第 54 卷 第 12 期 2005 年 12 月
1000-3290/2005/54(12)/5521-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.12, December, 2005

准坐标下一般完整系统的统一对称性*

许学军[1)2)†] 梅凤翔[1)]

1)(北京理工大学力学系,北京 100081)

2)(浙江师范大学物理系,金华 321004)

(2005 年 4 月 21 日收到;2005 年 5 月 20 收到修改稿)

研究准坐标下完整力学系统在时间不变的无限小变换下的统一对称性.列出系统的运动微分方程,给出系统的统一对称性的定义和判据,由系统的统一对称性导出 Noether 守恒量、Hojman 守恒量和一类新型守恒量.举例说明结果的应用.

关键词:准坐标,完整系统,统一对称性,守恒量

PACC:0320

1. 引 言

动力学系统的守恒定律在数学、力学和物理学领域中扮演着重要的角色.利用对称性理论去寻找约束力学系统的守恒量是目前常用的手段,主要有 Noether 对称性[1—8]、Lie 对称性[7—13] 和形式不变性[14—18] 等三种对称性.相应地有三种主要守恒量,Noether 对称性可以直接导致 Noether 守恒量[1—8],时间不变的 Lie 对称性可以直接导致 Hojman 守恒量[19—21],形式不变性可以直接导致一类新型守恒量[22—25].Mei 等[26] 给出了 Lagrange 系统的统一对称性,并由此导出了以上三种主要守恒量.

用准坐标表示力学系统的运动微分方程有两个优点.首先,由于准坐标的含义比广义坐标更广泛,因此运动方程更具普遍性;其次,对单面约束系统的应用会带来方便[27].文献[8]讨论了准坐标下完整系统的 Noether 对称性和 Noether 守恒量,文献[21]给出了准坐标下完整系统的 Hojman 守恒量,文献[16]研究了准坐标下完整系统的形式不变性,文献[28]全面研究了准坐标下完整系统的三种对称性并给出了由形式不变性直接导致的新型守恒量.本文将文献[26]的结果推广至准坐标下一般完整系统,也同样得到了三种主要守恒量,其结果自然适合广义坐标下的一般完整系统.

2. 系统的运动微分方程

设完整力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s ($s=1,2,\cdots,n$) 确定,其 Lagrange 函数与非势广义力分别为 $L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 和 $Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ ($s=1,2,\cdots,n$).取准速度为

$$\omega_s = \sum_{k=1}^{n} a_{sk}(\boldsymbol{q})\dot{q}_k \qquad (s=1,2,\cdots,n), \tag{1}$$

反解出广义速度

$$\dot{q}_s = \sum_{k=1}^{n} b_{sk}(\boldsymbol{q})\omega_k \qquad (s=1,2,\cdots,n), \tag{2}$$

则系统运动微分方程可表示为准坐标形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s} + \sum_{k,r=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_k}\gamma_{rs}^{k}\omega_r - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_s} = P_s^* \qquad (s=1,2,\cdots,n), \tag{3}$$

式中,

$$L^*(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\omega}) = L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\omega})),$$

$$\frac{\partial}{\partial \pi_s} = \sum_{k=1}^{n} b_{ks}\frac{\partial}{\partial q_k},$$

$$\gamma_{rs}^{k} = \sum_{l,m=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{km}}{\partial q_l} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_m}\right)b_{lr}b_{ms},$$

* 国家自然科学基金(批准号:10272021)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:20040007022)资助的课题.

† E-mail:xxj@zjnu.cn

$$P_s^* = \sum_{k=1}^{n} Q_k b_{ks}. \tag{4}$$

设系统非奇异，即 $\det\left(\frac{\partial^2 L^*}{\partial\omega_s \partial\omega_k}\right) \neq 0$，则由方程(3)可解出所有 $\dot{\omega}_s$，记作

$$\dot{\omega}_s = \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}) \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{5}$$

3. 统一对称性的定义和判据

定义 如果对称性同时为 Noether 的、Lie 的和形式不变性的，则称为统一对称性.

