第 54 卷 第 11 期 2005 年 11 月
1000-3290/2005/54(11)/5144-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.54, No.11, November, 2005

矢量非傍轴离轴高斯光束的传输*

高曾辉[1)2)] 吕百达[1)†]
[1)] (四川大学激光物理与化学研究所,成都 610064)
[2)] (宜宾学院光电信息研究所,宜宾 644007)
(2005 年 3 月 15 日收到;2005 年 4 月 29 日收到修改稿)

基于矢量瑞利-索末菲衍射积分公式,得出了波动方程的一个解,它代表矢量非傍轴离轴高斯光束,其在自由空间的传输方程表示为解析的结果.矢量非傍轴离轴高斯光束的轴上和远场公式,矢量非傍轴高斯光束的传输方程,以及傍轴的结果都可作为一般表达式的特例而得出.研究表明,f 参数对光束的非傍轴特性有重要影响,而离心参数也影响非傍轴行为.与共轴情况不同的是,对离轴情况,在 y 方向存在场的纵向分量.

关键词:激光光学,矢量非傍轴离轴高斯光束,瑞利-索末菲衍射积分,f 参数,离轴参数
PACC:4200

1. 引 言

在傍轴光学范畴内,对激光束的传输变换特性已进行了许多研究.随着半导体激光器,光子晶体,微光学元件,微腔激光器等研究工作的进展,实际工作中要求用更为严格的理论来处理束宽与波长可相比拟的强聚焦激光束或有大发散角的非傍轴激光束的变换.对此,已采用多种方法进行了研究,不同的方法有其优缺点和使用条件[1—6].另一方面,实际工作中常使用多束离轴激光束进行光束合成或产生双曲余弦/正弦高斯光束[7,8].本文从矢量瑞利-索末菲衍射积分公式出发研究矢量非傍轴离轴高斯光束在自由空间中的传输特性,得出了较为普遍的解析传输方程,并举例说明解析表述的应用.

2. 矢量非傍轴离轴高斯光束在自由空间中的传输方程

假设源平面上有场为 $\boldsymbol{E}(x,y,0)=E_x(x_0,y_0,0)\boldsymbol{i}+E_y(x_0,y_0,0)\boldsymbol{j}$ 沿 x 方向线偏振的离轴高斯光束[7],

$$E_{0x}(x_0,y_0,0)=\exp\left\{-\frac{1}{w_0^2}\left[(x_0-x_d)^2+(y_0-y_d)^2\right]\right\},\tag{1a}$$

$$E_{0y}(x_0,y_0,0)=0,\tag{1b}$$

式中 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 分别为 x,y 方向的单位矢量,w_0 为束腰宽度,x_d 和 y_d 为离轴高斯光束在 x,y 方向的位移,称为离轴参数.光传输问题可用 Dirichlet 边界条件下的第一类矢量瑞利-索末菲衍射积分公式描写[9],它给出在 $z>0$ 半空间波动方程的严格解为

$$E_x(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}E_x(x_0,y_0,0)\times\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial z}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0,\tag{2a}$$

$$E_y(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}E_y(x_0,y_0,0)\times\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial z}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0,\tag{2b}$$

$$E_z(\boldsymbol{r})=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\left[E_x(x_0,y_0,0)\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial x}+E_y(x_0,y_0,0)\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0,\tag{2c}$$

式中 $\boldsymbol{r}_0=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{k}$ 为 z 方向的单位矢量,

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|},\tag{3}$$

* 国家高技术研究发展计划(批准号:2004AA823070)资助的课题.
† E-mail:badalu@scu.edu.cn

$k=2\pi/\lambda$ 为波数，λ 为波长.将 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$ 近似为[6]

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|\approx r+\frac{x_0^2+y_0^2-2xx_0-2yy_0}{2r}. \quad (4)$$

将(3)，(4)式代入(2)式，利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ps^2+qs)\,\mathrm{d}s = \frac{-\mathrm{i}\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}\exp\left(-\frac{q^2}{4p}\right), \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ps^2+qs)\,s\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{i}\sqrt{\pi}q}{2p^{3/2}}\exp\left[-\frac{q^2}{4p}\right]. \quad (6)$$

