第 54 卷 第 12 期 2005 年 12 月
1000-3290/2005/54(12)/5534-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.12,December,2005

理想气体一维不定常流自模拟运动的基本微分方程*

卞保民 贺安之 李振华 杨 玲 张 平 沈中华 倪晓武

(南京理工大学信息物理与工程系,南京 210094)

(2005 年 3 月 9 日收到;2005 年 6 月 22 日收到修改稿)

将一维不定常流自模拟函数推广到一般形式,结合量纲理论和流体力学基本运动方程,导出总能量为常数情况下的理想气体一维不定常流自模拟运动基本微分方程组.该理论模型表明,由流体速率 u 和自模拟面速率 $\dot{r}$ 组成一个无量纲特性参数 L,用 L 作自变量时理想气体一维不定常流自模拟运动的规律具有常微分方程的最简数学形式.该模型克服了点爆炸 Taylor 自模拟温度函数原点附近趋于无穷大的问题,具有重要意义.

关键词:理想气体,自模拟运动,Taylor 模型

PACC:0340G,5190,9130M

1. 引 言

在理想气体自模拟运动理论研究中,从量纲分析出发,能够得到空气中强点源爆炸球面冲击波自模拟波前传播 Taylor 公式,

$$R(t) = \left(\frac{E_0}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{2/5}. \tag{1}$$

与(1)式对应的波后速度、密度、压强自模拟函数分别为

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{T}}(\zeta) &= \frac{u}{D}, \\ g_{\mathrm{T}}(\zeta) &= \frac{\rho}{\rho_0}, \\ h_{\mathrm{T}}(\zeta) &= \frac{p}{\rho_0 D^2}, \end{aligned} \tag{2}$$

式中,无量纲自变量 $\zeta = r/R$,ζ 的定义域为[0,1],其中 R 为球面冲击波阵面的半径,也是自模拟运动参量的参考边界,r 为自模拟运动区域内任意自模拟球面(该面上物理量分布具有自模拟性)的半径,且有 $r \leq R$;$D = \mathrm{d}R/\mathrm{d}t$ 为冲击波速度;ρ_0 为未受扰动的气体密度.(1),(2)式构成 Taylor 模型的基本核心.到目前为止,Taylor 模型仍然是球面自模拟运动研究领域内最具有权威性的理论而被广泛应用[1—3].Taylor 模型实际上是强点爆炸球面冲击波的近似自模拟运动理论.事实上,Taylor 公式与 1945 年美国第一颗原子弹爆炸强冲击波中场区域的测试结果符合得相当好,但是与近场处的第一个测试点的相对误差达到 30%[4].另一方面,根据 Taylor 模型计算出的自模拟温度函数在原点附近趋于无穷大[5].这些情况表明,该自模拟模型在理论上存在严重缺陷.

本文从理想气体一维不定常流自模拟运动的一般特性出发,将自模拟函数推广至全部以边界参量为基准的一般形式,结合一维不定常流流体力学偏微分方程组和量纲理论,导出了给定总能量情况下的一维不定常流自模拟运动基本微分方程组.新理论模型表明,由流体速率 u 和自模拟面速率 $\dot{r}$ 能组成一个无量纲特性参数 $L = u/\dot{r}$,用 L 作自模拟自变量时,理想气体一维不定常流自模拟函数均为常微分方程的形式.该组常微分方程的解函数,克服了 Taylor 模型自模拟温度函数原点附近趋于无穷大的问题,对于一维不定常流自模拟运动一般问题的研究具有重要意义.

2. 一维不定常流自模拟运动基本微分方程

设理想气体一维不定常流存在自模拟运动,$Y_1 = Y(R)$为自模拟运动区域内选定的参考面 R 上的特征量,且 $Y_1 \neq 0$.$Y(r,t)$为 r 处与 Y_1 对应的特征量,由于运动具有自模拟性质,则根据量纲理论[6]函

* 国家自然科学基金(批准号:60378003)资助的课题.

