第 54 卷 第 12 期 2005 年 12 月
1000-3290/2005/54(12)/5554-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.12, December, 2005

瓮模型中多粒子动力学的研究*

陈 波[1)†] 童培庆[2)]

1)(南京邮电大学通达学院,南京 210003)
2)(南京师范大学物理科学与技术学院,南京 210097)
(2005 年 2 月 4 日收到,2005 年 7 月 29 日收到修改稿)

研究了处于热库中的多颗粒在两个和多个瓮中的运动.通过求解含噪声项的一维朗之万方程,获得颗粒的位置和速度,并分析了其运动状态.研究发现,在高温下系统处于对称态的时间较长,反之系统将会出现多个定态.所有运动颗粒的速率分布都满足 Gauss 分布,非对称态的有效温度 T_2 与弹性恢复系数 r 有良好的指数关系.

关键词:多颗粒,多瓮,速率分布,有效温度
PACC:0520D,0590,0250,9820E

1. 引 言

近十几年来,对运动颗粒物质及其非平衡态的研究引起了人们的广泛关注[1—11].运动的颗粒由于非弹性碰撞而发生能量的损失,因此这种开放系统必须有外界驱动才能维持其能量的平衡,从而达到某种非平衡定态.对这种颗粒体系的分析是目前非平衡态统计力学研究的一个新的典型.

最近一系列的实验表明:处于不同外界条件下的颗粒物质在空间分布上有多种可能的定态[1—4],且其速率分布不满足一般的 Gauss 分布[5,6].在一定的条件下,系统将会处于非对称定态,并形成所谓颗粒物质的"集团"(cluster)现象.如果类似于定义分子气体的温度那样将颗粒物质的平均动能定义为有效温度,我们发现,在产生稳定的颗粒集团现象时每个隔间温度并不相同[7],这与分子气体达到稳定时温度处处相等有所不同.这种奇异行为也是与颗粒物质运动中的能量损耗相关,粒子数较多的隔间中每个颗粒碰撞的概率就更大,碰撞机会也更多,所以其平均动能越小,相应的温度就越低.

为解释相关的实验现象,Lipowski 等[7]考虑了一个简单的 2 隔间系统,称为 2 瓮模型.与早期的 Ehrenfest 瓮模型不同的是 2 瓮模型中颗粒跃迁概率与一个虚拟的温度有关,而 Ehrenfest 瓮模型并没有涉及到这一点[8].取温度 $T = T_0 + \Delta(1 - n)$,其中 n 表示隔间中的粒子数密度,文献[7]从该温度出发定性解释了部分实验现象.最近 Cecconi 等[9]提出了一个简单的动力学模型,用于模拟颗粒在 2 瓮系统中随外界驱动的分布变化.考虑两个硬球在一维双稳态势阱中运动,以此形象地模拟 2 瓮模型.硬球受到外界热库对其作用,以此模拟外界驱动.上述两种作用的相对强弱将使颗粒分布从对称定态转变为非对称定态,即对称破缺态,从而产生非平衡态相变,出现集团现象.

Cecconi 等[9]的工作仅考虑了 2 个粒子在 2 个瓮中的运动,对于多个粒子和多瓮情况下颗粒的动力学行为并没有提及,而这种情况对于颗粒物质的非平衡态研究将是个很有趣的问题.本文在 Cecconi 等的研究工作基础上,考虑多个硬球在 2 瓮系统和 3 个硬球在 3 瓮系统的位置分布、速率分布以及各种状态下的能量关系,并与前人的研究作了比较.

2. 模型及计算方法

我们考虑有 n 个处于热库中的非弹性硬球(以此模拟颗粒物质)分别在一维双稳态和三稳态外势场中运动(这两种势能可分别模拟 2 瓮和 3 瓮系

* 国家自然科学基金(批准号:10175035)资助的课题.
† E-mail:channel_bar_11@hotmail.com

统），势能表达式分别为

$$U(x) = -ax^2/2 + bx^4/4, \tag{1}$$

$$U(x) = \begin{cases} -A\,|\cos(Bx)| & |x| \leqslant \dfrac{3\pi}{2B}, \\ \infty & |x| > \dfrac{3\pi}{2B}. \end{cases} \tag{2}$$

每个硬球都受到与其速率成正比的摩擦力和由于热库对其作用而产生随机外力的作用.无碰撞时每个硬球的运动都遵从朗之万方程，

$$M\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = -M\gamma\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} - U'(x_i) + \xi_i(t), \tag{3}$$

