第 54 卷 第 11 期 2005 年 11 月
1000-3290/2005/54(11)/5139-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.11,November,2005

一种求解任意入射波束的波束因子的方法*

韩一平

(西安电子科技大学理学院应用物理系,西安 710071)

(2005 年 2 月 5 日收到;2005 年 4 月 26 日收到修改稿)

提出了一种将任意入射波束因子用矢量波函数展开的方法,根据波束在球坐标系中的展开形式,以及球谐矢量函数与非球坐标系的波矢量函数之间的关系,推导出任意入射波束在相应坐标系中的波束因子的理论表述形式.以椭球坐标系为例,介绍了将离轴的入射波束,用椭球矢量波函数展开的波束因子求解方法,此方法还可应用于柱坐标、椭柱坐标系中波束因子的求解,为研究粒子对任意入射波束的散射打下了基础.

关键词:波束因子,广义米理论,光散射

PACC:4110H,4225F,4262

1. 引 言

随着科学技术的发展,计算和研究粒子的光散射特性的要求越来越广泛和迫切.例如,通过激光诊断燃烧过程中粒子的特性,由此分析燃烧机理,指导燃烧器的设计,改进燃烧效率;在大气环境科学中大气中的悬浮粒子、雨滴、冰晶的光散射特性,可用于通讯、雷达遥感、测距和探测目标等研究.在环境科学中,光的谱散射和吸收应用于探测大气中的特定污染物,也可通过大气悬浮微粒对光波的散射的测量而监测大气污染.激光雷达已成为环境监测的主要手段之一.激光在大气和各类复杂介质中传输和粒度分析的研究又促进了激光在这些应用领域中的开拓和改进.

随着激光技术的发展,在许多实验中都采用激光作为光源,因此研究粒子对高斯光的散射是近几年的研究热点.采用广义米理论,通过分离变量法,可以研究具有对称性粒子在高斯波的照射下,电磁场方程的精确解,然而应用此方法的最关键之处就是如何将入射波束在相应的坐标系中展开.Davis 在 1979 年提出了将高斯波束用平面波角谱的展开形式[1].1980 年 Gouesbet,Gréhan 等人[2,3]根据 Davis 的结果,利用 Bromwich 公式深入了波束对均匀球的远区散射,给出了在轴的球形粒子对高斯光束的散射的一种级数计算方法,以及高斯波束在球坐标系中的展开系数的三种计算方法.本课题组提出了一种在轴入射的高斯波束用矢量波函数展开的方法,它可以借助已有的高斯光在球坐标系中的波束因子,方便的计算出高斯光在其他坐标系中的波束因子[4,5].

本文将以上方法扩展,给出离轴入射的任意波束的波束因子的求解方法,以椭球坐标系为例,介绍了将离轴的入射波束,用椭球矢量波函数展开的波束因子 $G_{n,\mathrm{TE}}^{m}$,$G_{n,\mathrm{TM}}^{m}$ 的理论表述形式.此方法还可应用于柱坐标、椭柱坐标系中波束因子的求解.本文还给出了在球坐标系中,不同模式取值范围的波束因子之间的关系.

2. 理论推导

2.1. 入射波束在椭球坐标系和球坐标系中的展开

我们考虑入射波束中心位于坐标系 $O'x'y'z'$ 的 O' 点处,波束沿 z' 轴传播,粒子位于坐标系 $Oxyz$ 的原点处,长轴与 $O'z'$ 轴平行,坐标轴 Ox 平行于 $O'x'$,其他各轴也相互平行,$O'x'y'z'$ 坐标原点 O' 在 $Oxyz$ 坐标系中的坐标是 (x_0, y_0, z_0),我们定义 z 轴和入射波传播的方向所确定的平面为入射平面.电磁场依赖于时间因子的部分是 $\exp(\mathrm{i}\omega t)$.

对高斯波束在球坐标系中的展开系数的确定在

* 国家自然科学基金(批准号:60371019)、教育部优秀青年教师资助计划项目资助的课题.