经繁冗复杂的计算，最后结果可整理为

$$E_x(x,y,z)=\frac{\mathrm{i}kz\exp(\mathrm{i}kr)}{2r^2p}\exp\left(-\frac{x_\mathrm{d}^2+y_\mathrm{d}^2}{w_0^2}\right)\times\exp\left(-\frac{q_x^2+q_y^2}{4p}\right), \quad (7a)$$

$$E_y(x,y,z)=0, \quad (7b)$$

$$E_z(x,y,z)=-\frac{\mathrm{i}k\exp(\mathrm{i}kr)}{4r^2p^2}(2px+q_x)\times\exp\left(-\frac{x_\mathrm{d}^2+y_\mathrm{d}^2}{w_0^2}\right)\times\exp\left(-\frac{q_x^2+q_y^2}{4p}\right), \quad (7c)$$

式中

$$p=-\frac{1}{w_0^2}+\mathrm{i}\frac{k}{2r}, \quad (8)$$

$$q_x=\frac{2x_\mathrm{d}}{w_0^2}-\mathrm{i}k\frac{x}{r},$$

$$q_y=\frac{2y_\mathrm{d}}{w_0^2}-\mathrm{i}k\frac{y}{r}. \quad (9)$$

(7)式是本文的主要解析结果，它描述了矢量非傍轴离轴高斯光束在自由空间的传输规律.从(7)式可以看出，E_x 在 x 和 y 方向是对称的，而 E_z 在 x 和 y 方向是不对称的，$x=x_\mathrm{d}$ 时 $E_z=0$. 而且，$x=0$ 或 $y=0$ 时，$E_z\neq0$，因此电场的纵向分量 E_z 在 x 和 y 方向都存在.这是与非离轴情况($x_\mathrm{d}=0$) E_z 在 y 方向为零[10]不同的.

现讨论(7)式的一些特殊情况.矢量非傍轴离轴高斯光束轴上光场可由(7)，(8)和(9)式中令 $x=y=0$ 求得

$$E_x(0,0,z)=\frac{\mathrm{i}k\exp(\mathrm{i}kz)}{2zt}\exp\left(-\frac{x_\mathrm{d}^2+y_\mathrm{d}^2}{w_0^2}\right)\times\exp\left(-\frac{x_\mathrm{d}^2+y_\mathrm{d}^2}{w_0^4t}\right), \quad (10a)$$

$$E_y(0,0,z)=0, \quad (10b)$$

$$E_z(0,0,z)=-\frac{\mathrm{i}k\exp(\mathrm{i}kz)}{2z^2t^2}\frac{x_\mathrm{d}}{w_0^2}\times\exp\left(-\frac{x_\mathrm{d}^2+y_\mathrm{d}^2}{w_0^2}\right)\times\exp\left(-\frac{x_\mathrm{d}^2+y_\mathrm{d}^2}{w_0^4t}\right), \quad (10c)$$

式中

$$t=-\frac{1}{w_0^2}+\mathrm{i}\frac{k}{2z}. \quad (11)$$

因此 E_x 和 E_z 对轴上光场都有贡献，但当 $x_\mathrm{d}=0$ 时，$E_z=0$，轴上只有电场的横向分量 E_x 有贡献.

对(4)式作远场近似

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|\approx r-\frac{xx_0+yy_0}{r}. \quad (12)$$

将(3)，(12)式代入(2)式，矢量非傍轴离轴高斯光束的远场场分布为

$$E_{xf}(x,y,z)=-\frac{\mathrm{i}z\exp(\mathrm{i}kr)}{2r^2f^2k}\exp[-f^2k^2(x_\mathrm{d}^2+y_\mathrm{d}^2)]\times\exp\left(\frac{i}{f}\frac{x}{2r}-kfx_\mathrm{d}\right)^2\times\exp\left(\frac{i}{f}\frac{y}{2r}-kfy_\mathrm{d}\right)^2, \quad (13a)$$

$$E_{yf}(x,y,z)=0, \quad (13b)$$

$$E_{zf}(x,y,z)=\frac{\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}kr)}{2r^2f^2k}\left(\frac{\mathrm{i}}{f^2}\frac{x}{2kr}+x-x_\mathrm{d}\right)\times\exp[-f^2k^2(x_\mathrm{d}^2+y_\mathrm{d}^2)]\times\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{f}\frac{x}{2r}-kfx_\mathrm{d}\right)^2\times\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{f}\frac{y}{2r}-kfy_\mathrm{d}\right)^2, \quad (13c)$$

