第 54 卷 第 12 期 2005 年 12 月
1000-3290/2005/54(12)/5525-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.54,No.12,December,2005

(2+1)维非线性 KdV 方程的新孤子结构

何宝钢[1)2)]　徐昌智[1)2)]　张解放[1)]

1)(浙江师范大学非线性物理研究所,金华　321004)

2)(金华教育学院物理系,金华　321000)

(2004 年 10 月 15 日收到;2005 年 3 月 22 日收到修改稿)

通过选取另一类种子解,给出了(2+1)维非线性 KdV 方程的一类变量分离新解.适当地选择变量分离新解中的任意函数和条件函数,揭示了一类新型孤子结构,如周期性孤波结构、环状孤子结构、曲线型孤子结构等.可以发现(2+1)维非线性 KdV 方程存在的这类新型孤子结构,是无法通过以往文献中给出的通用变量分离表达式得到的,而且这类新型孤子结构对于实际自然现象的解释有积极的意义.

关键词:变量分离法,(2+1)维非线性 KdV 方程,新孤子结构

PACC:0340,0230

1.引　　言

孤子反映的是一类非常稳定的自然现象,体现了一大类非线性相互作用的若干特征,并为许多物理问题的解释提供启示.近几十年来,孤子研究的领域更趋于扩展和深化,不仅被迅速应用于物理学的各个分支,而且也被迅速应用于生物、化学、材料、天体、通信等自然科学的各个领域.在 2+1 维非线性模型中,由于 Boiti,Leon,Martina 和 Pempinelli 的开拓性工作[1],在各方向上以指数方式衰减的,被称为 dromion 的局域相干结构的研究引起了物理学家和数学家的极大兴趣,已成为当今孤子理论研究的一个热点.自从楼森岳等[2]提出求解(2+1)维 Davey-Stewartsen(DS)方程的变量分离法后,近年来变量分离法在 2+1 维非线性模型应用上取得极大的成功,不仅揭示出一大类(2+1)维非线性演化方程,如(2+1)维 Nizhinik-Novikov-Veselov(NNV)方程、不对称的(2+1)维 NNV 方程、(2+1)维 Broer-Kaup 方程、(2+1)维不对称 DS 方程、(2+1)维 Schrödinger 方程、(2+1)维色散长波(DLW)方程、(2+1)维 sine-Gordon 方程、(2+1)维 Korteweg-de Vries(KdV)方程、(2+1)维长短波共振作用方程、(2+1)维 Maccari 方程、(2+1)维 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur(AKNS)方程、(2+1)维破裂孤子方程[3—35]等等,存在一类可以用

$$U = \frac{(a_0 a_3 - a_1 a_2) p_x p_y}{(a_0 + a_1 p + a_2 q + a_3 pq)^2} \tag{1}$$

形式表示的变量分离通式解,而且还发现了十分丰富的相干结构,如 dromions,solitoffs,peakons,compactons,foldons,lumps,呼吸子,瞬子,环孤子,局域混沌斑图,局域分形斑图结构等等.本文以一般的(2+1)维不可积的 KdV 模型[10]

$$u_t + u_{xxx} - a u v_x - b u_x v = 0, \tag{2}$$

$$u_x = v_y \tag{3}$$

为例研究一类新型的(2+1)维孤子结构.方程(2),(3)是(1+1)维浅水波方程[36,37]

$$v_{xxxt} + a v_x v_{xt} + b v_t v_{xx} - v_{xt} - v_{xx} = 0 \tag{4}$$

的(2+1)维的一个推广.虽然(4)式中的常数 a 和 b 在实际的物理问题中是任意选取的,然而仅当 $a = 2b$ 和 $a = b$ 时模型才是完全可积的[37—39].对于方程(2),(3),仅当 $a = b$ 时才是完全可积的[37,39].本文讨论方程(2),(3)在 $a = b$ 时的一类变量分离新解,并研究新型的孤子结构.