式中，$x_i(i = 1, 2, \cdots, n)$表示第 i 个硬球所在的位置，γ 为摩擦系数，M 为硬球质量，$\xi_i(t)$为高斯白噪声项，表示外界对体系的热驱动，这里取

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0,$$

$$\langle \xi_i(t)\xi_j(s) \rangle = 2MK_\mathrm{b}T_\mathrm{b}\gamma\delta_{ij}(t-s),$$

其中 T_b 为热库温度.具体的模型中取 $M = 1$，$K_\mathrm{b} = 1$，$a = 1.5$，$b = 0.05$，$A = 10.25$，$B = 2.5$，硬球直径 $d = 1.0$. 采用求解含噪声项的二阶 Runge-Kutta 方法来求解上述方程[12]，从而获得每一时刻硬球的位移与速率.在第 i 个球与第 j 个球碰撞发生时，满足如下速率变化规律：

$$v_i' = v_i - \frac{1+r}{2}(v_i - v_j), \tag{4}$$

式中 r 表示两球的弹性恢复系数，取 $0 \leqslant r \leqslant 1$. $r = 0$ 表示两球发生完全非弹性碰撞，$r = 1$ 表示完全弹性碰撞，即两球碰撞时速度互换、总能量不发生变化.由于本文只考虑硬球在一维势阱中的运动碰撞，所以有 $i = j \pm 1$.

3. 模拟结果

首先，我们选择势能方程(1)来模拟多粒子在 2 瓮中的运动.图 1 示出了中间两相邻小球的间距随运动时间的变化关系.

如果 4 个球两两处于不同势阱，表示体系处于对称态，其余状态为非对称态.4 个小球在一维双稳态外势中总运动时间 $t = 3500$，体系在该运动过程中处于对称态和非对称态的时间分别记为 t_1，t_2. 如果 $t_1 > t_2$，体系处于对称态的时间将大于非对称态的时间；如果 $t_1 < t_2$，则系统将有更长的时间处于非对称态.图 2 给出了不同热库温度 T_b 下各状态的运动时间 t. 从图 2 中可发现：在热库温度 T_b 较低时，系统在非对称态的时间 t_2 明显大于对称态时间 t_1，随着热库温度的逐渐增高，两曲线逐渐靠拢直到 t_1 大于 t_2. 这一过程定性地表明了当外界驱动较小时，系统将稳定于非对称态，即颗粒趋于集团化；而当外界驱动达到一定强度时，系统将稳定于对称态，两个势阱中的颗粒数均等.这与 Cecconi 等采用平均占据时间 τ_1，τ_2 来描述系统分布状态的计算结果类似，说明多粒子和 2 个粒子的运动一样，在不同的热库温度下表现不同的分布状态.

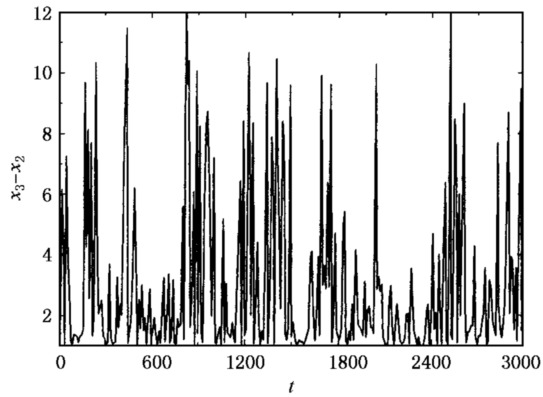

图 1　相邻两小球的间距随着运动时间的变化　$n = 4$，$\gamma = 0.1$，$r = 0.9$，$T_\mathrm{b} = 10.0$

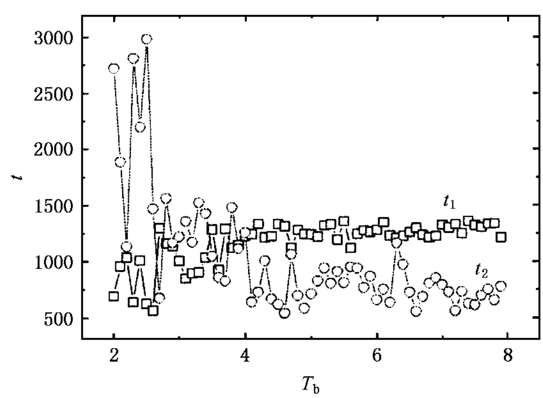

图 2　对称态时间 t_1 和不对称态时间 t_2 随热库温度的关系　$n = 4$，$\gamma = 0.1$，$r = 0.9$，总运动时间 $t = 3500$