国外已有不少文献[2,3]，他们的思路是将入射电磁波在球坐标中展开，通过比较高斯波束在球坐标系中的各个分量，并根据球贝塞尔函数和连带勒让德函数的正交性，确定展开系数，如果将这种思路用于高斯波束在椭球坐标系中的展开，由于椭球矢量波函数 $M^{r(i)}_{\substack{e\\o}mn}(c;\eta,\zeta,\varphi)$，$N^{r(i)}_{\substack{e\\o}mn}(c;\eta,\zeta,\varphi)$ 十分复杂，在理论的推导上存在着许多困难. 在这里，我们提出一种较为巧妙的方法解决了高斯波束在椭球坐标系中的展开. 首先将入射波束用球矢量波函数 $\boldsymbol{m}^{r(i)}_{\substack{e\\o}mn}(r,\theta,\phi)$，$\boldsymbol{n}^{r(i)}_{\substack{e\\o}mn}(r,\theta,\phi)$，展开(TE 模式)[2]

$$\boldsymbol{E}^i = E_p\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\left[g^m_{n,\mathrm{TE}}(c)\,\boldsymbol{m}^{r(1)}_{emn}(r,\theta,\phi) + \mathrm{i}g^m_{n,\mathrm{TM}}(c)\,\boldsymbol{n}^{r(1)}_{omn}(r,\theta,\phi)\right], \tag{1}$$

这里 $g^m_{n,\mathrm{TM}}$，$g^m_{n,\mathrm{TE}}$ 是入射波束在球坐标系中的波束因子. 球矢量波函数为[6]

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{m}^{r(i)}_{\substack{e\\o}mn}(r,\theta,\phi)\\
&= \mp\frac{m}{\sin\theta}z_n(kr)P^m_n(\cos\theta)^{\sin m\phi}_{\cos m\phi}\boldsymbol{e}_\theta\\
&\quad - z_n(kr)\frac{\partial P^m_n(\cos\theta)}{\partial\theta}{}^{\cos m\phi}_{\sin m\phi}\boldsymbol{e}_\phi,\\
&\boldsymbol{n}^{r(i)}_{\substack{e\\o}mn}(r,\theta,\phi)\\
&= \frac{n(n+1)}{kr}z_n(kr)P^m_n(\cos\theta)^{\cos m\phi}_{\sin m\phi}\boldsymbol{e}_r\\
&\quad + \frac{1\partial}{kr\partial r}[rz_n(kr)]\frac{\partial P^m_n(\cos\theta)}{\partial\theta}{}^{\cos m\phi}_{\sin m\phi}\boldsymbol{e}_\theta\\
&\quad \mp\frac{m}{kr\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}[rz_n(kr)]P^m_n(\cos\theta)^{\sin m\phi}_{\cos m\phi}\boldsymbol{e}_\phi,
\end{aligned}$$

$P^m_n(\cos\theta)$ 是连带勒让德函数，对应于 $i=1,2,3,4$，$z_n(kr)$ 分别是第一、二类球 Bessel，Neumann 和 Hankel 函数.

在广义米理论中，入射波束可以在球坐标系中用平面波展开，波束系数 $\tilde{g}^m_{n,\mathrm{TM}}$，$\tilde{g}^m_{n,\mathrm{TE}}$ 可采用局域近似法、积分法以及级数法表示[8]. 采用局域近似方法，入射波束用球矢量波函数可表示为[9](TE 模式)

$$\boldsymbol{E}^i = E_0\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_n\left[\mathrm{i}\tilde{g}^m_{n,\mathrm{TE}}(c)\,\boldsymbol{m}^{r(1)}_{mn}(r,\theta,\phi) + \tilde{g}^m_{n,\mathrm{TM}}(c)\,\boldsymbol{n}^{r(1)}_{mn}(r,\theta,\phi)\right], \tag{2}$$

其中

$$C_n = \mathrm{i}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}^m_{n,\mathrm{TM}} &= \exp(\mathrm{i}kz_0)\,\mathrm{i}\bar{Q}\exp\left(-\mathrm{i}\bar{Q}\left(\frac{\rho_n}{w_0}\right)^2\right)\\
&\quad\times\exp\left(-\mathrm{i}\bar{Q}\frac{x_0^2+y_0^2}{w_0^2}\right)\\
&\quad\times\frac{1}{2}\left(\sum_{j_+=m}^{jp}\Psi_{jp}+\sum_{j_-=m}^{jp}\Psi_{jp}\right),
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}^m_{n,\mathrm{TE}} &= \exp(\mathrm{i}kz_0)\,\mathrm{i}\bar{Q}\exp\left(-\mathrm{i}\bar{Q}\left(\frac{\rho_n}{w_0}\right)^2\right)\\
&\quad\times\exp\left(-\mathrm{i}\bar{Q}\frac{x_0^2+y_0^2}{w_0^2}\right)\\
&\quad\times\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\sum_{j_+=m}^{jp}\Psi_{jp}-\sum_{j_-=m}^{jp}\Psi_{jp}\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\rho_n = \frac{(n+1/2)}{2\pi}\lambda, \tag{6}$$