数 $Y(r,t)$ 可以用相应的自模拟函数 $y(\zeta)$ 来描述.取更一般的自模拟函数形式为

$$y(\zeta) = Y(r,t)/Y_1. \tag{3}$$

显然,当自变量 ζ 给定时,$y(\zeta)$ 为常数,即对应的特征量具有自相似性.又理想气体一维不定常流绝热运动微分方程组为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(\rho u)+\frac{N\rho u}{r}=0,\\&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial p}{\rho\partial r}=0,\\&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)+u\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)=0,\end{aligned}\tag{4}$$

式中 γ 为气体质量热容比.(4)式的第一式中 $N=2,1,0$ 时,分别对应于球面、柱面、平面三种对称运动状态.由(4)式可知,气体径向速度、压强、密度构成描述运动规律的三个特征量.根据(3)式,对应于三个特征量的自模拟函数分别为

$$\begin{aligned}v(\zeta)&=u/u_1,\\h(\zeta)&=p/p_1,\\g(\zeta)&=\rho/\rho_1.\end{aligned}\tag{5}$$

用自变量 ζ 代替空间坐标 r 时,特征量函数 $Y(r,t)$ 相应导数的转换公式为

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial t}&=y\frac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}t}-Y_1\frac{\mathrm{d}R}{R\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\ln\zeta},\\\frac{\partial Y}{\partial r}&=\frac{Y_1}{R}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\zeta}.\end{aligned}\tag{6}$$

将(5),(6)两式代入(4)式,并进行整理后可得自模拟函数满足的微分方程组,

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\ln\rho_1}{\mathrm{d}\ln R}+\frac{u_1}{D}\frac{v}{\zeta}\frac{\mathrm{d}\ln v}{\mathrm{d}\ln\zeta}+N\frac{u_1}{D}\frac{v}{\zeta}\\&\quad+\left(\frac{u_1}{D}\frac{v}{\zeta}-1\right)\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln\zeta}=0,\\&\frac{\mathrm{d}\ln u_1}{\mathrm{d}\ln R}+\left(\frac{u_1}{D}\frac{v}{\zeta}-1\right)\frac{\mathrm{d}\ln v}{\mathrm{d}\ln\zeta}\\&\quad+\frac{p_1}{u_1^2\rho_1}\frac{h}{v^2g}\frac{u_1}{D}\frac{v}{\zeta}\frac{\mathrm{d}\ln h}{\mathrm{d}\ln\zeta}=0,\\&\frac{\mathrm{d}\ln(p_1\rho_1^{-\gamma})}{\mathrm{d}\ln R}+\left(1-\frac{u_1}{D}\frac{v}{\zeta}\right)\\&\quad\times\left(\gamma\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln\zeta}-\frac{\mathrm{d}\ln h}{\mathrm{d}\ln\zeta}\right)=0.\end{aligned}\tag{7}$$

用函数 ε 代表自模拟区域内气体动能密度和内能密度的比值,即

$$\begin{aligned}\varepsilon&=\frac{\rho u^2}{2}\Big/\frac{p}{\gamma-1}\\&=\left(\frac{\rho_1u_1^2}{2}\Big/\frac{p_1}{\gamma-1}\right)\frac{gv^2}{h}.\end{aligned}\tag{8}$$

在自模拟函数中用新变量 L 代替 ζ,

$$L=\frac{u_1}{D}\frac{v}{\zeta}=\frac{u}{D\zeta}.\tag{9}$$

将(8),(9)两式代入(7)式,微分方程变成

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\ln\rho_1}{\mathrm{d}\ln R}+L\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\ln\zeta}+(N+1)L\\&\quad+(L-1)\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln\zeta}=0,\\&\frac{\mathrm{d}\ln u_1}{\mathrm{d}\ln R}+(L-1)\left(\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\ln\zeta}+1\right)\\&\quad+\frac{\gamma-1}{2\varepsilon}L\frac{\mathrm{d}\ln h}{\mathrm{d}\ln\zeta}=0,\\&\frac{\mathrm{d}\ln(p_1\rho_1^{-\gamma})}{\mathrm{d}\ln R}+(1-L)\\&\quad\times\left(\gamma\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln\zeta}-\frac{\mathrm{d}\ln h}{\mathrm{d}\ln\zeta}\right)=0.\end{aligned}\tag{10}$$

