第 54 卷 第 12 期 2005 年 12 月
1000-3290/2005/54(12)/5530-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.12,December,2005
©2005 Chin.Phys.Soc.

二端面转轴相对转动非线性动力学系统的稳定性与近似解*

王 坤†

(燕山大学理学院,秦皇岛 066004)

(2005 年 4 月 6 日收到;2005 年 6 月 13 日收到修改稿)

建立了二端面转轴相对转动系统的非线性动力学方程.对于等力矩的动力学方程进行了定性分析,得到了方程的稳定性等性质.用平均方法求得方程在一定条件下的近似解.

关键词:非线性动力学方程,稳定性,极限环,近似解

PACC:0340D,0313,0316

1.引 言

在研究转动运动和转动力学过程中,1979 年 Bengtsson 和 Frauendorf[1] 通过对 14 种核子自旋转速的测量,发现各核子的自旋转速均有一最大值且各不相同,为了解释这一实验现象,1985 年 Carmeli[2,3] 提出了转动相对论力学理论,罗绍凯[4,5] 提出了转动相对论分析力学理论.近年来,相对论分析力学[6—8] 和转动相对论分析力学[4,5,9—11] 的研究发展了相对论力学.人们还研究了转动的非线性、变质量、Birkhoff 系统动力学及代数与几何结构等[12—24].文献[25—27]基于相对性原理,建立了圆柱体任意两个横截面间的相对转动线性动力学方程,并对系统进行了定量分析.

然而,线性模型对系统的描述是粗糙的,相对转动系统或转子系统一些常见的现象(如失稳性、分岔、混沌等),应用线性模型将无法分析和描述.本文建立二端面转轴系统相对转动的非线性微分方程模型,并对二端面等力矩系统(自治系统)进行了定性分析,用平均方法得到方程在一定条件下的近似解.

2.方程的建立

与文献[25]不同,在系统中取阻尼力(阻尼力矩)为

$$T_1^C = -C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^{\alpha}, \tag{1}$$

$$T_2^C = -C(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^{\alpha}, \tag{2}$$

其中 $\alpha > 1$ 且 $\alpha \neq 1$.将阻尼力矩公式代入动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^{n} (T_i^{(a)} - I_i \ddot{\theta}_i)\delta\theta_i = 0, \tag{3}$$

其中 $T_i^{(a)} = T_i + T_i^C$,则(3)式的第一项为

$$\sum_{i=1}^{n} T_i^{(a)} \delta\theta_i = \sum_{a=1}^{S}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i^{(a)} \frac{\partial\theta_i}{\partial q_r}\right)\delta q_r, \tag{4}$$

其中 $q_r(r=1,2,\cdots,S)$为广义坐标.广义力(广义力矩)为

$$Q_r = \sum_{i=1}^{n} T_i^{(a)} \frac{\partial Q_i}{\partial q_r} \quad (r = 1,2). \tag{5}$$

将(1),(2)式代入(5)式后得到本系统的广义力(广义力矩)为

$$\begin{aligned} Q_1 &= (T_1 + T_1^C)\frac{\partial Q_1}{\partial\theta_1} + (T_2 + T_2^C)\frac{\partial Q_2}{\partial\theta_2} \\ &= T_1 + T_1^C \\ &= T_1 - C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^{\alpha}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= (T_1 + T_1^C)\frac{\partial Q_1}{\partial\theta_1} + (T_2 + T_2^C)\frac{\partial Q_2}{\partial\theta_2} \\ &= T_2 + T_2^C \\ &= T_2 - C(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^{\alpha}. \end{aligned} \tag{7}$$

将(6),(7)式代入拉格朗日方程[25]

* 国家自然科学基金(批准号:40374048)资助的课题.