$$\bar{Q} = \frac{1}{\mathrm{i}-\dfrac{2z_0}{l}}, \tag{7}$$

$$\Psi = \left(\frac{\mathrm{i}\bar{Q}\rho_n}{w_0^2}\right)^j\frac{(x_0-\mathrm{i}y_0)^{j-p}(x_0+\mathrm{i}y_0)^p}{(j-p)!\,p!}, \tag{8}$$

$$\sum^{jp} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{j}, \tag{9}$$

$$j_+ = j+1-2p, \tag{10}$$

$$j_- = j-1-2p, \tag{11}$$

而 w_0 是束腰半径，l 是传播长度，k 是入射光的波束.

2.2. 在球坐标系中，不同模式范围的波束因子的转换关系

注意到在方程(2)求和中，m，n 的取值范围与方程(1)不同，下面我们推导出方程(1)与方程(2)中波束因子的相互转换的关系.

由于 $m=0$，$n=0$，$C_0=0$，方程(2)可以写成

$$\boldsymbol{E}^i = E_0\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=|m|}^{\infty}C_n\left[\mathrm{i}\tilde{g}^m_{n,\mathrm{TE}}(c)\,\boldsymbol{m}^{r(1)}_{mn}(r,\theta,\phi) + \tilde{g}^m_{n,\mathrm{TM}}(c)\,\boldsymbol{n}^{r(1)}_{mn}(r,\theta,\phi)\right]. \tag{12}$$

根据勒让德和球矢量波函数的特性

$$P^{-m}_n(\cos\theta) = (-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P^m_n(\cos\theta), \tag{13}$$

$$\boldsymbol{m}^{r(1)}_{e(-m)n} = (-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\boldsymbol{m}^{r(1)}_{emn}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{m}^{r(1)}_{o(-m)n} = (-1)^{m+1}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\boldsymbol{m}^{r(1)}_{omn}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{n}^{r(1)}_{e(-m)n} = (-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\boldsymbol{n}^{r(1)}_{emn}, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{n}^{r(1)}_{o(-m)n} = (-1)^{m+1}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\boldsymbol{n}^{r(1)}_{omn}, \tag{17}$$

和

$$\boldsymbol{m}_{mn}^{r(1)} = \boldsymbol{m}_{emn}^{r(1)} + \mathrm{i}\boldsymbol{m}_{omn}^{r(1)}, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{n}_{mn}^{r(1)} = \boldsymbol{n}_{emn}^{r(1)} + \mathrm{i}\boldsymbol{n}_{omn}^{r(1)}. \tag{19}$$

我们可以得到

$$\tilde{g}_{n,\mathrm{TE}}^{-m} = (-1)^m \frac{(m+n)!}{(m-n)!}\tilde{g}_{n,\mathrm{TE}}^{m}, \tag{20}$$

$$\tilde{g}_{n,\mathrm{TM}}^{-m} = (-1)^{m+1} \frac{(m+n)!}{(m-n)!}\tilde{g}_{n,\mathrm{TM}}^{m}. \tag{21}$$

故方程(12)可以写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^i &= E_0\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}C_n \\ &\times [\mathrm{i}(2-\delta_{0m})\tilde{g}_{n,\mathrm{TE}}^{m}(c)\boldsymbol{m}_{emn}^{r(1)}(r,\theta,\phi) \\ &+ 2i\tilde{g}_{n,\mathrm{TM}}^{m}(c)\boldsymbol{n}_{omn}^{r(1)}(r,\theta,\phi)].\end{aligned} \tag{22}$$

比较方程(22)和方程(1),可以得到 $g_{n,\mathrm{TM}}^m$, $g_{n,\mathrm{TE}}^m$ 系数与 $\tilde{g}_{n,\mathrm{TM}}^{m}$, $\tilde{g}_{n,\mathrm{TE}}^{m}$ 系数的关系为

$$g_{n,\mathrm{TE}}^m = \mathrm{i}C_n\tilde{g}_{n\mathrm{TE}}^{m}(2-\delta_{0m}), \tag{23}$$

$$g_{n,\mathrm{TM}}^m = 2C_n\tilde{g}_{n\mathrm{TM}}^{m}, \tag{24}$$

其中 δ_{0m} 是 Kronecker delta 函数.