将方程组(10)中第一、第二式代入第三式,消去 $\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln\zeta}$,$\frac{\mathrm{d}\ln h}{\mathrm{d}\ln\zeta}$,可得

$$\frac{\mathrm{d}\ln\zeta}{\mathrm{d}L}+\frac{1}{L}\frac{\gamma(\gamma-1)L^2-2\varepsilon(1-L)^2}{\gamma(\gamma-1)(N+1)L^2+2\varepsilon(1-L)\frac{\mathrm{d}\ln u_1}{\mathrm{d}\ln R}-2\varepsilon(1-L)^2+(\gamma-1)L\frac{\mathrm{d}\ln p_1}{\mathrm{d}\ln R}}=0,\tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}L}+\frac{1}{1-L}\left\{\frac{1}{L}\frac{\left[\frac{\mathrm{d}\ln\rho_1}{\mathrm{d}\ln R}+(N+1)L\right][\gamma(\gamma-1)L^2-2\varepsilon(1-L)^2]}{\gamma(\gamma-1)(N+1)L^2+2\varepsilon(1-L)\frac{\mathrm{d}\ln u_1}{\mathrm{d}\ln R}-2\varepsilon(1-L)^2+(\gamma-1)L\frac{\mathrm{d}\ln p_1}{\mathrm{d}\ln R}}-1\right\}=0,\tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln h}{\mathrm{d}L}+\frac{2\varepsilon}{(\gamma-1)L^2}\left\{\frac{\left(1-L-\frac{\mathrm{d}\ln u_1}{\mathrm{d}\ln R}\right)[\gamma(\gamma-1)L^2-2\varepsilon(1-L)^2]}{\gamma(\gamma-1)(N+1)L^2+2\varepsilon(1-L)\frac{\mathrm{d}\ln u_1}{\mathrm{d}\ln R}-2\varepsilon(1-L)^2+(\gamma-1)L\frac{\mathrm{d}\ln p_1}{\mathrm{d}\ln R}}-(1-L)\right\}=0.\tag{13}$$

根据量纲理论，对于一维不定常流的自模拟运动，函数 ε 具有自模拟性质[6]，即函数 ε 仅是自模拟变量的函数. 能量的空间分布为

$$\begin{aligned}E(r,t) &= \int_0^r 4\pi\left(\frac{p}{\gamma-1}+\frac{\rho u^2}{2}\right) r^2 \mathrm{d}r \\ &= \frac{4\pi R^3 p_1}{\gamma-1}\int_0^\zeta h(1+\varepsilon)\zeta^2 \mathrm{d}\zeta \\ &= E(R,t)\,\frac{e(\zeta)}{e(1)}.\end{aligned} \tag{14}$$

(14)式表明，对应的能量分布也是自模拟的. 当运动总能量 $E(R,t)$ 为定值时，对于一维不定常流自模拟运动中给定的区域 ζ，单位时间内通过自模拟球面的净能量为零，且相应自模拟区域边界的运动速度 $\dot{r}=\zeta D$. 通过计算[5]可得

$$\varepsilon = \frac{L\gamma-1}{1-L}, \tag{15}$$

式中 L 相应的定义域为 $(\gamma^{-1},1)$. 将(15)式代入方程(11)—(13)可得

$$\frac{\mathrm{dln}\zeta}{\mathrm{d}L}+\frac{1}{L}\frac{\gamma(\gamma+1)L^2-2(\gamma+1)L+2}{[(N+1)\gamma+1-N]\gamma L^2+\dfrac{\mathrm{dln}\left(p_1^{\gamma-1}u_1^{2\gamma}R^{-2(\gamma+1)}\right)}{\mathrm{dln}R}L+\dfrac{\mathrm{dln}(R/u_1)^2}{\mathrm{dln}R}}=0, \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{dln}g}{\mathrm{d}L}+\frac{1}{1-L}\left\{\frac{1}{L}\frac{\left[\dfrac{\mathrm{dln}\rho_1}{\mathrm{dln}R}+(N+1)L\right][\gamma(\gamma-1)L^2+2(\gamma+1)L+2]}{[(N+1)\gamma+1-N]\gamma L^2+\dfrac{\mathrm{dln}\left(p_1^{\gamma-1}u_1^{2\gamma}R^{-2(\gamma+1)}\right)}{\mathrm{dln}R}L+\dfrac{\mathrm{dln}(R/u_1)^2}{\mathrm{dln}R}}-1\right\}=0, \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{dln}h}{\mathrm{d}L}+\frac{2(L\gamma-1)}{(\gamma-1)L^2}\left\{\frac{\left(1-\dfrac{1}{1-L}\dfrac{\mathrm{dln}u_1}{\mathrm{dln}R}\right)[\gamma(\gamma+1)L^2-2(\gamma+1)L+2]}{[(N+1)\gamma+1-N]\gamma L^2+\dfrac{\mathrm{dln}\left(p_1^{\gamma-1}u_1^{2\gamma}R^{-2(\gamma+1)}\right)}{\mathrm{dln}R}L+\dfrac{\mathrm{dln}(R/u_1)^2}{\mathrm{dln}R}}-1\right\}=0. \tag{18}$$