† E-mail:wangkun8992@yahoo.com.cn

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_i}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial E}{\partial q_r}+\frac{\partial U}{\partial q_r}=Q_r \qquad (r=1,2) \tag{8}$$

得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}J\ddot{\theta}_1+\frac{1}{6}J\ddot{\theta}_2+C(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)^{\alpha}\\&+K(\theta_1-\theta_2)=T_1,\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}J\ddot{\theta}_1+\frac{1}{3}J\ddot{\theta}_2-C(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)^{\alpha}\\&-K(\theta_1-\theta_2)=T_2.\end{aligned} \tag{10}$$

这里，J 为圆柱体任意两个横截面间的转动惯量，C 为阻尼系数，K 为扭转刚度，θ_1 和 θ_2 分别为两个横截面的转角，T_1 和 T_2 分别为两个横截面处的外加力矩.

在工程中最关心相对转角的变化，故(9)式减去(10)式得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}J(\ddot{\theta}_1-\ddot{\theta}_2)+2C(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)^{\alpha}\\&+2K(\theta_1-\theta_2)=T_1-T_2.\end{aligned} \tag{11}$$

在(11)式中，令

$$x=\theta_1-\theta_2,$$
$$K_1=\frac{12C}{J},$$
$$K_2=\frac{12K}{J},$$
$$f(t)=\frac{6}{J}(T_1-T_2),$$

得

$$\ddot{x}+K_1\dot{x}^{\alpha}+K_2x=f(t). \tag{12}$$

方程(12)就是二端面相对转动系统的非线性动力学方程，这是工程中描述转动动力传输性态的基本方程，是相似工程学、转动能量信息测试与获取、仪器标定等领域的理论基础. 圆柱体一般通过两个端面建立与其他构件的连接关系，其力学、位移条件也是通过两个端面给定和需要测出的. 建立圆柱体任意横截面间的相对转动动力学方程便得到了圆柱体相对转动的基本方程，它为进一步确定转动系统的动力学特性奠定了基础，对此方程进行定性和定量分析是非常重要的.

3. 自治系统的定性分析

在方程(12)中，取 $T_1=T_2$，即 $f(t)=0$，得二端面转轴相对转动系统的非线性动力学方程的自治方程(系统)，

$$\ddot{x}+K_1\dot{x}^{\alpha}+K_2x=0. \tag{13}$$

方程(13)的等价形式为

$$\begin{aligned}&\dot{x}=y,\\&\dot{y}=-K_1y^{\alpha}-K_2x.\end{aligned} \tag{14}$$

定理 1　方程(14)的零解是稳定的且是渐近稳定的.

证明　构造李雅普诺夫函数

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}K_2x^2,$$

由 $K^2>0$ 知，$V(x,y)$为定正函数，又

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\partial V}{\partial x}y+\frac{\partial V}{\partial y}(-K_1y^{\alpha}-K_2x)\\&=K_2xy+y(-K_1y^{\alpha}-K_2x)\\&=-K_1y^{\alpha}.\end{aligned}$$

可见$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$是常负的，于是零解稳定.

$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$ 只在 x 轴上发生，但

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-K_1y^{\alpha}-K_2x$$

在 x 轴上(不包括原点)，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-K_2x\neq 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0,$$

故由$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$的几何意义知，零解是渐近稳定的.

在(13)式中，取 $\alpha=3$，并令 $\dot{x}=-Z$，则得

$$\begin{aligned}&\dot{x}=-Z,\\&\dot{z}=K_2x-K_1Z^3.\end{aligned} \tag{15}$$

变形得

$$\begin{aligned}&\dot{x}=-Z,\\&\dot{z}=x+(K_2-1)x-K_1Z^3.\end{aligned} \tag{16}$$

定理 2　奇点 $O(0,0)$是方程(16)的稳定的细焦点.

证明　显然方程(16)以 $O(0,0)$为中心，令

$$\varphi(x,Z)=0,$$
$$\psi(x,Z)=(K_2-1)x-K_1z^3,$$

则

$$\begin{aligned}\Phi=&[\varphi_{xxx}+\varphi_{xZZ}+\psi_{xxZ}+\psi_{ZZZ}\\&+\varphi_{xZ}(\varphi_{xx}+\varphi_{ZZ})-\psi_{xZ}(\psi_{xx}+\psi_{ZZ})\\&-\varphi_{xx}\psi_{xx}+\varphi_{ZZ}\psi_{ZZ}]\big|_{(x,y)=(0,0)}\end{aligned}$$

$$= -3!K_1 < 0.$$

所以,$O(0,0)$是方程(16)的稳定的细焦点.

