第 54 卷 第 12 期 2005 年 12 月
1000-3290/2005/54(12)/5517-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.12,December,2005

Riemann-Cartan 空间中的 d'Alembert-Lagrange 原理*

王 勇[1)†] 郭永新[2)]

1)(广东医学院基础学院,东莞 523808)

2)(辽宁大学物理系,沈阳 110036)

(2005 年 3 月 15 日收到;2005 年 7 月 5 日收到修改稿)

将 Kleinert 提出的不可积映射推广为一阶线性映射.通过这种方法,将 Riemann-Cartan 空间嵌入到欧氏空间.在此基础上,将通常在欧氏空间中描述约束系统的 d'Alembert-Lagrange 原理推广到 Riemann-Cartan 空间的"无约束"表示.

关键词:一阶线性映射,Riemann-Cartan 空间,挠率,d'Alembert-Lagrange 原理

PACC:0320

1. 引 言

在引力规范理论中,时空几何从 Riemann 空间推广到 Riemann-Cartan 空间,建立了物质的能量动量和自旋与 Riemann-Cartan 时空的曲率和挠率的关系,从而推广了 Einstein 的广义相对论[1—3].近些年来,人们认识到某些具有一定复杂性和奇异性的物理问题,也和 Riemann-Cartan 空间有着内在的联系,这些问题中物理系统的演化空间都表现出非欧特性,其奇异特性就表现在 Riemann-Cartan 空间的挠率上[4—9].尽管就引力问题而言,时空的挠率在目前的实验精度上还一时难以测量,但这并不影响这种几何方法在其他物理学领域的应用研究.这种方法可以将物理问题在欧氏空间和 Riemann 空间中的奇异性质描述为一个 Riemann-Cartan 空间中挠率,从而为解决具有奇异物理性质的问题提供了新途径.在这一思想中,一个具有重要意义的问题就是如何把建立在欧氏空间和 Riemann 空间上具有某种奇异特性的物理模型推广到有挠率的 Riemann-Cartan 空间中,亦即由系统的非欧特性来构造空间的挠率,从而实现物理模型奇异性质的几何化.

近几年,德国学者 Kleinert 及其合作者提出了一种构造 Riemann-Cartan 空间的不可积映射方法,将有挠率的 Riemann-Cartan 空间嵌入到高维欧氏空间.利用这一方法,在一系列文献[4—9]中,将 Feynman 路径积分、Schrödinger 方程、等效原理、晶格缺陷与旋转位移、不可积约束系统等问题的研究与 Riemann-Cartan 空间的几何结构有机地结合起来,得到了许多有意义的结果.

在最近的工作中,我们对这一方法做了推广,借助不可积映射,将 Riemann-Cartan 空间嵌入到 Riemann 空间中[10].这在约束系统动力学的研究中,相当于包含了完整约束条件,并使欧氏空间中的完整约束系统的相空间约化为低维 Riemann 空间,而系统所受到的非完整约束[11—15]则进一步增加了相空间的挠率,使之成为 Riemann-Cartan 空间.本文将进一步推广不可积映射方法,构造一阶线性映射,包括可积与不可积情形,并在此基础上将完整与非完整系统的 d'Alembert-Lagrange 原理[16]统一在 Riemann-Cartan 空间上加以研究.

2. 用一阶线性映射构造 Riemann-Cartan 空间

设 $[x]$ 为一个欧氏空间,坐标为 x^i,切空间为 $T[x]$,$\dot{x}^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t$,$\dot{x}^i$ 满足如下 $n-m$ 个线性无关的约束条件:

$$e_i^\rho \dot{x}^i = 0 \qquad (\rho = 1,2,\cdots,k = n-m),\quad (1)$$

* 国家自然科学基金(批准号:10472040,10175032)、辽宁省优秀青年科研人才培养基金(批准号:3040005)、教育部留学回国人员科研启动基金(批准号:2004527)资助的课题.