(16)—(18)式即为总能量给定的条件下，一维不定常流绝热自模拟运动空间相对尺度、气体密度、压强等自模拟函数以 L 为自变量的常微分方程. 可见，球面自模拟运动微分方程的最佳自变量是无量纲特性参数 L，而自模拟运动规律本质上是由于函数 ε 具有自模拟性质决定的. 基本微分方程中的参数 γ 代表理想气体的基本特性，而其余参量均具有 $\dfrac{\mathrm{dln}Y_1}{\mathrm{dln}R}$ 的形式，它们代表着边界状态对球面自模拟运动的制约. 由微分方程可得球面自模拟函数的一般解形式为

$$y(L) = y\left(L,\frac{\mathrm{dln}\rho_1}{\mathrm{dln}R},\frac{\mathrm{dln}p_1}{\mathrm{dln}R},\frac{\mathrm{dln}u_1}{\mathrm{dln}R},\gamma\right). \tag{19}$$

所以，在已知边界条件时，由方程(16)—(18)可计算出自模拟运动函数的全部解析解.

3. 一维不定常流自模拟运动微分方程一般特性的讨论

3.1. 自模拟运动特性参数 L

将自模拟区域边界的运动速度 $\dot{r}=\zeta D$ 代入(9)式，有

$$L = \frac{u}{\dot{r}}. \tag{20}$$

与 ζ 相比，特性参数 L 将气体运动和自模拟运动联系在一起，所以更能反映自模拟运动的基本特性. 又由(15)式得

$$L = \frac{1+\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}. \tag{21}$$

根据参数 L 的定义域可以推得，对应条件下自模拟函数 ε 值域的最大范围为 $(0,\infty)$.

3.2. 自模拟运动特性函数 $G(L)$

方程(16)可表示成

$$\frac{\mathrm{dln}\zeta}{\mathrm{dln}L}+\frac{B(L)}{G(L)}=0. \tag{22}$$

容易证明 $B(L)>0$. 又由于 $\dfrac{\mathrm{d}^2G(L)}{\mathrm{d}L^2}=2\gamma(3\gamma-1)>0$，则必定存在极小值 $G(L_m)$. 根据函数 $G(L)$ 在自变量 L 定义域内取值的不同，可分成 $G(L)>0$，$G(L)<0$ 以及 $G(L_m)=0$ 等三种情况.

在一个具体的自模拟运动中，特征参数 L 的定义域必须满足 $\zeta\leqslant1$ 的要求. 即从边界 R 处出发，自

模拟区域将沿 $\mathrm{d}\ln\zeta < 0$ 的方向延伸，根据(22)式由边界值 $G(L_1)$的符号决定 $\mathrm{d}L$ 的符号. 对于给定特性函数的零点情况，$G(L_{0-})=0$，可推得自模拟空间区域解满足 $0\leqslant\zeta\leqslant1$，并且 L_{0-} 处的状态与原点 $\zeta=0$ 处的状态对应. 对于 $G(L)>0$ 或 $G(L)<0$ 两种情况，则不存在全空间($0<\zeta\leqslant1$)意义的自模拟解. 可见自模拟运动与 $G(L)$的性质密切相关，故将 $G(L)$称为自模拟运动特性函数.