定理 3 方程(14)无闭轨,因此不存在极限环.

证明 首先,证明方程(14)在上半平面和下半平面内都不存在闭轨.令

$$X(x,y) = y,$$
$$Y(x,y) = -K_1 y^{\alpha} - K_2 x.$$

由于

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = -\alpha K_1 y^{\alpha-1},$$

因此方程(14)在上半平面 $y>0$ 和下半平面 $y<0$ 内无闭轨.

其次,证明方程(14)没有与 x 轴相交的闭轨.如果有这样闭轨 Γ,则存在 Γ 与 x 轴的两个焦点 A 和 B,使得向量(X,Y)在 A,B 两点上分别指向上半平面和下半平面,即函数 $Y(x,y)$在 A 与 B 点反号.由 $Y(x,y)$的连续性,在 x 轴 A 与 B 之间存在一点 $C(x_0,0)$,使得 Y 在 C 点为零,即 $Y(x_0,0)=0$,用公式表述为

$$(-K_1 y^{\alpha} - K_2 x)|_{(x_0,0)} = -K_2 x_0 = 0.$$

此即表明 C 点恰为原点 $O(0,0)$,即 A,B 在原点两侧,从而 Γ 与 y 轴相交,又 y 轴是一条轨线,由唯一性,它不能与 Γ 相交.这一矛盾证明不会有与 x 轴相交的闭轨,即无闭轨.

以上论证表明方程(14)无闭轨,因此不存在极限环.

4. 在小阻尼、弱周期强迫时方程的近似解

在方程(12)中,取 $\alpha=2$,$K_1=\varepsilon$,$f(t)=\varepsilon\cos t$,并令 $\dot{x}=y$,则有

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= -x+\varepsilon(\cos t - y^2).\end{aligned} \tag{17}$$

引入变换

$$\begin{aligned}x &= u\cos t + v\sin t,\\ y &= -u\sin t + v\cos t.\end{aligned} \tag{18}$$

将(18)式代入(17) 式得

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\varepsilon\sin t[\cos t - (-u\sin t + v\cos t)^2],\\ \dot{v} &= \varepsilon\cos t[\cos t - (-u\sin t + v\cos t)^2].\end{aligned} \tag{19}$$

经整理后得

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \varepsilon(\sin t\cos t + u^2\sin^3 t - 2uv\sin^2 t\cos t\\ &\quad + v^2\sin t\cos^2 t),\\ \dot{v} &= \varepsilon(\cos^2 t - u^2\sin^2 t\cos t\\ &\quad + 2uv\sin t\cos^2 t - v^2\cos^3 t).\end{aligned} \tag{20}$$

若方程(17)解的初始值取为 $x(0)=0$,$\dot{x}(0)=0$,则方程(20)相应的初始值为 $u(0)=x_0$,$v(0)=0$.又易求方程(20)的平均方程为

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= 0,\\ \dot{v}_1 &= \frac{1}{2}\varepsilon.\end{aligned} \tag{21}$$

方程(21)满足 $u_1(0)=x_0$,$v_1(0)=0$ 的解为

$$\begin{aligned}u_1(t) &= x_0,\\ v_1(t) &= \frac{1}{2}t\varepsilon.\end{aligned} \tag{22}$$

于是在$\frac{1}{\varepsilon}$时间范围内,方程(17)解的 ε 一阶近似为

$$\begin{aligned}x &= x_0\cos t + \frac{\varepsilon}{2}t\sin t,\\ y &= -x_0\sin t + \frac{\varepsilon}{2}t\cos t.\end{aligned} \tag{23}$$

5. 结 论

针对二端面相对转动系统建立了非线性动力学微分方程模型,证明它的自治系统的稳定性、不存在极限环.同时,在一定条件下也指出了它的奇点 $O(0,0)$是稳定的细焦点.当 $\alpha=2$ 时,我们用平均方法求得了方程在小阻尼、弱强迫时的近似解.