式中 f 为离轴高斯光束的 f 参数，

$$f=\frac{1}{kw_0}. \quad (14)$$

令 $x_\mathrm{d}=y_\mathrm{d}=0$，(7)式简化为

$$E_x(x,y,z)=\frac{\mathrm{i}kz\exp(\mathrm{i}kr)}{2r^2p}\times\exp\left[\frac{k^2}{4r^2p}(x^2+y^2)\right], \quad (15a)$$

$$E_y(0,0,z)=0, \quad (15b)$$

$$E_z(x,y,z)=-\frac{\mathrm{i}k\exp(\mathrm{i}kr)}{4r^2p^2}\left(2px-\mathrm{i}k\frac{x}{r}\right)\times\exp\left[\frac{k^2}{4r^2p}(x^2+y^2)\right]. \quad (15c)$$

(15)式为矢量非傍轴高斯光束在自由空间的传输公

式,与文献[10]中(10)式令 $w_{0x}=w_{0y}$ 的结果一致.

对于傍轴光束,若将(7a)式中 e^{ikr} 的 r 作傍轴近似

$$r\cong z+\frac{x^2+y^2}{2z}, \tag{16}$$

其余部分的 r 近似为 z,则(7a)式简化为

$$E_{xp}(x,y,z)=\frac{\mathrm{i}k\exp(\mathrm{i}kz)}{2zt}\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\times\exp\left(-\frac{x_\mathrm{d}^2+y_\mathrm{d}^2}{w_0^2}\right)\exp\left(-\frac{h_x^2+h_y^2}{4t}\right), \tag{17}$$

式中

$$h_x=\frac{2x_\mathrm{d}}{w_0^2}-\mathrm{i}k\frac{x}{z},$$

$$h_y=\frac{2y_\mathrm{d}}{w_0^2}-\mathrm{i}k\frac{y}{z}. \tag{18}$$

(17)式与文献[7]的(3)式离轴高斯光束在自由空间传输的结果是一致的.在(13a)式中若再作傍轴近似,则可得

$$E_{xpf}(x,y,z)=\frac{\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}kz)}{2zf^2k}\exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\times\exp[-f^2k^2(x_\mathrm{d}^2+y_\mathrm{d}^2)]\times\exp\left(\frac{i}{f}\frac{x}{2z}-kfx_\mathrm{d}\right)^2\times\exp\left(\frac{i}{f}\frac{y}{2z}-kfy_\mathrm{d}\right)^2. \tag{19}$$

(19)式与傍轴条件下使用夫琅禾费衍射积分公式积分的结果相同.

3. 数值计算和分析

利用(7)式作了大量数值计算以研究矢量非傍轴离轴高斯光束在自由空间中的传输特性.典型例示于图1—3.图1为在 $z=10z_0$ 面上矢量非傍轴离轴高斯光束在 x 方向归一化光强

$$I=|E_x(x,0,10z_0)|^2+|E_y(x,0,10z_0)|^2+|E_z(x,0,10z_0)|^2,$$

$z_0=\pi w_0^2/\lambda$ 为高斯光束的瑞利长度.为作比较,(17)式的傍轴计算结果 $I_p(x,0,10z_0)=|E_{xp}(x,0,10z_0)|^2$ 也示于图中.由图1知当 f 很小[3],例如 $f=0.01$ 时,傍轴近似成立,$I(x,0,10z_0)$ 和 $I_\mathrm{p}(x,0,10z_0)$ 几乎无差别,$I_z(x,0,10z_0)$ 很小可以忽略.从图2看出当 f 参数较大,例如 $f=0.30$ 时,$I(x,0,10z_0)$ 和 $I_p(x,0,10z_0)$ 有显著差别,$I_z(x,0,10z_0)$ 不再可以忽略.而且随着偏心离轴参数 x_d,y_d 从 $x_\mathrm{d}=y_\mathrm{d}=0.5$(图2(a))增加至 $x_\mathrm{d}=y_\mathrm{d}=5.0$(图2(b)),$I(x,0,10z_0)$ 和 $I_p(x,0,10z_0)$ 差别加大,$I_z(x,0,10z_0)$ 也增加.图3为离轴高斯光束在 $z=10z_0$ 面上 y 方向的归一化光强 $I(0,y,10z_0)$ 分布,与共轴情况[7]不同,此时在 y 方向上存在 $I_z(0,y,10z_0)$.