† E-mail:wangyong@gdmc.edu.cn

式中 e_i^ρ 为坐标 $\{x^i\}$ 的函数. 设此式可解出

$$
\begin{aligned}
\dot{q}^\mu &= a_i^\mu \dot{x}^i,\\
\dot{x}^j &= b_v^j \dot{q}^v,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

式中, $i, j = 1, 2, \cdots, n$; $\mu, v = 1, 2, \cdots, m\ (n \geqslant m)$, a_i^μ 和 b_μ^i 满足

$$
\begin{aligned}
a_i^\mu b_v^i &= \delta_v^\mu,\\
a_i^\mu b_\mu^j &= \delta_i^j.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

显然 $\dot{q}^\mu$ 可以看作一个新空间(记作 $[q]$ 空间)的切空间中的 m 个线性无关的基矢分量.

若将 $\dot{x}^i$ 看作切空间 $T[q]$ 中的矢量 $\dot{q}^\mu$ 在一阶线性映射下在 $T[x]$ 空间中所成的像, 则切空间 $T[q]$ 中的任一矢量都可以同样地映射为 $T[x]$ 空间中的矢量, 满足

$$
\begin{aligned}
T^\mu &= a_i^\mu T^i,\\
T^i &= b_\mu^i T^\mu.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

若规定映射不改变矢量的长度和矢量间的夹角, 则有

$$
(\tilde{T}, T) = g_{\mu v} \tilde{T}^\mu T^v, \tag{5}
$$

$$
(\tilde{T}, T) = \delta_{ij} \tilde{T}^i T^j = \delta_{ij} b_\mu^i b_v^j \tilde{T}^\mu T^v, \tag{6}
$$

式中 $g_{\mu v}$ 为 $T[q]$ 空间的度规. 比较(5), (6)式, 考虑 $\tilde{T}$ 和 T 为任意矢量, 可得

$$
g_{\mu v} = \delta_{ij} b_\mu^i b_v^j. \tag{7}
$$

此即 $T[q]$ 空间的度规表达式.

要确定空间 $[q]$ 上的联络, 需要引入相容性条件. 为保证有解, 我们取如下相容性条件:

$$
\delta_{ij} b_v^j \frac{\mathrm{d}T^i}{\mathrm{d}t} = \delta_{ij} b_\mu^i b_v^j \frac{\mathrm{D}T^\mu}{\mathrm{d}t}, \tag{8}
$$

式中 T^i 和 T^μ 分别为任一矢量 $\boldsymbol{T}$ 在 $[x]$ 空间和 $[q]$ 空间中的分量.

$$
\begin{aligned}
\delta_{ij} b_v^j \frac{\mathrm{d}T^i}{\mathrm{d}t} &= \delta_{ij} b_v^j \frac{\mathrm{d} b_\mu^i T^\mu}{\mathrm{d}t}\\
&= \delta_{ij} b_v^i b_\mu^j \frac{\mathrm{d}T^\mu}{\mathrm{d}t} + \delta_{ij} b_v^j b_{\mu,\sigma}^i T^\mu \dot{q}^\sigma,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\delta_{ij} b_v^j b_\mu^i \frac{\mathrm{D}T^\mu}{\mathrm{d}t} = \delta_{ij} b_v^j b_\mu^i \left(\frac{\mathrm{d}T^\mu}{\mathrm{d}t} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu T^\rho \dot{q}^\sigma \right)
\quad (\rho, \sigma = 1, 2, \cdots, m). \tag{10}
$$

由于相容性条件(8)式, 且考虑 $\boldsymbol{T}$ 为任意矢量, 以及 $\dot{q}^\mu$ 的相互独立性, 可得

$$
g_{v\mu} \Gamma_{\rho\sigma}^\mu = \delta_{ij} b_v^i b_{\rho,\sigma}^j. \tag{11}
$$

用 $g^{v\lambda}$ 缩并(1)式得

$$
\Gamma_{\rho\sigma}^\lambda = g^{v\lambda} \delta_{ij} b_v^j b_{\rho,\sigma}^i \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, m). \tag{12}
$$

此即 $T[q]$ 空间的联络表达式.