[1] Bengtsson R, Frauendorf S 1979 *Nucl. Phys.* A **327** 139

[2] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175

[3] Carmeli M 1986 *Inter. J. Theor. Phys.* **15** 89

[4] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16**(S1) 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16**(S1) 154]

[5] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45

[6] Luo S K 1987 *Tech. Mater. Commun.* **5** 31(in Chinese) [罗绍凯 1987 教材通讯 **5** 31]

[7] Luo S K 1991 *Shanghai J. Mech.* **12** 67 (in Chinese) [罗绍凯 1991 上海力学 **12** 67]

[8] Luo S K 1996 *Appl. Math. Mech.* **17** 683

[9] Jia L Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1043(in Chinese) [贾利群 2003 物理学报 **52** 1043]

[10] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712(in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[11] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1416(in Chinese)[罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]
[12] Luo S K, Fu J L, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383(in Chinese)[罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]
[13] Luo S K, Guo Y X, Chen X W *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2049(in Chinese)[罗绍凯、郭永新、陈向炜等 2001 物理学报 **50** 2049]
[14] Luo S K, Guo Y X, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2053(in Chinese)[罗绍凯、郭永新、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053]
[15] Luo S K, Chen X W, Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271
[16] Zhang Y L, Qiao Y F, Ma Y P 1999 *Acta Mech. Sol. Sin.* **20** 356 (in Chinese)[张耀良、乔永芬、马云鹏 1999 固体力学学报 **20** 356]
[17] Fang J H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1028 (in Chinese)[方建会 2000 物理学报 **49** 1028]
[18] Fu J L, Chen X W, Luo S K 1999 *Appl. Math. Mech.* **20** 1175 (in Chinese)[傅景礼、陈向炜、罗绍凯 1999 应用数学和力学 **20** 1175]
[19] Fang J H, Zhao S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 390 (in Chinese)[方建会、赵嵩卿 2001 物理学报 **50** 390]
[20] Qiao Y F, Li R J, Meng J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1000 (in Chinese)[乔永芬、李仁杰、孟　军 2001 物理学报 **50** 1000]
[21] Fu J L, Chen L Q, Xue Y *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2683(in Chinese)[傅景礼、陈立群、薛　纭等 2002 物理学报 **51** 2683]
[22] Fu J L, Wang X M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1023(in Chinese)[傅景礼、王新民 2002 物理学报 **49** 1023]
[23] Fu J L, Chen L Q, Luo S K *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2289 (in Chinese)[傅景礼、陈立群、罗绍凯等 2001 物理学报 **50** 2289]
[24] Fu J L, Chen L Q, Xue Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 256 (in Chinese)[傅景礼、陈立群、薛　纭 2003 物理学报 **52** 256]
[25] Dong Q L, Liu B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2191(in Chinese)[董全林、刘　彬 2002 物理学报 **51** 2191]
[26] Dong Q L, Wang K, Zhang C X *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 337 (in Chinese)[董全林、王　坤、张春熹等 2004 物理学报 **53** 337]
[27] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3987(in Chinese)[王　坤 2005 物理学报 **54** 3987]

Stability and approximate solution of nonlinear dynamic system of a cylinder with two end faces in relative rotation *

Wang Kun†

(*College of Science*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

(Received 6 April 2005; revised manuscript received 13 June 2005)

Abstract

For the nonlinear dynamics system of a cylinder with two end faces in relative rotation, a qualitative analysis of the autonomous system dynamics equation is performed. The stability of the solution of the equation is established, and approximate solution of the equation under special conditions is obtained by averaging method.

Keywords: nonlinear dynamics equation, steadiness, limit cycles, approximate solution

PACC: 0340D, 0313, 0316

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40374048).

† E-mail: wangkun8992@yahoo.com.cn