R , 当 $\Omega < \Omega_0$ 时, Δ_1 减小输出的 R .

图 2 是以 Δ_1 为参数画出的 $R-\sigma_1$ 曲线. 由图 2 可以看出, R 为乘性噪声强度 σ_1 的非单调函数, 通过调节 σ_1 的大小, 信噪比曲线上有最大值出现. 因此, 在该系统中观察到了传统的随机共振现象, 而在信号和噪声以相加的方式引入的线性系统^[12]中是观察不到该现象的. 并且随着 Δ_1 的增加, R 增大, 这是由于在图 2 中, 令 $\Omega = 1 (> 0.84)$, 这与图 1 中出现的现象是一致的.

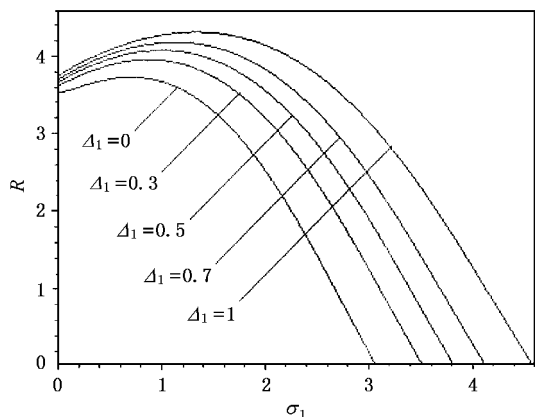


图 2 信噪比 R 作为乘性噪声强度 σ_1 的函数随乘性非对称性 Δ_1 变化的曲线 ($a=2, A=1, \Omega=1, \sigma_2=2, \sigma_3=1, \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1, \Delta_2=1$)

图 3 是以 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 之间的关联噪声强度 σ_3 为参数画出的 $R-\Omega$ 曲线. R 随着 σ_3 的增大而增大, 但是随着 σ_3 的增加, R 每次增加的量都在减少. 图

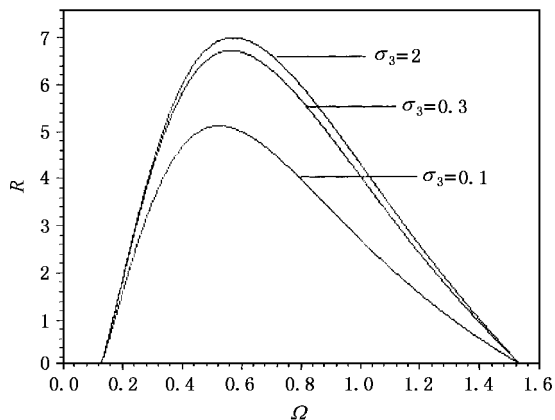


图 3 信噪比 R 作为频率 Ω 的函数随噪声关联强度 σ_3 变化的曲线 ($a=2, A=1, \sigma_1=1, \sigma_2=2, \Delta_1=1, \Delta_2=1, \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$)

4 是以 σ_3 为参数画出的 $R-\tau_1$ 曲线. $R-\tau_1$ 曲线上有一个共振峰, R 是 τ_1 的非单调函数, 出现了广义的随机共振^[12]. 由图 3 和 4 可知, 在 σ_3 不是很大的情况下, 可以通过增大 σ_3 来增强输出的 R .

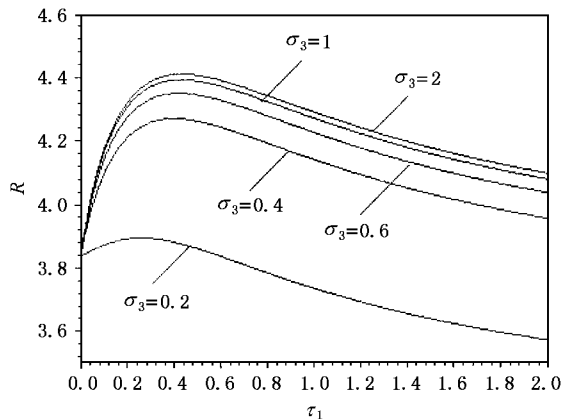


图 4 信噪比 R 作为乘性噪声相关时间 τ_1 的函数随噪声关联强度 σ_3 变化的曲线 ($a=2, A=1, \Omega=1, \sigma_1=1, \sigma_2=2, \lambda_2=\lambda_3=1, \Delta_1=\Delta_2=1$)

图 5 是以加性噪声强度 σ_2 为参数画出的 $R-\tau_1$ 曲线. 在固定 σ_1 和 σ_3 之后, 随着 σ_2 的增加, R 逐渐减小, 故加性噪声能够减弱系统输出的信噪比. 因此, 乘性噪声和加性噪声对信噪比的影响是不同的.