3.3. 自模拟运动特征参量 L 的定义域

由于特性函数 $G(L)$是自模拟运动边界处状态参量相对变化率的函数，在具体球面自模拟运动问题中，L 的定义域随着不同边界状态而变化. 若 $G(L)>0$，则 $\mathrm{d}L>0$，实际定义域为$(L_1,1)$;若 $G(L)<0$，则 $\mathrm{d}L<0$，实际定义域为(γ^{-1},L_1). 对于函数 $G(L)$零点，$G(L_{0-})=0$，则当 $L_{0-}<L_1$ 时有 $G(L_1)<0$，$\mathrm{d}L<0$，L 的定义域为(L_{0-},L_1) ;而当 $L_{0-}>L_1$ 时有 $G(L_1)>0$，$\mathrm{d}L>0$，L 的定义域为(L_1,L_{0-}).

如果自模拟运动出现 $G(L_1)=0$ 的状态，由微分方程组可得$\left.\frac{\mathrm{d}\ln\zeta}{\mathrm{d}L}\right|_{L_1}\to\infty$，$\left.\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}L}\right|_{L_1}\to\infty$，$\left.\frac{\mathrm{d}\ln h}{\mathrm{d}L}\right|_{L_1}\to\infty$. 这意味着在自模拟区域内 $\mathrm{d}L=0$，参量$\frac{u}{r}=\frac{DL_1}{R}$是个不变量，运动气体相对于原点的退行速度与距离成正比，呈现一种类似于 Habble 定律所描述的均匀膨胀状态. 则此时 L 的定义域为$[L_1]$.

3.4. 自模拟运动微分方程奇异点处的物理特性

若在 L 定义域内不存在 $G(L)$的零点，同时 $G(L_1)>0$，则沿 $\mathrm{d}L>0$ 的方向自模拟区域内最终达到 $L\to1$ 的状态. 由方程(16)知，当 $L\to1$ 时，有 $r\to r_m>0$. 其物理意义为 :此时自模拟运动区域不可能延伸到坐标原点，即自模拟状态的区域范围将以自模拟运动微分方程解的形式出现，而不可能在问题解出之前进行认定. 这揭示了 ζ 不能作为描述自模拟运动特征自变量的内在原因.

当 $L\to1$ 时，微分方程(17)，(18)出现奇异性. 由方程(17)可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{L\to1+0^-}(L-1)L\frac{\mathrm{d}g}{g\mathrm{d}L}\\
&=-\lim_{L\to1}\frac{\mathrm{d}g}{g}\\
&=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln R}\ln\left(p_1u_1^2R^{\frac{3}{(\gamma-1)}}\rho_1^{-\gamma}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln R}\ln\left(p_1u_1^2R^{3\gamma+\frac{4}{(\gamma-1)}}\right)}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

即对应 $L\to1$ 时，$\mathrm{d}g/g$ 趋于有限值. 当(23)式右端的数值大于零时，要求 $\mathrm{d}g<0$，则有 $g\to0$. 而当(23)式右端小于零时，要求 $\mathrm{d}g>0$，则有 $g\to\infty$ ！即 $g(L)$函数在此为间断函数.

同理，由方程(18)可推导 $L\to1$ 时 h 函数的类似特性.

计算可以证明，在 L 定义域内不存在二阶零点. 对于特性函数 $G(L)$在定义域内的一阶零点 L_{0-}，由(16)式可推得

$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{\mathrm{d}\ln\left[\left(p_1^{(\gamma-1)}u_1^{2\gamma}/R^{2(\gamma+1)}\right)\right]}{\mathrm{d}\ln R}\right\}^2\\
&+4\gamma(3\gamma-1)\frac{\mathrm{d}\ln(u_1/R)^2}{\mathrm{d}\ln R}>0.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

(24)式即为理想气体自模拟运动区域能延伸到原点时其边界状态必须满足的条件. 且当 $G(L_1)>0$，$L_1<L_{0-}$ 时，自模拟区域沿 $\mathrm{d}L>0$ 的方向延伸，由(17)式可以计算出

$$
\begin{aligned}
&\lim_{L\to L_{0-}}(L_{0-}-L)(L-1)L\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}L}\\
&=\lim_{L\to L_{0-}}(L_{0-}-1)L_{0-}\frac{\mathrm{d}g}{g}\\
&=-\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln R}\ln\Big(p_1^{(\gamma-1)L^2}u^{2\gamma L^2-2L}R^{4(\gamma+1)L^2-4\gamma L^3-L}\\
&\quad\times\rho^{-(\gamma+1)\gamma L^2+2(\gamma+1)L-2}\Big)\Big|_{L=L_{0-}},
\end{aligned}
\tag{25}
$$