研究时间不变的无限小变换

$$\begin{aligned} t^* &= t, \\ \pi_s^*(t^*) &= \pi_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}) \\ &\quad (s = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned} \tag{6}$$

利用准坐标下完整系统的 Noether 等式、Lie 对称性的确定方程和形式不变性的判据方程[28]，我们得到准坐标下完整系统在无限小变换(6)式下的统一对称性的判据.

判据 如果无限小变换(6)式的生成元 ξ_s 满足如下条件：

$$\begin{aligned} &\left[\tilde{X}^{(1)}(L^*) + \sum_{s=1}^{n} P_s^* \xi_s + \dot{G}_N\right]^2 \\ &+ \sum_{s=1}^{n}\left\{\tilde{X}^{(2)}[\tilde{E}_s(L^*)]\right. \\ &\left.- \tilde{X}^{(1)}\left[\sum_{k,r=1}^{n}\left(\frac{\partial L^*}{\partial\omega_k}\gamma_{rs}^k\omega_r - P_s^*\right)\right]\right\}^2 \\ &+ \sum_{s=1}^{n}\left\{\tilde{E}_s[\tilde{X}^{(1)}(L^*)]\right. \\ &\left.+ \sum_{k,r=1}^{n}\frac{\partial\tilde{X}^{(1)}(L^*)}{\partial\omega_k}\gamma_{rs}^k\omega_r - \tilde{X}^{(1)}(P_s^*)\right\}^2 = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

则相应对称性为准坐标下完整系统在时间不变的无限小变换下的统一对称性. 这里，

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{(1)} &= \sum_{s=1}^{n}\left[\xi_s \frac{\partial}{\partial\pi_s} + \left(\dot{\xi}_s - \sum_{k,r=1}^{n}\gamma_{rk}^s\omega_r\xi_k\right)\frac{\partial}{\partial\omega_s}\right], \\ \tilde{X}^{(2)} &= \tilde{X}^{(1)} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\xi}_s - \sum_{k,r=1}^{n}\gamma_{rk}^s\omega_r\xi_k\right)\frac{\partial}{\partial\dot{\omega}_s}, \\ \tilde{E}_s &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\omega_s} - \frac{\partial}{\partial\pi_s}, \end{aligned} \tag{8}$$

4. 统一对称性导致的守恒量

根据定义和判据，并利用准坐标下完整系统的对称性与守恒量的关系[28]，得到下列命题.

命题 1 准坐标下完整系统在时间不变的无限小变换下的统一对称性可直接导致 Noether 守恒量，有

$$I_{\mathrm{N}} = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^*}{\partial\omega_s}\xi_s + G_{\mathrm{N}} = \mathrm{const}. \tag{9}$$

命题 2 如果准坐标下完整系统在时间不变的无限小变换下的统一对称性的生成元 ξ_k 满足条件

$$\sum_{s,r,k=1}^{n}\frac{\partial\gamma_{rk}^s}{\partial\pi_s}\omega_r\xi_k = 0, \tag{10}$$

且存在某函数 $\mu = \mu(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega})$，使得

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\omega_s} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0 \tag{11}$$

成立，则此统一对称性将导致 Hojman 守恒量

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{H}} &= \frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\pi_s}(\mu\xi_s) \\ &\quad + \frac{1}{\mu}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\omega_s}\left[\mu\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \sum_{k,r=1}^{n}\gamma_{rk}^s\omega_r\xi_k\right)\right] \\ &= \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{12}$$

(11)式中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\omega_s\frac{\partial}{\partial\pi_s} + \sum_{s=1}^{n}\alpha_s\frac{\partial}{\partial\omega_s}. \tag{13}$$

命题 3 如果存在规范函数 $G_{\mathrm{F}} = G_{\mathrm{F}}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega})$，使准坐标下完整系统在时间不变的无限小变换下的统一对称性的生成元 ξ_s 满足条件

$$\tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(1)}(L^*)] + \sum_{s=1}^{n}\tilde{X}^{(1)}(P_s^*)\xi_s + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{F}} = 0, \tag{14}$$

则统一对称性导致新型守恒量

$$I_{\mathrm{F}} = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\tilde{X}^{(1)}(L^*)}{\partial\omega_s}\xi_s + G_{\mathrm{F}} = \mathrm{const}. \tag{15}$$

(14)式中计算等式左边的第一项时，按沿运动轨道曲线的方式进行，即函数对时间的全导数采用(13)式.