到此, 我们未对线性映射(1)式的可积性作任何限制. 若映射(1)式为可积映射, 则有

$$
b_{\mu,v}^i = b_{v,\mu}^i. \tag{13}
$$

此时, 联络 $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ 关于两个下指标对称, 空间 $[q]$ 的挠率为零, 该映射把欧氏空间映射为 Riemann 空间.

若映射(1)式为不可积映射, 联络 $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ 关于两个下指标不对称, 其反对称部分即为空间 $[q]$ 的挠率,

$$
\begin{aligned}
S_{\rho\sigma}^\mu &= \frac{1}{2} (\Gamma_{\rho\sigma}^\mu - \Gamma_{\sigma\rho}^\mu)\\
&= \frac{1}{2} g^{\mu v} \delta_{ij} b_v^j (b_{\rho,\sigma}^i - b_{\sigma,\rho}^i).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

说明不可积映射把欧氏空间映射为 Riemann-Cartan 空间.

3. Riemann-Cartan 空间中的 d'Alembert-Lagrange 原理

在传统分析力学中, 系统只受双面理想约束时, d'Alembert-Lagrange 原理在系统位形空间中的形式为

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \{ &(m_i \ddot{x}_i - F_{ix}) \delta x_i + (m_i \ddot{y}_i - F_{iy}) \delta y_i\\
&+ (m_i \ddot{z}_i - F_{iz}) \delta z_i \} = 0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

当系统不受约束时, $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 彼此独立, 上式即退化为牛顿定律.

当系统所受约束中包含 k 个可积约束(亦称完整约束)时, 系统的状态可用 $s = 3n - k$ 个广义坐标 q_s 来表示, d'Alembert-Lagrange 原理的广义坐标形式为

$$
\sum_{s=1}^{3n-k} \left\{ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} \right) - Q_s \right\} \delta q_s = 0, \tag{16}
$$

式中 T 为系统的动能, 在位形空间的表达式为

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (m_i \boldsymbol{v}^2)\\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2);
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Q_s 为广义力, 定义为

$$
\begin{aligned}
Q_s &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

若系统所受约束全是可积约束, (16)式中 $\delta q_s\ (s = 1, 2, \cdots, 3n - k)$ 彼此独立, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s. \tag{19}$$

此即第二类 Lagrange 方程. 该方程是完整系统分析力学的基础.

我们从(15)式出发,构造 Riemann-Cartan 空间中的 d'Alembert-Lagrange 原理. 为表述方便,将 n 个粒子系统的位形空间用[w]表示,其坐标为 w^i,切空间用 $T[w]$表示,其基矢分量为 $\dot{w}^i = \mathrm{d}w^i/\mathrm{d}t$,粒子所受力在切空间中的分量为 F^i,即取

$$\begin{aligned} w^{3i-2} &= x_i, \\ w^{3i-1} &= y_i, \\ w^{3i} &= z_i; \end{aligned} \tag{20a}$$

$$\begin{aligned} \dot{w}^{3i-2} &= \dot{x}_i, \\ \dot{w}^{3i-1} &= \dot{y}_i, \\ \dot{w}^{3i} &= \dot{z}_i; \end{aligned} \tag{20b}$$

$$\begin{aligned} F^{3i-2} &= F_{ix}, \\ F^{3i-1} &= F_{iy}, \\ F^{3i} &= F_{iz}. \end{aligned} \tag{20c}$$

(20a)—(20c)式中 $i = 1,2,\cdots,n$. 采用 Einstein 求和约定,(15)式可以写作

$$g_{ij}(\ddot{w}^i - Q^i)\delta w^j = 0 \quad (i, j = 1,2,\cdots,3n), \tag{21}$$

式中,

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} m_{\mathrm{int}[\frac{i}{3}]+1}, \\ Q^i &= \frac{F^i}{\sqrt{m_{\mathrm{int}[\frac{i}{3}]+1}}}. \end{aligned} \tag{22}$$

(22)式中,质量 m 为标量,指标 i($i = 1,2,\cdots,3n$)间不求和. 注意到(21)式等号左边是两个矢量($\ddot{w}^i - Q^i$)和 δw^i 的点积,因此 g_{ij} 的几何意义显然是切空间 $T[w]$的度规.