随后研究三隔间的振动颗粒系统，选择外势能方程(2)，取 $n = 3$，$A = 10.25$，$B = 2.5$，热库温度 $T_\mathrm{b} = 4.0$，摩擦系数 $\gamma = 0.1$，弹性恢复系数 $r = 0.9$. 我们研究 3 个小球的分布状态，把 3 个小球分别分布在 3 个势阱的状态称为对称态，其余称为非对称态.同样计算时间 t_1，t_2 与热库温度的关系，其结果和处于双稳态外势颗粒的分布规律相似，即热库温度较低时非对称态所占据时间比对称态的时间长，随

着热库温度的升高对称态逐渐占据主要地位.

在 3 瓮模型中,外界驱动是影响颗粒分布的因素之一,另一重要的参量就是弹性恢复系数 r,它能够反映颗粒在碰撞中能量的耗散强弱,但文献[9]并没有对此进行讨论.下面我们进一步研究弹性恢复系数 r 对分布状态的影响.取 $n=3$,热库温度 $T_b=4.0$,摩擦系数 $\gamma=0.1$,硬球在 3 个势阱中运动时两种不同分布状态的时间与弹性恢复系数的关系见图 3.从图 3 可知,当弹性恢复系数较小时,也就是当两球碰撞能量损失较大时,非对称态将占据绝大多数时间,系统将会处于非对称定态,并形成颗粒集团;当弹性恢复系数较大时,对称态时间 t_1 多于非对称态时间 t_2,表明此时系统处于对称态的概率较大.从这个结果我们不难发现,系统所处的状态不仅与外界驱动强度相关,还与其自身的能量耗损强度密不可分.

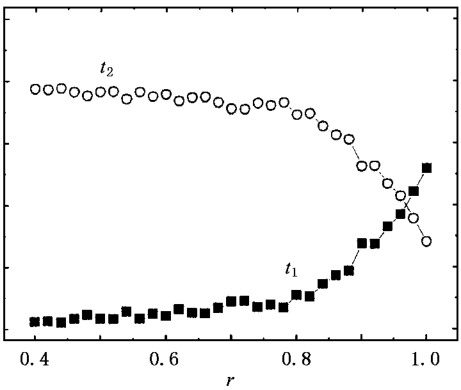

图 3 三稳态外势中的对称态时间 t_1 和不对称态时间 t_2 随弹性恢复系数 r 的关系 总运动时间 $t=20000$

颗粒物质在运动中的速率分布也能在某个程度上反映颗粒的分布状态.一般而言,系统中存在非对称态时,其速率不满足 Gauss 分布,但这并非为定论.Cecconi 等[9]并没有研究其速率分布规律,为了解该颗粒模型的速率分布情况,我们分别考虑了硬球个数 $n=4$,$n=8$,处于双稳态外势和硬球 $n=3$ 处于三稳态外势的运动情况来研究不同隔间数及不同粒子数对颗粒速率分布的影响.

首先观察硬球在双稳态外势中运动的速率分布.发现无论参量 n,r,γ 如何变化,每个硬球在运动过程中都很好地满足 Gauss 速率分布,见图 4.这说明在我们研究的这种动力学模型中,即使颗粒的分布出现集团现象,颗粒处于非对称态,每个粒子的速率还是满足 Gauss 分布的.当弹性恢复系数 r 变小时,分布曲线将变陡峭,峰值变大而宽度变小,颗粒的速率趋向零附近.当摩擦系数 γ 变大时,分布曲线的波峰峰值降低而宽度变大,如果增加小球数目,发现小球在速率为零的概率增加.

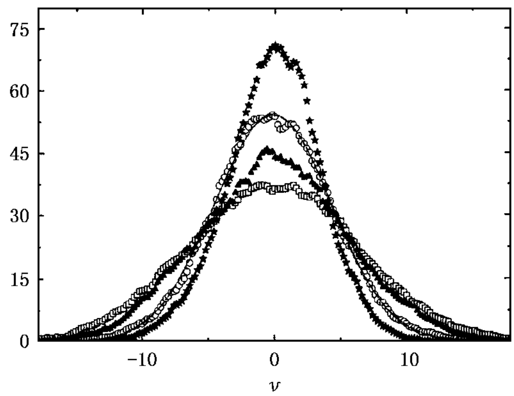

图 4 双稳态外势不同参数下的速率分布 ○ $n=4$, $r=0.9$, $\gamma=0.1$;□ $n=4$, $r=0.9$, $\gamma=0.2$;▲ $n=4$,$r=1.0$, $\gamma=0.1$;★ $n=8$, $r=0.9$, $\gamma=0.1$;——是对 ○ 的拟合.总运动时间 $t=3500$