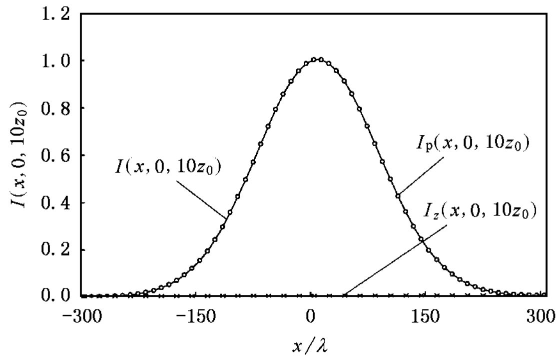
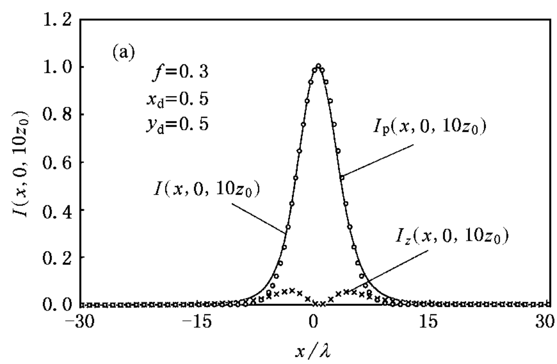


图1 矢量离轴高斯光束在 $z=10z_0$ 面上 x 方向的归一化光强分布 (计算参数为:$f=0.01$,$x_\mathrm{d}=y_\mathrm{d}=5.0$.—为用(7)式的计算结果,×××为用(7c)式的计算结果,∘∘∘为用(17)式的计算结果)



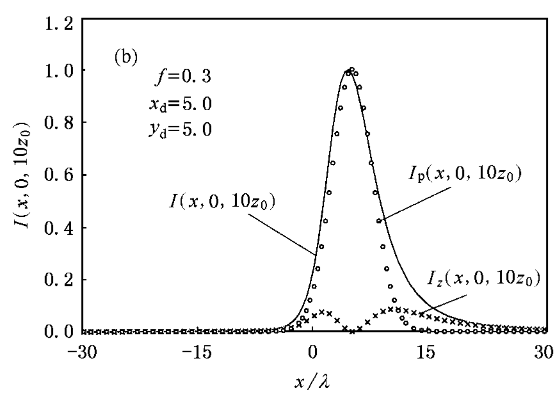


图2 矢量离轴高斯光束在 $z=10z_0$ 面上 x 方向的归一化光强分布 (—为用(7)式的计算结果,×××为用(7c)式的计算结果,∘∘∘为用(17)式的计算结果)