2.3. 椭球坐标系中,波束因子的表达形式

借助球波函数 $P_n^m(\cos\theta)j_n(kr)$ 用椭球波函数 $S_{ml}(c,\eta)R_{ml}^{(1)}(c,\zeta)$ 表示式[10]

$$P_n^m(\cos\theta)j_n(kr) = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\sum_{l=m,m+1}^{\infty}{}' \frac{\mathrm{i}^{l-n}}{N_{ml}} \times d_{n-m}^{ml}S_{ml}(c,\eta)R_{ml}^{(1)}(c,\zeta), \tag{25}$$

式中 d_{n-m}^{ml} 是椭球角波函数 $S_{ml}(c,\eta)$ 用第一类连带勒让德函数 $P_n^m(\cos\theta)$ 展开的系数,可以通过递推公式得到[4].我们可以将球矢量波函数 $\boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}nm}^{r(1)}(r,\theta,\phi)$, $\boldsymbol{n}_{\substack{e\\o}nm}^{r(1)}(r,\theta,\phi)$ 转化为椭球矢量波函数 $\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}ml}^{r(1)}(c,\zeta,\eta,\phi)$, $\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}ml}^{r(1)}(c,\zeta,\eta,\phi)$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{m}_{\substack{e\\o}mn}^{r(1)}(r,\theta,\phi) \\ &= \sum_{l=m,m+1}^{\infty}{}' \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\frac{\mathrm{i}^{l-n}}{N_{ml}} \\ &\times d_{n-m}^{ml}[\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}ml\xi}^{r(1)}(c,\zeta,\eta,\phi)\boldsymbol{a}_\zeta \\ &+ \boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}ml\eta}^{r(1)}(c,\zeta,\eta,\phi)\boldsymbol{a}_\eta \\ &+ \boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}ml\phi}^{r(1)}(c,\zeta,\eta,\phi)\boldsymbol{a}_\phi] \\ &= \sum_{l=m,m+1}^{\infty}{}' \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\frac{\mathrm{i}^{l-n}}{N_{ml}} \\ &\times d_{n-m}^{ml}\boldsymbol{M}_{\substack{e\\o}ml}^{r(1)}(c,\zeta,\eta,\phi),\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{n}_{\substack{e\\o}mn}^{r(1)}(r,\theta,\phi) \\ &= \sum_{l=m,m+1}^{\infty}{}' \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\frac{\mathrm{i}^{l-n}}{N_{ml}} \\ &\times d_{n-m}^{ml}[\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}ml\xi}^{r(1)}(c,\zeta,\eta,\phi)\boldsymbol{a}_\zeta \\ &+ \boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}ml\eta}^{r(1)}(c,\zeta,\eta,\phi)\boldsymbol{a}_\eta \\ &+ \boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}ml\phi}^{r(1)}(c,\zeta,\eta,\phi)\boldsymbol{a}_\phi] \\ &= \sum_{l=m,m+1}^{\infty}{}' \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\frac{\mathrm{i}^{l-n}}{N_{ml}} \\ &\times d_{n-m}^{ml}\boldsymbol{N}_{\substack{e\\o}ml}^{r(1)}(c,\zeta,\eta,\phi).\end{aligned} \tag{27}$$

由此得到入射波束按矢量椭球波函数 $M_{\substack{e\\o}mn}^{r}(c,\eta,\zeta,\phi)$, $N_{\substack{e\\o}mn}^{r}(c,\eta,\zeta,\phi)$ 展开的表达形式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^i &= E_0\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\mathrm{i}^n[G_{n,\mathrm{TE}}^m(c)M_{emn}^{r(1)}(c,\zeta,\eta,\phi) \\ &+ \mathrm{i}G_{n,\mathrm{TM}}^m(c)N_{omn}^{r(1)}(c,\zeta,\eta,\phi)] \\ &(\mathrm{TE}\ 模式),\end{aligned} \tag{28}$$