2.(2+1)维非线性 KdV 方程的变量分离新解

对于方程(2),(3),我们先假定 $b = a$,为了利用变量分离法,并做如下 Bäcklund 变换:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{6}{a}(\ln f)_{xy} + u_0, \\ v &= -\frac{6}{a}(\ln f)_{xx} + v_0, \end{aligned} \tag{5}$$

式中,$f \equiv f(x,y,t)$,$u_0 \equiv u_0(x,y,t)$,$v_0 \equiv v_0(x,y,t)$ 为实函数,u_0,v_0 为方程(2),(3)的一个任意种子解.

把(5)式代入方程(2)得如下形式:

$$\begin{aligned}&f^2(f_{xxxxy}+f_{xyt})+f(-f_yf_{xxxx}+2f_{xy}f_{xxx}\\&-4f_xf_{xxxy}-f_tf_{xy}-f_{xt}f_y-f_xf_{yt})\\&+(2f_yf_xf_{xxx}-6f_xf_{xy}f_{xx}+6f_x^2f_{xxy}+2f_xf_yf_t)\\&-av_{0x}f(ff_{xy}-f_xf_y)-au_{0x}f(ff_{xx}-f_x^2)\\&-av_0(f^2f_{xxy}-ff_yf_{xx}-2ff_xf_{xy}+2f_x^2f_y)\\&-au_0(f^2f_{xxx}-3ff_xf_{xx}+2f_x^3)=0.\end{aligned}\tag{6}$$

由于 u_0,v_0 为方程(2),(3)的一个任意的种子解,因而把(5)式代入方程(3),方程(3)自动满足.

文献[8]研究了 $a=3$ 时的情况,选取种子解 $u_0=0,v_0=v_0(x,t)$,及变量分离函数

$$f=1+a_1p(x,t)+a_2q(y,t)+Ap(x,t)q(y,t).\tag{7}$$

获得(2+1)维 KdV 方程的具有两个任意函数 $p(x,t),q(y,t)$的变量分离通解,

$$u(x,y,t)=\frac{2q_yp_x(a_1a_2-A)}{(1+a_1p+a_2q+Apq)^2},\tag{8}$$

$$v(x,y,t)=\frac{2(a_1+Aq)^2p_x^2}{(1+a_1p+a_2q+Apq)^2}-\frac{2(a_1+Aq)p_{xx}}{(1+a_1p+a_2q+Apq)}+v_0,\tag{9}$$

式中 $q(y,t),v_0(x,t)$有限制条件.经过深入研究,我们发现方程(2),(3)还可以选取如下种子解及变量分离函数:

$$u_0=u_0(y),\quad v_0=\lambda_0,\tag{10}$$

$$f=q_1+q_2p,\tag{11}$$

式中,$q_1\equiv q_1(y),q_2\equiv q_2(y),u_0\equiv u_0(y)$为变量 y 的任意函数,$p\equiv p(x,t)$为变量 x,t 的任意函数,λ_0 为任意常数.把(10),(11)式代入(6)式,经过整理后得

$$\begin{aligned}&(q_1q_{2y}-q_{1y}q_2)(p_{xt}+p_{xxxx}-a\lambda_0p_{xx})\\&-aq_1q_2u_0p_{xxx}-aq_2^2u_0(pp_{xx}-p_x^2)_x=0.\end{aligned}\tag{12}$$

由方程(12)可分离得到

$$u_0=\frac{c_0(q_1q_{2y}-q_{1y}q_2)}{q_1q_2},\tag{13}$$

$$p_t+p_{xxx}-ac_0p_{xx}-a\lambda_0p_x=0,\tag{14}$$

$$pp_{xx}-p_x^2=0.\tag{15}$$

方程(14),(15)有如下形式的三个解:

$$p_1(x,t)=\exp(kx+wt+x_0),\quad w=-k^3+ac_0k^2+a\lambda_0k;\tag{16a}$$

$$p_2(x,t)=\exp(-|kx+wt+x_0|),\quad w=-k^3+a\lambda_0k,\quad c_0=0,\tag{16b}$$

$$p_3(x,t)=\exp(|kx+wt+x_0|),\quad w=-k^3+a\lambda_0k,\quad c_0=0.\tag{16c}$$

从而我们获得(2+1)维 KdV 方程的具有任意函数 $q_1(y),q_2(y)$的另一类变量分离解

$$u(x,y,t)=\frac{c_0(q_1q_{2y}-q_{1y}q_2)}{q_1q_2}-\frac{6(q_1q_{2y}-q_{1y}q_2)p_x}{a(q_1+q_2p)^2},\tag{17}$$

$$v(x,y,t)=-\frac{6q_1q_2p_{xx}}{a(q_1+q_2p)^2}+\lambda_0,\tag{18}$$

式中 k,x_0,c_0,λ_0 为任意常数,函数 $p(x,t)$满足(16)式.从(17),(18)式可见,变量分离解中含有两个任意函数 $q_1(y),q_2(y)$,且场变量 $u(x,y,t)$的解(17)式是叠加型的.利用 $q_1(y),q_2(y)$函数的任意性,我们可以构造出(2+1)维 KdV 方程一类新的孤子结构.

3. 新型的(2+1)维孤子结构

以往文献都是以变量分离通式(1),也就是场变量 $u(x,y,t)$(8)式来构造(2+1)维的各类孤子结构.本文中,我们以场变量 $v(x,y,t)$(18)式来讨论相应的孤子结构,从而揭示出一些新孤子结构及其特征.

3.1. 孤立波结构

如果选择任意函数 $q_1(y),q_2(y)$及 $p(x,t)$为如下形式:

$$\begin{aligned}q_1&=15,\\q_2&=\exp(\cos(y)),\\p&=\exp(x-4t),\end{aligned}\tag{19}$$

且 $a=-3,c_0=0,\lambda_0=1$,则得到(2+1)维 KdV 方程的场变量 $v(x,y,t)$的周期型孤立波解,如图 1 所示.

如果选择任意函数 $q_1(y),q_2(y)$及 $p(x,t)$为如下形式:

$$\begin{aligned}q_1&=1,\\q_2&=\exp(\cos(y)),\\p&=\exp(-|x-4t-1|),\end{aligned}\tag{20}$$

且 $a=-3,c_0=0,\lambda_0=1$,则得到(2+1)维 KdV 方程

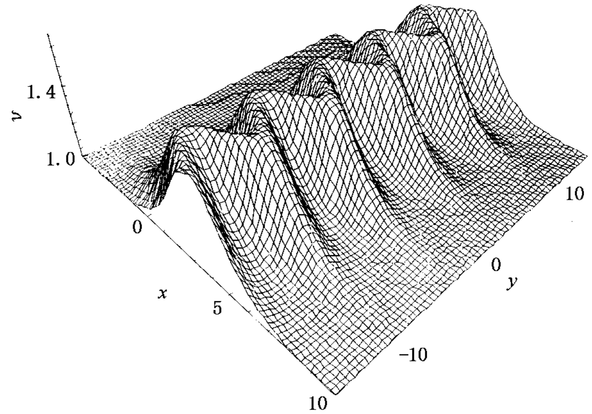

图 1　由(18)式表示的场变量 $v(x,y,t)$ 在(19)式下 $t=0$ 时的周期型孤波结构　$a=-3,c_0=0,\lambda_0=1$

的场变量 $v(x,y,t)$ 的另一类周期型孤波解，如图 2 所示.