观察硬球在三稳态外势中的速率分布,见图 5.当弹性恢复系数 r 变小时,分布曲线将变陡峭,峰值变大而宽度变小.当摩擦系数 γ 变大时,分布曲线的波峰峰值降低而宽度变大.我们计算了多种不同深度势阱中粒子的速率分布,发现在热库温度不变的前提下,速率分布与势阱的深度无关,而只与摩擦系数、弹性恢复系数相关.

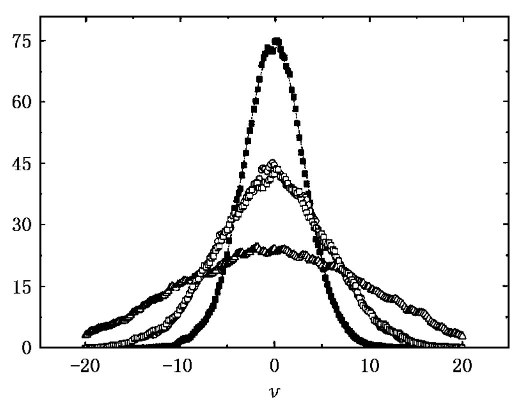

图 5 三稳态时的速率分布 ■ $r=0.8$, $\gamma=0.1$;○ $r=1.0$, $\gamma=0.1$;△ $r=1.0$, $\gamma=0.3$;▲ $r=1.0$, $\gamma=0.1$, $a=20.5$.——是对■的拟合

对于颗粒物质,传统意义上的温度概念已经失去意义.一般而言,颗粒物质的‘有效温度’与颗粒的平均动能成正比.接下来我们分析体系在对称态和非对称态的有效温度.以上已述及,对于颗粒物质,

体系的温度可由系统中颗粒的平均动能来定义.为此可定义两个有效温度如下:

$$T_1 = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t_1}\int_0^t \mathrm{d}s\sum_{i=1}^{n}[v_i^2(s)]\Theta[-x_i(s)],$$
$$T_2 = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t_2}\int_0^t \mathrm{d}s\sum_{i=1}^{n}[v_i^2(s)]\Theta[x_i(s)],\quad(5)$$

式中,t_1,t_2 分别表示系统处于对称态和不对称态的时间,T_1,T_2 分别表示两种状态下系统的有效温度.观察三隔间系统中这两个有效温度与弹性恢复系数 r 的关系,发现当热库温度 $T_b=4.0$ 保持不变时,对称态温度 T_1 在 4.0 附近徘徊,几乎不变,而非对称态温度 T_2 随 r 呈现很好的指数关系,见图 6.无论 r 如何变化,对称态温度总比非对称态温度高.图 3 已表明,在 r 较大时对称态在颗粒分布中占主要地位.由此我们可知:体系对称态有效温度并非完全低于非对称态有效温度,有效温度的高低不能决定体系处于何种定态.这与前人对于颗粒分布状态和颗粒温度关系的结论有所差别[6,7,9].对于一般的颗粒物质,人们普遍认为定态的温度要比其他状态的温度低.

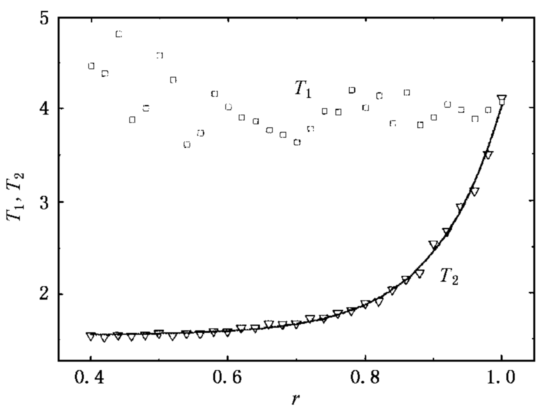

图 6　不同弹性恢复系数 r 时的有效温度 T_1,T_2

分析本文模型中的颗粒物质,我们不难发现粒子除有动能之外还具有势能,即使处于同一个隔间的不同颗粒,由于其位置的不同而具有不同的势能.既然系统温度与系统状态不能相对应,我们随后考虑系统总能量与系统分布状态之间的关系.定义对称态和非对称态的总能量 W_1,W_2,

$$W_1 = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t_1}\int_0^t \mathrm{d}s\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}v_i^2(s)+\sum_{i=1}^{n}U_i(s)\right]\Theta[-x_i(s)],$$
$$W_2 = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t_2}\int_0^t \mathrm{d}s\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}v_i^2(s)+\sum_{i=1}^{n}U_i(s)\right]\Theta[x_i(s)].\quad(6)$$