故在椭球坐标系中的波束因子可以表示为

$$G_{n,\mathrm{TE}}^m = \mathrm{i}^{-m}N_{mn}^{-1}\sum_{r=0,1}^{\infty}{}' \frac{2(r+2m)!}{(2r+2m+1)r!} \times \mathrm{i}^{-r}d_r^{mn}g_{r+m,\mathrm{TE}}^m, \tag{29}$$

$$G_{n,\mathrm{TM}}^m = \mathrm{i}^{-m}N_{mn}^{-1}\sum_{r=0,1}^{\infty}{}' \frac{2(r+2m)!}{(2r+2m+1)r!} \times \mathrm{i}^{-r}d_r^{mn}g_{r+m,\mathrm{TE}}^m, \tag{30}$$

其中 $N_{nm}(c)$ 是椭球角函数 $S_{mn}(c,\eta)$ 的归一化常数[10],

$$N_{mn} = \sum_{r=0,1}^{\infty}{}' \frac{2(r+2m)!}{(2r+2m+1)r!}(d_r^{mn})^2, \tag{31}$$

而 $d_r^{mn}(c)$ 是椭球展开系数.将方程(23),(24)代入,波束因子 $G_{n,\mathrm{TE}}^m$, $G_{n,\mathrm{TM}}^m$ 还可以采用 $\tilde{g}_{n,\mathrm{TE}}^{m}$, $\tilde{g}_{n,\mathrm{TM}}^{m}$ 系数表示

$$\begin{aligned}G_{n,\mathrm{TE}}^m &= \frac{\mathrm{i}^{-m}}{N_{mn}}\sum_{r=0,1}^{\infty}{}' \frac{2(r+2m)!}{(2r+2m+1)r!} \times \mathrm{i}^{-r}d_r^{mn}g_{r+m,\mathrm{TE}}^m(c) \\ &= \frac{\mathrm{i}(2-\delta_{0m})}{N_{mn}}\sum_{r=0,1}^{\infty}{}' \frac{2(r+2m)!}{(r+m)(r+m+1)r!} \times d_r^{mn}\tilde{g}_{r+m,\mathrm{TE}}^{m}(c),\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}G_{n,\mathrm{TM}}^m &= \frac{\mathrm{i}^{-m}}{N_{mn}}\sum_{r=0,1}^{\infty}{}' \frac{2(r+2m)!}{(2r+2m+1)r!} \times \mathrm{i}^{-r}d_r^{mn}g_{r+m,\mathrm{TM}}^m(c) \\ &= \frac{2}{N_{mn}}\sum_{r=0,1}^{\infty}{}' \frac{2(r+2m)!}{(r+m)(r+m+1)r!} \times d_r^{mn}\tilde{g}_{r+m,\mathrm{TM}}^{m}(c).\end{aligned} \tag{33}$$

如果入射波束是正入射,即波束的束腰中心位于粒子中心,所有 $m\neq 1$ 的波束系数都为零,可以得到

$$G_{n,\mathrm{TE}}=\frac{\mathrm{i}^{-1}}{N_{1n}}\sum_{r=0,1}^{\infty}{}'\frac{2(r+2)!}{(2r+3)r!}\mathrm{i}^{-r}d_r^{1n}g_{r+1,\mathrm{TE}}(c)$$

$$=\frac{4\mathrm{i}}{N_{1n}}\sum_{r=0,1}^{\infty}{}'d_r^{1n}\tilde{g}_{r+1,\mathrm{TE}}(c),\tag{34}$$

$$G_{n,\mathrm{TM}}=\frac{\mathrm{i}^{-1}}{N_{1n}}\sum_{r=0,1}^{\infty}{}'\frac{2(r+2)!}{(2r+3)r!}\mathrm{i}^{-r}d_r^{1n}g_{r+m,\mathrm{TM}}(c)$$

$$=\frac{4}{N_{1n}}\sum_{r=0,1}^{\infty}{}'d_r^{1n}\tilde{g}_{r+m,\mathrm{TM}}(c).\tag{35}$$

根据以上所得到的波束因子,入射场、散射场、内场就可以如下表示[4—6,10—12]:

TE 模式

入射场

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{TE}}^{\mathrm{i}}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\mathrm{i}^n\left[G_{n,\mathrm{TE}}^m\boldsymbol{M}_{emn}^{r(1)}(c^{(\mathrm{I})},\zeta,\eta,\phi)+\mathrm{i}G_{n,\mathrm{TM}}^m\boldsymbol{N}_{omn}^{r(1)}(c^{(\mathrm{I})},\zeta,\eta,\phi)\right],\tag{36}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{TE}}^{\mathrm{i}}=\frac{k_1}{\omega\mu_1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\mathrm{i}^n\left[G_{n,\mathrm{TM}}^m\boldsymbol{M}_{omn}^{r(1)}(c^{(\mathrm{I})},\zeta,\eta,\phi)-\mathrm{i}G_{n,\mathrm{TE}}^m\boldsymbol{N}_{emn}^{r(1)}(c^{(\mathrm{I})},\zeta,\eta,\phi)\right].\tag{37}$$