式中 α 为大于零的数. 由于(25)式右端为有限值，即 $L\to L_{0-}$ 时 $\mathrm{d}g/g$ 趋于有限值. 当右端大于零时，由于$(L_{0-}-1)<0$，则可推得 $g\to0$. 反之，当右端小于零时，则有 $g\to\infty$ ！

同理可以推导出自模拟函数 g，h 在所有奇异点处的间断特性. 可见，微分方程奇异点处的物理量特性是由自模拟运动参考边界处物质的特性决定的. 对于强爆炸球面冲击波近似作为自模拟运动，由于原点为奇异点，计算结果表明，当波前传播公式(1)中的时间幂指数满足$\frac{3}{4}\frac{\gamma+1}{2\gamma+1}>n>\frac{2}{5}$时，与温度对应的自模拟函数 $h(0)/g(0)$才可能为有限值.

3.5. 自模拟运动中的均匀膨胀状态

当自模拟运动边界条件满足 $G(L_1)=0$ 时，在自模拟区域内 $\mathrm{d}L\equiv0$，u/r 为定值，自模拟区域内出

现一种类似于 Habble 定律所描述的均匀膨胀状态.

此时对于球面自模拟运动($N=2$),有

$$\frac{u_1}{D}=\frac{1}{(3\gamma-1)\gamma}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dln}R}\ln\left(R^{\gamma+1}p_1^{\frac{1-\gamma}{2}}u_1^{-\gamma}\right)\pm\sqrt{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dln}R}\ln\left(R^{\gamma+1}p_1^{\frac{1-\gamma}{2}}u_1^{-\gamma}\right)\right]^2-\frac{\mathrm{dln}(R/u_1)^{2\gamma(3\gamma-1)}}{\mathrm{dln}R}}\right\}. \tag{26}$$

(26)式给出了球对称自模拟均匀膨胀运动边界应满足的条件.这表明,理想气体球对称均匀膨胀状态可以作为总能量不变条件下的一维不定常流自模拟运动的解而存在.

3.6. 自模拟运动边界的相对性

若在自模拟运动区域内任意取两个边界 R_1,R_2,且有 $R_1=k_{21}R_2$,$k_{21}\leqslant 1$.对应的自模拟函数间的关系为

$$y_{21}(k_{21})=Y_1/Y_2. \tag{27}$$

就有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dln}Y_1}{\mathrm{dln}R_1}&=\frac{R_1}{Y_1}\frac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}R_1}\\&=\frac{k_{21}R_2}{y_{21}Y_2}\frac{\mathrm{d}(y_{21}Y_2)}{\mathrm{d}(k_{21}R_2)}\\&=\frac{R_2}{Y_2}\frac{\mathrm{d}Y_2}{\mathrm{d}R_2}\\&=\frac{\mathrm{dln}Y_2}{\mathrm{dln}R_2},\end{aligned} \tag{28}$$

即所有边界微分关系式都可以等价置换.对于特征量 $y_i=Y/Y_i$,有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dln}y_1}{\mathrm{d}L}&=\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1\mathrm{d}L}\\&=\frac{\mathrm{d}(Y/Y_1)}{(Y/Y_1)\mathrm{d}L}\\&=\frac{\mathrm{d}(Y/y_{21}Y_2)}{(Y/y_{21}Y_2)\mathrm{d}L}\\&=\frac{\mathrm{d}(Y/Y_2)}{(Y/Y_2)\mathrm{d}L}\\&=\frac{\mathrm{dln}y_2}{\mathrm{d}L},\end{aligned} \tag{29}$$

即微分方程也不因边界的选取而变化.其物理意义是:自模拟运动的参考边界具有相对性,以自模拟运动区域中的任意位置作边界,微分方程(16)—(18)保持不变.