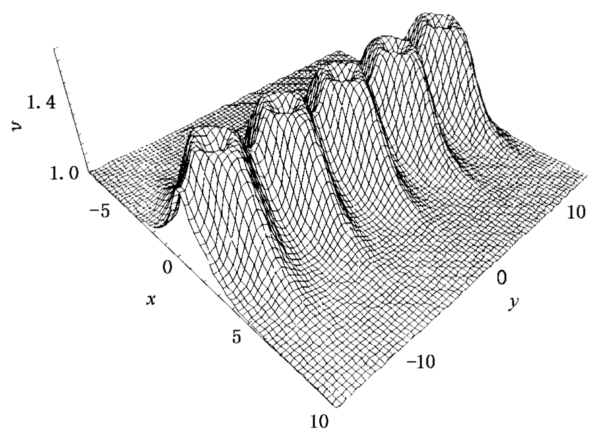

图 2　由(18)式表示的场变量 $v(,x,y,t)$ 在(20)式下 $t=0$ 时的周期型孤波结构　$a=-3,c_0=0,\lambda_0=1$

3.2. 环状孤子结构

如果选择任意函数 $q_1(y)$，$q_2(y)$ 及 $p(x,t)$ 为如下形式：

$$
\begin{aligned}
q_1 &= 15,\\
q_2 &= \exp(|\,y\,|),\\
p &= \exp(|\,2x-8t\,|),
\end{aligned}
\tag{21}
$$

且 $a=-3,c_0=0,\lambda_0=0$，则得到(2+1)维 KdV 方程的场变量 $v(x,y,t)$ 的环状局域孤子结构，如图 3 所示.

如果选择任意函数 $q_1(y)$，$q_2(y)$ 及 $p(x,t)$ 为如下形式：

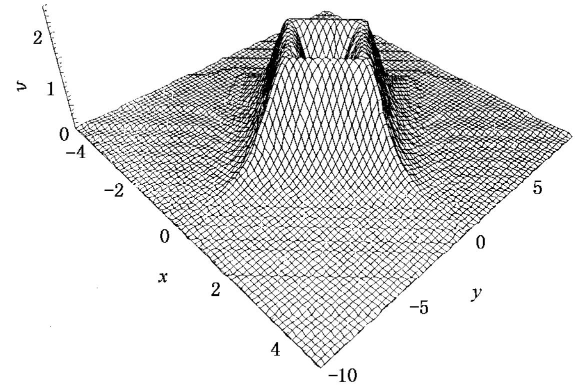

图 3　由(18)式表示的场变量 $v(x,y,t)$ 在(21)式下 $t=0$ 时的环状局域孤子结构　$a=-3,c_0=0,\lambda_0=0$

$$
\begin{aligned}
q_1 &= 50,\\
q_2 &= \exp(y^2),\\
p &= \exp(|\,x-t\,|),
\end{aligned}
\tag{22}
$$

且 $a=-3,c_0=0,\lambda_0=0$，则得到(2+1)维 KdV 方程的场变量 $v(x,y,t)$ 的另一类环状局域孤子结构，如图 4 所示.

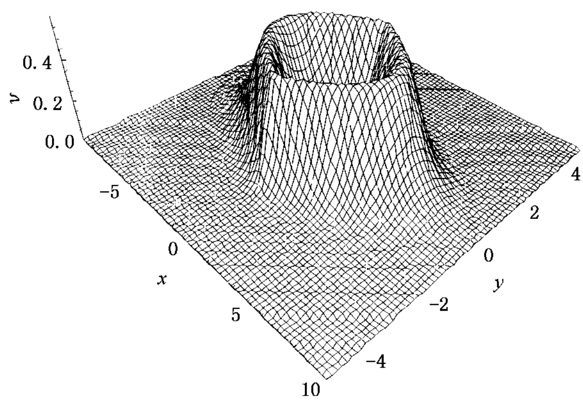

图 4　由(18)式表示的场变量 $v(x,y,t)$ 在(22)式下 $t=0$ 时的环状局域孤子结构　$a=-3,c_0=0,\lambda_0=0$

3.3. 曲线型孤子结构

如果选择任意函数 $q_1(y)$，$q_2(y)$ 及 $p(x,t)$ 为如下形式：

$$
\begin{aligned}
q_1 &= 30,\\
q_2 &= \exp(-y^2),\\
p &= \exp(|\,x-4t\,|),
\end{aligned}
\tag{23}
$$

且 $a=-3,c_0=0,\lambda_0=1$，则得到(2+1)维KdV方程

的场变量 $v(x,y,t)$ 的曲线型孤子结构，如图 5 所示.