内场

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{TE}}^{\mathrm{w}}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\mathrm{i}^n\left[\delta_{n,\mathrm{TE}}^m\boldsymbol{M}_{emn}^{r(1)}(c^{(\mathrm{II})},\zeta,\eta,\phi)+\mathrm{i}\gamma_{n,\mathrm{TE}}^m\boldsymbol{N}_{omn}^{r(1)}(c^{(\mathrm{II})},\zeta,\eta,\phi)\right],\tag{38}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{TE}}^{\mathrm{w}}=\frac{k_2}{\omega\mu_2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\mathrm{i}^n\left[\gamma_{n,\mathrm{TE}}^m\boldsymbol{M}_{omn}^{r(1)}(c^{(\mathrm{II})},\zeta,\eta,\phi)-\mathrm{i}\delta_{n,\mathrm{TE}}^m\boldsymbol{N}_{emn}^{r(1)}(c^{(\mathrm{II})},\zeta,\eta,\phi)\right].\tag{39}$$

散射场

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{TE}}^{\mathrm{s}}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\mathrm{i}^n\left[\beta_{n,\mathrm{TE}}^m\boldsymbol{M}_{emn}^{r(3)}(c^{(\mathrm{I})},\zeta,\eta,\phi)+\mathrm{i}\alpha_{n,\mathrm{TE}}^m\boldsymbol{N}_{omn}^{r(3)}(c^{(\mathrm{I})},\zeta,\eta,\phi)\right],\tag{40}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{TE}}^{\mathrm{s}}=\frac{k_1}{\omega\mu_1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\mathrm{i}^n\left[\alpha_{n,\mathrm{TE}}^m\boldsymbol{M}_{omn}^{r(3)}(c^{(\mathrm{I})},\zeta,\eta,\phi)-\mathrm{i}\beta_{n,\mathrm{TE}}^m\boldsymbol{N}_{emn}^{r(3)}(c^{(\mathrm{I})},\zeta,\eta,\phi)\right].\tag{41}$$

TM 模式

入射场

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{TM}}^{\mathrm{i}}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\mathrm{i}^n\left[G_{n,\mathrm{TM}}^m\boldsymbol{M}_{omn}^{r(1)}(c^{(\mathrm{I})},\zeta,\eta,\phi)-\mathrm{i}G_{n,\mathrm{TE}}^m\boldsymbol{N}_{emn}^{r(1)}(c^{(\mathrm{I})},\zeta,\eta,\phi)\right],\tag{42}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{TM}}^{\mathrm{i}}=-\frac{k_1}{\omega\mu_1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\mathrm{i}^n\left[G_{n,\mathrm{TE}}^m\boldsymbol{M}_{emn}^{r(1)}(c^{(\mathrm{I})},\zeta,\eta,\phi)+\mathrm{i}G_{n,\mathrm{TM}}^m\boldsymbol{N}_{omn}^{r(1)}(c^{(\mathrm{I})},\zeta,\eta,\phi)\right].\tag{43}$$

内场

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{TM}}^{\mathrm{w}}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\mathrm{i}^n\left[\gamma_{n,\mathrm{TM}}^m\boldsymbol{M}_{omn}^{r(1)}(c^{(\mathrm{II})},\zeta,\eta,\phi)-\mathrm{i}\delta_{n,\mathrm{TM}}^m\boldsymbol{N}_{emn}^{r(1)}(c^{(\mathrm{II})},\zeta,\eta,\phi)\right],\tag{44}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{TM}}^{\mathrm{w}}=-\frac{k_2}{\omega\mu_2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\mathrm{i}^n\left[\delta_{n,\mathrm{TM}}^m\boldsymbol{M}_{emn}^{r(1)}(c^{(\mathrm{II})},\zeta,\eta,\phi)+\mathrm{i}\gamma_{n,\mathrm{TM}}^m\boldsymbol{N}_{omn}^{r(1)}(c^{(\mathrm{II})},\zeta,\eta,\phi)\right].\tag{45}$$