设系统位形空间[w]受如下 $k = 3n - m$ 个微分约束:

$$e^{\rho}_i \dot{w}^i = 0 \qquad (\rho = 1,2,\cdots,k = 3n - m), \tag{23}$$

且表示为下列关系:

$$\begin{aligned} \dot{q}^{\mu} &= a^{\mu}_i \dot{w}^i, \\ \dot{w}^i &= b^i_{\mu} \dot{q}^{\mu}, \end{aligned} \tag{24}$$

式中,$i = 1,2,\cdots,3n$;$\mu = 1,2,\cdots,m$. 显然,$\dot{q}^{\mu}$ 可以看作一个新空间(记作[q]空间)的切空间(记作 $T[q]$)中的 m 个线性无关的基矢,a^{μ}_i 和 b^i_{μ} 满足(3)式.

与(5)—(7)式的推导相类似,考虑到切空间 $T[w]$的度规为 g_{ij},可得 $T[q]$空间的度规 $g_{\mu\nu}$ 为

$$g_{\mu\nu} = g_{ij} b^i_{\mu} b^j_{\nu}. \tag{25}$$

为确定空间[q]上的联络,我们取相容性条件为

$$g_{ij} b^j_{\nu} \frac{\mathrm{d}T^i}{\mathrm{d}t} = g_{ij} b^i_{\mu} b^j_{\nu} \frac{\mathrm{D}T^{\mu}}{\mathrm{d}t}. \tag{26}$$

可得 $T[q]$空间的联络表达式

$$\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} = g^{\rho\nu} g_{ij} b^j_{\nu} b^i_{\lambda,\sigma}. \tag{27}$$

若约束(23)式不可积,联络 $\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}$ 关于两个下指标不对称,联络的反对称部分即为空间[q]的挠率 $S^{\rho}_{\lambda\sigma}$. 此时,空间[q]为一个有挠率的 Riemann-Cartan 空间,显然,在[q]空间中不再显含(23)式所示一阶线性约束,这些约束都隐含在 Riemann-Cartan 空间的度规和联络中,表现为空间的曲率和挠率.

设由(24)式所示一阶线性映射可得

$$\delta w^i = b^i_{\mu} \delta q^{\mu}, \tag{28}$$

$$\ddot{w}^i = b^i_{\mu} \ddot{q}^{\mu} + b^i_{\mu,\nu} \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu}. \tag{29}$$

代入(21)式得

$$(g_{\mu\sigma} \ddot{q}^{\mu} + g_{ij} b^i_{\mu,\nu} b^j_{\sigma} \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} - Q_{\sigma}) \delta q^{\sigma} = 0. \tag{30}$$

利用联络(27)式定义协变导数,(30)式变为

$$g_{\mu\sigma}\left(\frac{\mathrm{D}\dot{q}^{\mu}}{\mathrm{d}t} - Q^{\mu}\right)\delta q^{\sigma} = 0, \tag{31}$$

式中 $Q^{\mu} = g^{\mu\sigma} g_{ij} Q^i b^j_{\sigma}$ 为系统所受力在 $T[q]$空间中的表达式,此即为 Riemann-Cartan 空间中 d'Alembert-Lagrange 原理的表达式.