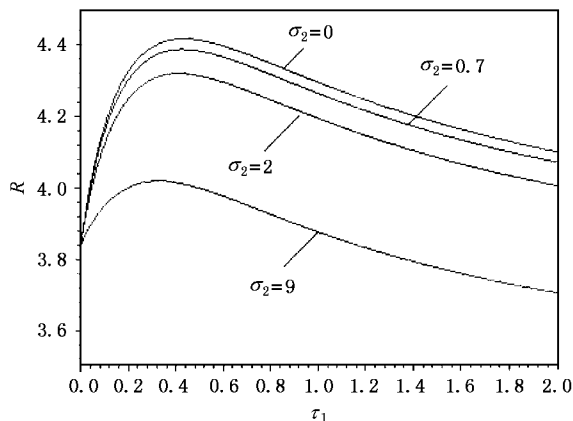


图 5 信噪比 R 作为乘性噪声相关时间 τ_1 的函数随加性噪声强度 σ_2 变化的曲线 ($a=2, A=1, \Omega=1, \sigma_1=1, \sigma_3=0.5, \Delta_1=1, \Delta_2=1, \lambda_2=\lambda_3=1$)

4. 结 论

通过研究信号和噪声对具有偏置信号调制噪声的过阻尼线性系统的信噪比的影响, 可得如下结论:

$R-\sigma_1$ 曲线上有共振峰出现,即观察到了传统的随机共振,这是在噪声和信号以相加方式引入的线性系统^[12]中没有的现象. 同时在 $R-\Omega$ 曲线上有最大值出现,即出现了频率调制的随机共振,也称为真正的随机共振. 在由直接信号调制的噪声驱动的线性系统中, $R-\tau_1$ 的变化曲线上同时出现了共振和抑制现

象^[13,16],而在偏置信号调制的噪声驱动的过阻尼线性系统中, $R-\tau_1$ 的变化曲线上仅出现了共振现象,抑制现象消失了. 此外,存在一个临界的输入信号频率 Ω_0 ,当 $\Omega > \Omega_0$ 时, R 随着 Δ_1 的增加而增大;反之, R 随着 Δ_1 的增加而减小. 并且可以通过增加 σ_3 来增强输出的 R ,但是 R 却随着 σ_2 的增加而减小.

- [1] Benzi R , Suter A and Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** L453
- [2] Fauve S and Heslot F 1983 *Phys. Lett. A* **97** 5
- [3] Hu G Nicolis G and Nicolis C 1990 *Phys. Rev. A* **42** 2030
- [4] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡 岗 1994 随机力和非线性系统(上海科技教育出版社)]
- [5] Gammaitoni L , Hänggi P , Jung P and Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [6] Luo X Q *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 977 (in Chinese) [罗晓琴等 2002 物理学报 **51** 977]
- [7] Kang Y M *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 802 (in Chinese) [康艳梅等 2003 物理学报 **52** 802]
- [8] Luo X Q and Zhu S Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1201
- [9] Luo X Q and Zhu S Q 2003 *Phys. Rev. E* **67** 021104
- [10] Collins J J , Chow C C , Capela A C and Imhoff T T 1996 *Phys. Rev. E* **54** 5575
- [11] Berdichevsky V and Gitterman M 1996 *Europhys. Lett.* **36** 161
- [12] Berdichevsky V and Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
- [13] Jin Y F , Xu W , Li W *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2562 (in Chinese) [靳艳飞、徐 伟、李 伟等 2005 物理学报 **54** 2562]
- [14] Dykman M I , Luchinsky D G , McClintock P V E and Stein N D 1992 *Phys. Rev. A* **46** R1713
- [15] Wang J , Cao L and Wu D J 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1217
- [16] Cheng Q H , Cao L and Wu D J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2556 (in Chinese) [程庆华、曹 力、吴大进 2004 物理学报 **53** 2556]
- [17] Han L B *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2127 (in Chinese) [韩立波等 2004 物理学报 **53** 2127]
- [18] Wang J , Cao L and Wu D J 2004 *Chin. Phys.* **13** 1811
- [19] Huang D X and Liu X F 1999 *Semiconductor Lasers and Their Applications* (Beijing : National Industry Publishing House) (in Chinese) [黄德修、刘雪峰 1999 半导体激光器及其应用(北京:国防工业出版社)]
- [20] Shapiro V E and Loginov V M 1978 *Physica A* **91** 563
- [21] Fuliński A 1995 *Phys. Rev. E* **52** 4523

Stochastic resonance for bias-signal-modulated noise in a linear system *

Xu Wei¹⁾ Jin Yan-Fei¹⁾²⁾ Xu Meng³⁾ Li Wei¹⁾

¹⁾Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

²⁾Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

³⁾Department of Automatic, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 15 March 2005 ; revised manuscript received 25 April 2005)

Abstract

The stochastic resonance (SR) is studied in an overdamped linear system when the bias-signal-modulated noise is introduced. The exact expressions of the first two moments and signal-to-noise ratio (SNR) are obtained when we introduce the asymmetric dichotomous noise into the system. We find that the system has three different forms of SR: the conventional SR, the *bona fide* SR and SR in the broad sense. Moreover, the additive noise weakens the SNR of the linear system while the cross-correlation enhances the SNR and improves the output signal.

Keywords : stochastic resonance, signal-to-noise ratio, bias-signal-modulated noise, dichotomous noise

PACC : 0540