5. 算 例

二自由度系统 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(q_1^2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}q_1^2, \tag{16}$$

广义力为

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0, \\ Q_2 &= Q_2(t, q_2). \end{aligned} \tag{17}$$

取准速度为

$$\omega_1 = q_1\dot{q}_1,\quad \omega_2 = \dot{q}_2,\tag{18}$$

试研究系统准坐标下的统一对称性和守恒量.

首先,建立准坐标下的微分方程,有

$$a_{11} = q_1,$$
$$a_{12} = 0,$$
$$a_{21} = 0,$$
$$a_{22} = 1,$$
$$b_{11} = \frac{1}{q_1},$$
$$b_{12} = 0,$$
$$b_{21} = 0,$$
$$b_{22} = 1,$$
$$\gamma^s_{rk} = 0 \qquad (k, r, s = 1, 2, \cdots, n),$$
$$L^* = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}q_1^2,$$
$$P_1^* = 0,$$
$$P_2^* = Q_2(t, q_2).$$

方程(5)给出

$$\dot{\omega}_1 = 1,\quad \dot{\omega}_2 = Q_2(t, q_2).\tag{19}$$

其次,求统一对称性. 取生成元

$$\xi_0 = \xi_2 = 0,\quad \xi_1 = \omega_1.\tag{20}$$

容易验证,它是系统的统一对称性.

实际上,有

$$\tilde{X}^{(1)}(L^*) = \omega_1 + \dot{\omega}_1\omega_1,$$
$$\sum_{s=1}^{n} P_s^*\xi_s = 0,$$
$$\tilde{E}_1(L^*) = \dot{\omega}_1 - 1,$$
$$\tilde{E}_2(L^*) = \dot{\omega}_2,$$
$$\tilde{X}^{(2)}[\tilde{E}_1(L^*)] = \tilde{E}_1[\tilde{X}^{(1)}(L^*)] = \ddot{\omega}_1 = 0,$$
$$\tilde{X}^{(2)}[\tilde{E}_2(L^*)] = \tilde{E}_2[\tilde{X}^{(1)}(L^*)] = 0,$$
$$\tilde{X}^{(1)}(P_1^*) = \tilde{X}^{(1)}(P_2^*) = 0,$$

将其代入条件(7)式,得

$$\dot{G}_{\mathrm{N}} = -\omega_1 - \dot{\omega}\,\omega_1.\tag{21}$$

因此得

$$G_{\mathrm{N}} = -\frac{1}{2}q_1^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2.\tag{22}$$

最后,求统一对称性(20)式导致的守恒量. 命题 1 的(9)式给出 Noether 守恒量

$$I_{\mathrm{N}} = \omega_1^2 - \frac{1}{2}q_1^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2 = \frac{1}{2}\omega_1^2 - \frac{1}{2}q_1^2 = \mathrm{const}.\tag{23}$$

(20)式显然满足条件(10)式.(11)式给出

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0,\tag{24}$$

它有解

$$\mu = \omega_1 - t.\tag{25}$$

由(20)和(25)式,并利用命题 2,得到 Hojman 守恒量

$$I_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\omega_1} = (\omega_1 - t)^{-1} = \mathrm{const}.\tag{26}$$

注意到

$$\tilde{X}^{(1)}(L^*) = \omega_1 + \dot{\omega}_1\omega_1 = 2\omega_1,$$
$$\tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(1)}(L^*)] = 2\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1 = 2,$$