观察总能量随着弹性恢复系数的变化,见图 7,我们发现这时在 $r>0.95$,对称态总能量 W_1 低于非对称态总能量 W_2.因此,在本文的模型中,系统能量的大小决定了系统会稳定于何种状态,系统稳定时总能量最低.

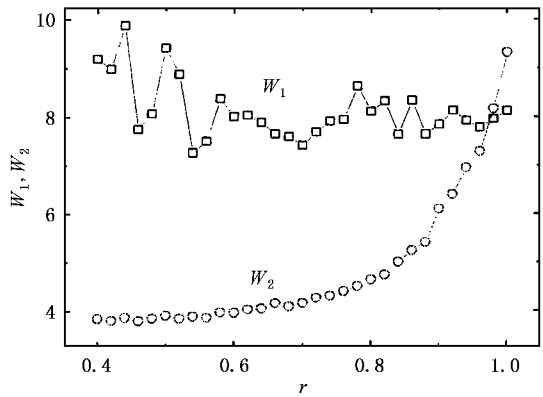

图 7　不同弹性恢复系数 r 时的总能量 W_1,W_2

4. 结　　论

本文通过求解一维朗之万方程的方法,确定了小球在 2 个和 3 个势阱中运动的位置以及速度,来模拟颗粒物质运动的瓮模型.外界温度升高、弹性恢复系数增大或是摩擦系数减小都能使体系更长时间处于稳定对称态.定量地表明了颗粒物质分布状态和这三个参量的关系.对于该模型中颗粒物质的速率,发现颗粒具备良好的 Gauss 分布,而不管外界参量如何变化或是体系中是否出现集团现象.对于体系的有效温度,当碰撞系数 $r<1$ 且 T_b 较小时,非对称态的有效温度 T_2 总是低于对称态温度 T_1,并且 T_2 与 r 具有良好的指数关系.系统在定态时能量最低.

[1] van der Meer D, van der Weele K, Lohse D 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 174302

[2] Meerson B, Pöschel T, Bromberg Y 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 024301

[3] Eggers J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 5322

[4] Schlichting H J, Nordmeier V 1996 *Math. Naturwiss. Unterr.* **49** 323

[5] Kudrolli A, Henry J 2000 *Phys. Rev.* E **62** 1489

[6] Goldhirsh I, Zanetti G 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1619
[7] Lipowski A, Droz M 2002 *Phys. Rev.* E **65** 031307
[8] Ehrenfest A, Ehrenfest T 1990 *The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in the Mechanics* (New York: Dover)
[9] Cecconi F, Puglisi A, Baldassarri A *et al* 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 061301
[10] Hu L, Yang P, Xu T *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 879 (in Chinese) [胡 林、杨 平、徐 亭 等 2003 物理学报 **52** 879]
[11] Deng M L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2029 (in Chinese) [邓茂林 2004 物理学报 **53** 2029]
[12] Honeycutt R L 1992 *Phys. Rev.* A **45** 600

Dynamics of many particles in the urn model*

Chen Bo[1)]† Tong Pei-Qing[2)]

1) (*College of Tongda, Nanjing University of Posts and Telecommunication, Nanjing 210003, China*)

2) (*College of Physical Science and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China*)

(Received 4 February 2005; revised manuscript received 29 July 2005)

Abstract

We study the behavior of many particles moving in the 2-urn and 3-urn systems driven by a stochastic heat bath. The velocities and the positions of the particles are calculated through noise activated 1-D Langevin function. We find the time in which the system is in equilibrium becomes longer than the time in which the system is in non-equilibrium as the bath temperature increases. The velocity distribution of the particles is always Gaussian. The effective temperature T_2 characterizing non-equilibrium state obeys the power law with the restitution coefficient r.

Keywords: many particles, multi-urn, velocity distribution, effective temperature

PACC: 0520D, 0590, 0250, 9820E

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10175035).

† E-mail: channel_bar_11@hotmail.com