3.7. Taylor 自模拟函数是强冲击波条件下一般自模拟函数的近似

冲击波基本关系式[5]给出冲击波阵面处介质状态参数与波前静止气体状态参数的关系.用马赫数 M 来表示,则有

$$\begin{aligned}u_1&=\frac{2D}{\gamma+1}(1-M^{-2}),\\p_1&=\frac{p_0}{\gamma+1}(2\gamma M^2-\gamma+1),\\\rho_1&=\rho_0\frac{\gamma+1}{\gamma-1+2M^{-2}}.\end{aligned} \tag{30}$$

在强冲击波条件下,(5)式的自模拟函数表达式转化成

$$\begin{aligned}u&=v(\zeta)\frac{2}{\gamma+1}D,\\\rho&=g(\zeta)\rho_0\frac{\gamma+1}{\gamma-1},\\p&=h(\zeta)\frac{2c^2}{\gamma+1}\rho_0D^2.\end{aligned} \tag{31}$$

可见 Taylor 自模拟函数(2)式是一般自模拟函数(5)式在强冲击波条件下的近似表达式.

4. 结 论

应用自模拟函数的更一般形式,在总能量不变的前提下,结合量纲理论可推导出理想气体一维不定常流自模拟运动微分方程组.这种新模型表明:无量纲参量 $L=u/\dot{r}$ 是描述球面自模拟运动的最佳自变量;气体自模拟空间坐标 ζ 是微分方程的解;理想气体球对称均匀膨胀是自模拟运动的一种特殊状态;自模拟边界具有相对性.新模型克服了 Taylor 自模拟温度函数原点附近无穷大的问题,且能够用于强爆炸冲击波、聚心冲击波、水中空泡以及天体物理动力学等[6—8]具有自模拟运动特性的各种现象的研究.一维不定常流自模拟运动具有均匀膨胀特殊状态的结论,与宇宙学模型中哈勃定律相符.这可能预示着宇宙的整体运动具有某种自模拟特性.

[1] Mao S S，Mao X，Greif R *et al* 2001 *J. Appl. Phys.* **89** 4096

[2] Mori K，Komurasaki K，Arakawa Y 2004 *J. Appl. Phys.* **95** 5979

[3] Edens A D，Ditmire T，Hansen J F *et al* 2004 *Phys. Plasmas* **11** 4970

[4] Bian B M，Yang L，Cheng X *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 809 (in Chinese)［卞保民、杨 玲、陈 笑等 2002 物理学报 **51** 809］

[5] Li W X 2003 *One-dimensional Nonsteady Flow and Shock Waves* (Beijing: Nationl Defence Industy Press) p210，335，340 (in Chinese)［李维新 2003 一维不定常流与冲击波（北京：国防工业出版社）第 210，335，340 页］

[6] Седов Л. И. 1982 *Similar Method and Dimensional Theory in Mechanics* (Beijing: Science Press) p47，166，413 (in Chinese)［谢多夫 Л.И. 1982 力学中的相似方法与量纲理论（中译本）（北京 科学出版社）第 47，166，413 页］

[7] Zhang J 2004 *Fundaments of the Target Physics for Laser Fusion* (Beijing: Nationl Defence Industy Press) p207 (in Chinese)［张 钧 2004 激光核聚变靶物理基础（北京：国防工业出版社）第 207 页］

[8] Xia J F，Zhang J，Zhang J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 994 (in Chinese)［夏江帆、张 军、张 杰 2001 物理学报 **50** 994］

Basic differential equation of self-similar motion of one-dimensional nonsteady flow of ideal gas *

Bian Bao-Min He An-Zhi Li Zhen-Hua Yang Ling Zhang Ping

Shen Zhong-Hua Ni Xiao-Wu

(*Department of Information Physics and Engineering*，*Nanjing University of Science and Technology*，*Nanjing* 210094，*China*)

(Received 9 March 2005；revised manuscript received 22 June 2005)

Abstract

Self-similar function of one-dimensional nonsteady flow is extended to a general form. With total energy kept constant，basic differential equation of self-similar motion of one-dimensional nonsteady flow of ideal gas is derived using dimension theory in combination with the basic motion equations of hydromechanics. When a non-dimensional natural parameter L，which is the ratio of velocity of fluid (u) and self-similar surface ($\dot{r}$)，serves as the independent variable，the theoretical model reveals that self-similar law of non-dimensional nonsteady flow of ideal gas has the simplest mathematical form. The model overcomes the difficulty of divergence at the origin of self-similar function of Taylor and thus has significant importance.

Keywords：ideal gas，self-similar motion，Taylor's model

PACC：0340G，5190，9130M

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60378003).