散射

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{TM}}^{\mathrm{s}}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\mathrm{i}^n\left[\alpha_{n,\mathrm{TM}}^m\boldsymbol{M}_{omn}^{r(3)}(c^{(\mathrm{I})},\zeta,\eta,\phi)-\mathrm{i}\beta_{n,\mathrm{TM}}^m\boldsymbol{N}_{emn}^{r(3)}(c^{(\mathrm{I})},\zeta,\eta,\phi)\right],\tag{46}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{TM}}^{\mathrm{s}}=-\frac{k_1}{\omega\mu_1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\mathrm{i}^n\left[\beta_{n,\mathrm{TM}}^m\boldsymbol{M}_{emn}^{r(3)}(c^{(\mathrm{I})},\zeta,\eta,\phi)+\mathrm{i}\alpha_{n,\mathrm{TM}}^m\boldsymbol{N}_{omn}^{r(3)}(c^{(\mathrm{I})},\zeta,\eta,\phi)\right].\tag{47}$$

未知系数(α_n^m,β_n^m,γ_n^m,δ_n^m)可以通过边界条件得到[5,13].由此就可以得到任意波束对粒子的散射场和内场.

3.结　论

波束在非球形坐标系的展开,由于一些坐标系的矢量波函数十分复杂,如果按照将平面波角谱形式展为球函数的传统展开方法,理论推导的工作量极大,甚至是不可能的.本文提出了一种将波束因子用矢量波函数展开的方法,根据波束在球坐标系中的展开形式,找出球谐矢量函数与其他矢量波函数之间的关系,经过相应的推导确定波束因子的理论表达形式.因此,任意入射波束在相应坐标系中的波束因子可以很方便通过其在球坐标系中的波束因子计算出来.本文以椭球坐标系为例,介绍了将离轴的入射波束,用椭球矢量波函数展开的波束因子,讨论了波束沿 z 轴入射,且高斯波束的束腰中心位于椭球粒子的中心处,波束因子的表达形式.并给出了不同模式取值范围的波束因子之间的关系.根据所得到的波束因子,通过边界条件可以求出任意波束对粒子的散射场和内场.

[1] Davis L W 1979 *Phys*. *Rev*. A **19** 1177

[2] Gouesbet G, Maheu B and Gréhan G 1988 *J*. *Opt*. *Soc*. *Am*. A **5** 1427

[3] Gouesbet G 1997 *Appl*. *Opt*. **36** 4292

[4] Han Y and Wu Z S 2001 *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **49** 615

[5] Han Y and Wu Z S 2001 *Appl*. *Opt*. **40** 2501

[6] Stratton J A 1941 *Electromagnetic Theory* (New York: McGraw-Hill Book Company) Chap 3

[7] Asano S and Yamamoto G 1975 *Appl*. *Opt*. **14** 29

[8] Gouesbet G, Grehan G and Maheu B 1988 *Appl*. *Opt*. **27** 4874

[9] Ren K F, Grehan G and Gouesbet G 1992 *Particle & Particle Systems Characterization* **9** 144

[10] Flammer C 1957 *Spheroidal wave functions* (Stanford University Press, Stanford, California) Chap 2

[11] Li S H, Liu B C *et al* 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 856

[12] Chang M and Jin Y Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 74 (in Chinese) [**常梅、金亚秋** 2002 **物理学报 51** 74]

[13] Han Y P and Wu Z S 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 57 (in Chinese) [**韩一平、吴振森** 2000 **物理学报 49** 57]

An approach to expand the beam coefficients for arbitrarily shaped beam*

Han Yi-Ping

(*Department of Applied Physics*, *School of Science*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *China*)

(Received 5 February 2005; revised manuscript received 26 April 2005)

Abstract

We present an approach to expand the shaped beam in terms of the spheroidal wavefunctions in spheroidal coordinates for a spheroidal particle illuminated by off-axis arbitrarily shaped beam. The relations between shaped beam coefficients in spherical coordinates and the different range of mode are discussed. Once the beam-shape coefficients are determined, the solution of scattering for arbitrarily shaped beam by a homogeneous particle can be obtained.

Keywords: beam coefficients, generalized Lorenz-Mie theory, light scattering

PACC: 4110H, 4225F, 4262

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60371019) and the Foundation of Ministry of Education for Outstanding Young Teachers.