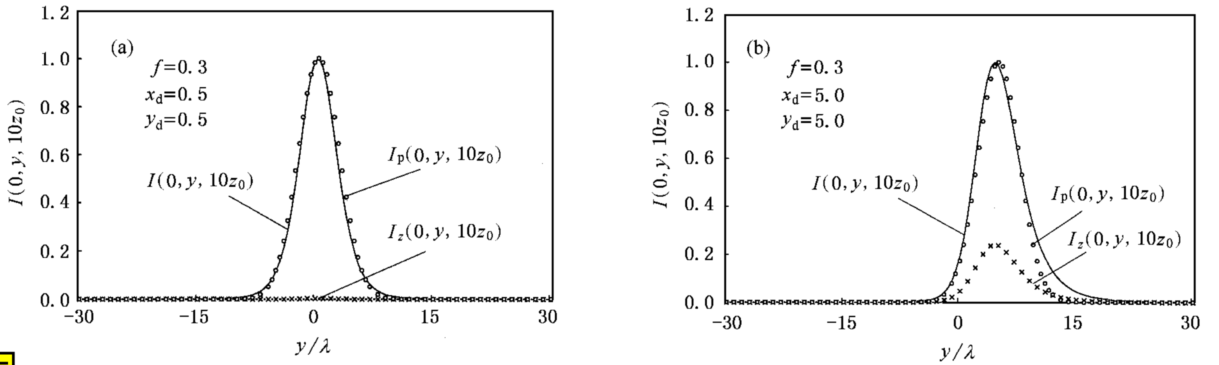


图 3　矢量离轴高斯光束在 $z=10z_0$ 面上 y 方向的归一化光强分布　(—为用(7)式的计算结果，× × × 为用(7c)式的计算结果，∘∘∘为用(17)式的计算结果)

4. 结　　论

本文利用瑞利积分公式，推导出了矢量非傍轴离轴高斯光束在自由空间较为普遍的解析的传输方程，对矢量非傍轴离轴高斯光束在自由空间的传输特性做了数值计算和比较. 当 f 参数较小(例如 $f=0.01$)时，所得结果与傍轴情况一致，z 分量可以忽略. 当 f 参数较大(例如 $f=0.3$)时，所得结果与傍轴情况有显著差异，此时 z 分量一般不能忽略. 除 f 参数外，离轴参数 x_d，y_d 对光束非傍轴行为会有影响. 特别是，当 $x_d \neq 0$ 时，在 y 方向 $I_z \neq 0$.

[1] Lax M，Louisell W H and McKnight W B 1975 *Phys*. *Rev*. A **11** 1365

[2] Agrawal G P and Pattanayak D N 1979 *J*. *Opt*. *Soc*. *Am*. **69** 575

[3] Nemoto S 1990 *Appl*. *Opt*. **29** 1940

[4] Laabs H 1998 *Opt*. *Commun*. **147** 1

[5] Liu P S，Lü B D 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3724(in Chinese) [刘普生、吕百达 2004 物理学报 **53** 3724]

[6] Duan K L and Lü B D 2004 *Opt*. *Lett*. **29** 800

[7] Lü B D and Ma H 1999 *Opt*. *Commun*. **171** 185

[8] Zhang B，Ma H and Lü B D 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1869(in Chinese) [张　彬、马　虹、吕百达 1999 物理学报 **48** 1869]

[9] Luneberg R K 1966 *Mathematical Theory of Optics* (Berkeley California：California University Press)

[10] Duan K L and Lü B D 2004 *Opt*. *& Laser Tech*. **36** 489

Propagation of vectorial off-axis Gaussian beams beyond the paraxial approximation*

Gao Zeng-Hui[1)2)] Lü Bai-Da[1)†]

1) (*Institute of Laser Physics and Chemistry*, *Sichuan University*, *Chengdu* 610064, *China*)

2) (*Institute of Optoelectronic Information*, *Yibin University*, *Yibin*, 644007, *China*)

(Received 15 March 2005; revised manuscript received 29 April 2005)

Abstract

Based on the vectorial Rayleigh-Sommerfeld diffraction formulation, a solution of the electric-magnetic wave equation is found, which represents vectorial nonparaxial off-axis Gaussian-beams whose propagation equation in free space is expressed in a closed form. The on-axis and far-field expressions of vectorial nonparaxial off-axis Gaussian beams, the propagation equation of vectorial nonparaxial Gaussian beams and the paraxial results are treated as special cases of our general expression. It is shown that the f parameter plays an impotant role in determining the beam nonparaxiality, whereas the off-axis parameters additionally affect the nonparaxial behavior of vectorial nonparaxial off-axis Gaussian beams. Moreover, unlike the on-axis case, there exists the longitudinal component of the field in the y direction for the off-axis case.

Keywords: laser optics, vectorial nonparaxial off-axis Gaussian beam, Rayleigh-Sommerfeld diffraction integral, f parameter, off-axis parameter

PACC: 4200

* Project supported by the National High Technology Development Program of China (Grant No. 2004AA823070).

† E-mail: badalu@scu.edu.cn