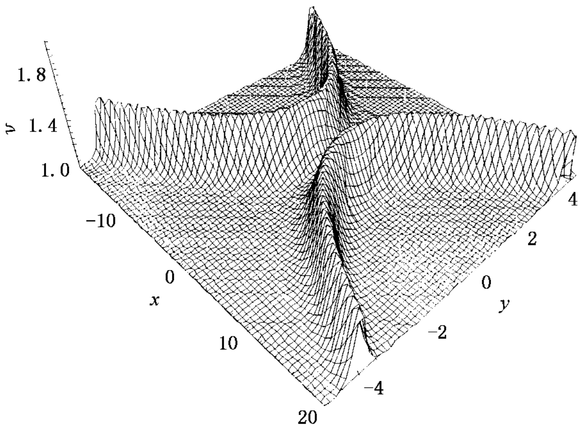

图5 由(18)式表示的场变量 $v(x,y,t)$ 在(23)式下 $t=0$ 时的曲线型孤子结构 $a=-3, c_0=0, \lambda_0=1$

如果选择任意函数 $q_1(y)$，$q_2(y)$ 及 $p(x,t)$ 为如下形式：

$$\begin{aligned} q_1 &= 2, \\ q_2 &= \exp(-|y-6|) \\ &\quad + \exp(-|y+6|), \\ p &= \exp(|x-4t|), \end{aligned} \tag{24}$$

且 $a=-3, c_0=0, \lambda_0=1$，则得到(2+1)维 KdV 方程的场变量 $v(x,y,t)$ 的另一类曲线型孤子结构，如图 6 所示.

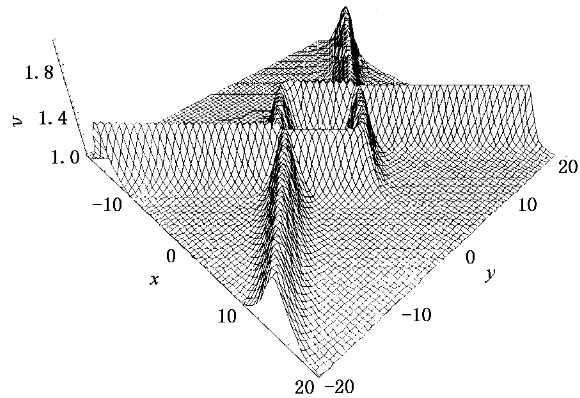

图6 由(18)式表示的场变量 $v(x,y,t)$ 在(24)式下 $t=0$ 时的曲线型孤子结构 $a=-3, c_0=0, \lambda_0=1$

4. 结 论

本文把变量分离方法应用于(2+1)维非线性 KdV 方程，通过选定另一类种子解，得到了(2+1)维非线性 KdV 方程的变量分离新解. 由于精确解中含有两个任意函数 $q_1(y)$，$q_2(y)$ 和一个条件函数 $p(x,t)$，通过适当地选择这些函数，可以获得新型孤子结构，如周期性孤波结构、环状孤子结构、曲线型孤子结构. 值得指出的是，(2+1)维非线性 KdV 方程存在的这类新型孤子结构，是无法通过以往文献中研究的通用变量分离表达式得到的，而且这类新型孤子结构对于实际自然现象的解释有积极的意义.

[1] Boit M，Leon J J P，Martina L *et al* 1988 *Phys*. *Lett*. A **132** 432

[2] Lou S Y，Lu J Z 1996 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **29** 4029

[3] Tang X Y，Lou S Y，Zhang Y 2002 *Phys*. *Rev*. E **66** 46601

[4] Lou S Y，Chen C L，Tang X Y 2002 *J*. *Math*. *Phys*. **43** 4078

[5] Tang X Y，Lou S Y 2002 *Chaos*，*Solitons and Fractals* **14** 1451

[6] Tang X Y，Chen C L，Lou S Y 2002 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **35** L293

[7] Lou S Y 2000 *Phys*. *Lett*. A **277** 94

[8] Lou S Y，Ruan H Y 2001 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **34** 305