则由(14)式得到

$$G_{\mathrm{F}} = -2t.\tag{27}$$

因此,命题 3 给出新型守恒量

$$I_{\mathrm{F}} = 2\omega_1 - 2t = \mathrm{const}.\tag{28}$$

[1] Noether E 1918 *Math. Phys.* **KI** 235
[2] Djukić D S, Vujanović B D 1975 *Acta Mech.* **23** 17
[3] Li Z P 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1659 (in Chinese) [李子平 1981 物理学报 **30** 1659]
[4] Liu D 1991 *Sci. China* A **34** 419
[5] Bahar L Y, Kwatny H G 1987 *Int. J. Non-Linear Mech.* **22** 125
[6] Mei F X 1993 *Sci. China* A **36** 1456
[7] Mei F X 2000 *Appl. Mech. Rev.* **53** 283
[8] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京:科学出版社)]
[9] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 973
[10] Mei F X, Wu R H, Zhang Y F 1998 *Acta Mech. Sin.* **30** 468 (in Chinese) [梅凤翔、吴润衡、张永发 1998 力学学报 **30** 468]
[11] Mei F X 1999 *Chin. Sci. Bull.* **44** 318
[12] Mei F X 2000 *Acta Mech.* **141** 135
[13] Zhang H B 2002 *Chin. Phys.* **11** 1
[14] Mei F X 2000 *J. Beijing Institute of Technology* **9** 120
[15] Wang S Y, Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5
[16] Xu Z X 2002 *J. Beijing Institute of Technology* **22** 412 (in Chinese) [许志新 2002 北京理工大学学报 **22** 412]

[17] Qiao Y F, Zhang Y L, Han G C 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1051 (in Chinese) [乔永芬、张耀良、韩广才 2003 物理学报 **52** 1051]

[18] Zhand Y, Mei F X 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 1058

[19] Hojman S A 1992 *J*. *Phys*. *A*: *Math*. *Gen*. **25** L291

[20] Luo S K, Mei F X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 666 (in Chinese) [罗绍凯、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 666]

[21] Qiao Y F, Zhao S H, Li R J 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2035 (in Chinese) [乔永芬、赵淑红、李仁杰 2004 物理学报 **53** 2035]

[22] Wu H B, Xu X J, Wang S Y *et al* 2004 *J*. *Beijing Institute of Technology* **24** 469 (in Chinese) [吴惠彬、许学军、王树勇等 2004 北京理工大学学报 **24** 469]

[23] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2004 *Chin*. *Quart*. *Mech*. **25** 286 (in Chinese) [许学军、梅凤翔、秦茂昌 2004 力学季刊 **25** 286]

[24] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 4021 (in Chinese) [许学军、梅凤翔、秦茂昌 2004 物理学报 **53** 4021]

[25] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 1999

[26] Mei F X, Xu X J, Zhang Y F 2004 *Acta Mech*. *Sin*. **20** 668

[27] Mei F X 1988 *Special Problems in Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 1988 分析力学专题(北京 北京工业学院出版社)]

[28] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p95 (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京:北京理工大学出版社) 第 95 页]

Unified symmetry of the holonomic system in terms of quasi-coordinates*

Xu Xue-Jun[1)2)†] Mei Feng-Xiang[1)]

1) (*Department of Mechanics*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

2) (*Department of Physics*, *Zhejiang Normal University*, *Jinhua* 321004, *China*)

(Received 21 April 2005; revised manuscript received 20 May 2005)

Abstract

This paper discusses the unified symmetry of a holonomic mechanical system in terms of quasi-coordinates under special infinitesimal transformations in which time is not varied. The differential equations of motion of the system are given. The definition and the criterion of the unified symmetry for the system are presented. A new conserved quantity, besides the Noether conserved quantity and the Hojman conserved quantity, is deduced from the unified symmetry. An example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: quasi-coordinate, holonomic system, unified symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10272021) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China (Grant No. 20040007022).

† E-mail: xxj@zjnu.cn