考虑在[w]空间和[q]空间中系统动能表达式为

$$T = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{w}^i \dot{w}^j = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu}, \tag{32}$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\mu}}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\mu}}\right) - \Gamma^{\pi}_{\mu\nu} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\pi}} \dot{q}^{\nu} \\ &= g_{\mu\nu} \ddot{q}^{\nu} + g_{ij} b^i_{\mu} b^j_{\nu,\sigma} \dot{q}^{\nu} \dot{q}^{\sigma}. \end{aligned} \tag{33}$$

代入(31)式得

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\sigma}}\right) - Q_{\sigma}\right)\delta q^{\sigma} = 0. \tag{34}$$

若系统只受一阶线性约束,δq^{σ} 彼此独立,则有

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\sigma}}\right) - Q_{\sigma} = 0. \tag{35}$$

此即 Riemann-Cartan 空间中的第二类 Lagrange 方程.

4. 结　　论

由于 Riemann-Cartan 空间具有最丰富的几何结构,Riemann 空间和平直空间只是它的特例,因此

(31)式可看作是一个统一的 d'Alembert-Lagrange 原理表达式形式. 一个受一阶线性约束的系统,若放在平直的位形空间中研究且取直角坐标系,则(31)式就退化为(21)式,此时需要将(21)式和一阶线性约束联立使用才能描述系统的运动. 如果按(24)式选取合适的 Riemann-Cartan 空间,则一阶线性约束将隐含在空间的度规和联络中,表现为空间的曲率和挠率. 此时仅仅使用形如(31)式的 d'Alembert-Lagrange 原理就能完全描述系统的运动了.

[1] Shapiro I L 2002 *Phys. Rep.* **357** 113

[2] Hehl F W, McCrea J D, Mielke E W *et al* 1995 *Phys. Rep.* **258** 1

[3] Qi G Y, Guo Y X 2004 *Phys. Rev.* D **70** 044009

[4] Shabanov S V 1998 *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** 5177

[5] Fiziev P, Kleinert H 1996 *Europhys. Lett.* **35** 241

[6] Kleinert H 2002 *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets* (3rd ed) (Singapore: World Scientific) p419

[7] Kleinert H, Shabanov S V 1998 *Phys. Lett.* B **428** 315

[8] Kleinert H, Pelster A 1999 *Gen. Rel. Grav.* **31** 1439

[9] Kleinert H, Pelster A 1998 *Acta Phys. Pol.* **29** 1015

[10] Guo Y X, Luo S K, Mei F X 2004 *Adv. Mech.* **34** 477 (in Chinese) [郭永新、罗绍凯、梅凤翔 2004 力学进展 **34** 477]

[11] Guo Y X, Yu Y, Huang H J 2001 *Chin. Phys.* **10** 1

[12] Xu Z X, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 1228

[13] Luo S K, Guo Y X, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2413 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2413]

[14] Guo Y X, Jiang L Y, Yu Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 181

[15] Guo Y X, Luo S K, Shang M *et al* 2001 *Rep. Math. Phys.* **47** 313

[16] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Dynamics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p54 (in Chinese) [梅凤翔、刘 端、罗 勇 1991 高等分析力学(北京:北京理工大学出版社)第 54 页]

d'Alembert-Lagrange principle on Riemann-Cartan space*

Wang Yong[1)†] Guo Yong-Xin[2)]

1) (*School of Basic Medical Science, Guangdong Medical College, Dongguan 523808, China*)

2) (*Department of Physics, Liaoning University, Shenyang 110036, China*)

(Received 15 March 2005; revised manuscript received 5 July 2005)

Abstract

The nonholonomic mapping put forward by Kleinert is generalized to a first-order linear mapping. By means of this method, Riemann-Cartan space is embedded into Euclidean space. Based on this construction, the d'Alembert-Lagrange principle of nonholonomic constrained systems in Euclidean space is reduced to an "unconstrained" representation on Riemann-Cartan space.

Keywords: first-order linear mapping, Riemann-Cartan space, torsion, d'Alembert-Lagrange principle

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472040, 10175032), the Outstanding Young Talents Training Fund of Liaoning Province, China (Grant No. 3040005), and the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars from the Ministry of Education of China (Grant No. 2004527).

† E-mail: wangyong@gdmc.edu.cn