[9] Lou S Y，Tang X Y，Chen C L 2002 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **19** 769

[10] Ruan H Y，Chen Y X 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 586 (in Chinese) [阮航宇、陈一新 2001 物理学报 **50** 586]

[11] Tang X Y，Lou S Y 2002 *Commun*. *Theor*. *Phys*. (Beijing) **38** 1

[12] Huang W H，Zhang J F，Sheng Z M 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 299

[13] Zhu J M，Ma Z Y，Zheng C L 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3284 (in Chinese) [朱加民、马正义、郑春龙 2004 物理学报 **53** 3284]

[14] Lou S Y 2002 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **35** 10619

[15] Lou S Y 2003 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **36** 3877

[16] Tang X Y，Lou S Y 2003 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **20** 335

[17] Hong K Z，Wu B 2003 *Commun*. *Theor*. *Phys*. (Beijing) **39** 393

[18] Zheng C L，Zhang J F 2002 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **19** 1399

[19] Zheng C L，Zhang J F，Sheng Z M 2003 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **20** 331

[20] Zhang J F，Zheng C L，Meng J P *et al* 2003 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **20** 448

[21] Zheng C L，Zhang J F，Huang W H *et al* 2003 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **20** 783

[22] Zheng C L，Zhu J M，Zhang J F 2003 *Commun*. *Theor*. *Phys*. (Beijing) **39** 261

[23] Zheng C L，Fang J P，Chen L Q 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1468 (in Chinese) [郑春龙、方建平、陈立群 2005 物理学报 **54** 1468]

[24] Zheng C L，Zhang J F 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 11

[25] Zheng C L，Zhang J F，Wu F M *et al* 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 472

[26] Zheng C L，Chen L Q，Zhang J F 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 592

[27] Ruan H Y 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1617 (in Chinese) [阮航宇 2004 物理学报 **53** 1617]

[28] Xu C Z, Zhang J F 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2407 (in Chinese) [徐昌智、张解放 2004 物理学报 **53** 2407]
[29] Zhang J F, Meng J P 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1006
[30] Zhang J F 2003 *Phys. Lett.* A **313** 401
[31] Zhang J F, Han P 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 705 (in Chinese) [张解放、韩 平 2002 物理学报 **51** 705]
[32] Zhang J F 2002 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **38** 277
[33] Zhang J F, Huang W H, Zheng C L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2627 (in Chinese) [张解放、黄文华、郑春龙 2002 物理学报 **51** 2627]
[34] Ruan H Y, Chen Y X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1313 (in Chinese) [阮航宇、陈一新 2003 物理学报 **52** 1313]
[35] Tang X Y, Lou S Y 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 335
[36] Espinosa A, Fujioka J 1994 *J. Phys. Soc. Jpn.* **63** 1280
[37] Clarkson P A, Mansfield E L 1995 *Acta Appl. Math.* **39** 245
[38] Abolwitz M J, Kaup D J, Newell A C *et al* 1974 *Stud. Appl. Math.* **53** 249
[39] Boit M, Leon J J P, Martina L *et al* 1986 *Inverse Probl.* **2** 271

New soliton structures in the (2+1)-dimensional nonlinear KdV equations

He Bao-Gang[1)2)] Xu Chang-Zhi[1)2)] Zhang Jie-Fang[1)]
1)(*Institute of Nonlinear Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China*)
2)(*Department of Physics, Jinhua Education College, Jinhua 321000, China*)
(Received 15 October 2004; revised manuscript received 22 March 2005)

Abstract

A new variable separation approach for the (2+1)-dimensional nonlinear KdV equations is obtained by using variable separation technique and selecting a class of new seed solutions. Some new kinds of periodic soliton structutres, ring form soliton structures and curvilinear soliton structures are revealed by selecting the arbitrary functions appropriately. These structures, which can not be obtained from the formula commonly used in literature, are first reported.

Keywords: variable separation approach, (2+1)-dimensional nonlinear KdV equation, new soliton structures
PACC: 0340, 0230