

耦合 Duffing-van der Pol 系统的随机稳定性及控制*

李 伟† 徐 伟 赵俊锋 靳艳飞

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2004 年 11 月 30 日收到, 2005 年 6 月 21 日收到修改稿)

应用拟 Hamilton 系统的随机平均法和随机稳定化策略, 研究了高斯白噪声激励下耦合 Duffing-van der Pol 系统的随机稳定性及其在半无限长时间内的稳定性控制问题. 结果表明, 适当地控制参数可有效实现随机稳定化.

关键词: 随机平均法, 拟 Hamilton 系统, Lyapunov 指数, 随机最优控制

PACC: 0540, 1110E, 1110L

1. 引 言

经过数十年的发展, 随机激励作用下动力学系统的稳定性理论已渐趋成熟, 应用也遍及物理、经济等领域^[1-4]. 然而, 与其密切相关的随机稳定性控制问题, 由于种种原因, 目前还处于发展初期. 所谓随机稳定性控制, 是指通过选择一定的性能指标, 设计一个随机最优控制律, 使得原不稳定的随机动力系统变得稳定, 或者使原来稳定的系统变得更加稳定, 即实现随机稳定化. 当前, 有关随机动力系统的稳定化研究大部分局限于线性情况, 而非线性随机动力系统稳定化的研究只有少量成果可循^[5-8]. 在随机动力系统理论中, 最大 Lyapunov 指数是研究系统稳定性和稳定性控制的重要工具之一^[9, 10], 它常被定义为 Euclidean 范数的形式. 然而对于复杂的 Hamilton 系统, 特别是高维的随机 Hamilton 系统, 用 Euclidean 范数求解最大 Lyapunov 指数几乎不可能. 针对这一点, 朱位秋^[11]定义了一种新的范数来求解最大 Lyapunov 指数, 进而提出了相应的可以应用于非线性动力系统的随机稳定性控制策略^[12, 13].

Duffing 系统和 van der Pol 系统是非线性动力系统中最具代表性的两个系统, 在单自由度耦合情况下的系统稳定性及稳定性控制已有一些结果^[14]. 但对于两自由度耦合系统, 据作者所知, 还未有结果. 此耦合系统不仅在结构上更加复杂, 在计算上更加

困难, 并且其动力学性质也可能发生重大的改变, 有必要对此情况下系统的随机稳定性以及随机稳定控制进行深入的研究.

本文将朱位秋提出的随机稳定性控制策略应用到随机激励下两自由度耦合 Duffing-van der Pol 系统, 利用 Lyapunov 指数法和边界类别法分别研究此系统及其受控系统的随机稳定性和稳定性控制问题, 并给出了相关数值结果.

2. Duffing-van der Pol 系统的随机平均

考虑参激作用下两自由度耦合的 Duffing-van der Pol 系统, 其 Lagrange 运动方程如下:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1 + \beta_1(1 - \lambda_1 X_1^2 - \lambda_2 X_2^2)\dot{X}_1 + \alpha\omega_1^2 X_1(\omega_1^2 X_1^2 + \omega_2^2 X_2^2) + \omega_1^2 X_1 &= b_1 X_1 \xi_1(t), \\ \ddot{X}_2 + \beta_2(1 - \lambda_1 X_1^2 - \lambda_2 X_2^2)\dot{X}_2 + \alpha\omega_2^2 X_2(\omega_1^2 X_1^2 + \omega_2^2 X_2^2) + \omega_2^2 X_2 &= b_2 X_2 \xi_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

式中, α 是强非线性刚度项参数, $\xi_i(t)$ 是均值为零、噪声强度为 $2D_i$ 的相互独立的高斯白噪声. 这里参数 $\beta_i, \lambda_i, b_i, D_i (i=1, 2)$ 都是正的 ϵ 阶小量.

引入变换 $q_1 = X_1, p_1 = \dot{X}_1, q_2 = X_2, p_2 = \dot{X}_2$ 和正则 Hamilton 方程

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

* 国家自然科学基金(批准号: 10472091, 10332030)和陕西省自然科学基金(批准号: 2003A03)资助的课题.

† E-mail: liwei@mail.nwpu.edu.cn

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (2)$$

可以将系统(1)变换为 Itô 意义下的随机微分方程, 此处 Wong-Zakai 相关项为零.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (3)$$

$$\dot{p}_i = \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} - c_{ii} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + f_{ii} \xi_i(t),$$

式中,

$$\begin{aligned} c_{ii} &= \beta_i(1 - \lambda_i q_1^2 - \lambda_i q_2^2), \\ f_{ii} &= b_i q_i \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (4)$$

这里, q_i 和 p_i 分别表示广义位移和广义动量, Hamilton 函数 $H(t)$ 表示系统的总能量. 令 $\varepsilon = 0$ 并忽略小项, 则 Hamilton 函数可以表示如下:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + U(q_1, q_2), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} U(q_1, q_2) &= \frac{1}{2}\omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 q_2^2 \\ &\quad + \frac{\alpha}{4}(\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2)^2. \end{aligned}$$

由于 Hamilton 函数是相应的 Hamilton 系统(3)的唯一独立首次积分, 所以系统(1)成为一个拟不可积的 Hamilton 系统^[11].

根据拟不可积 Hamilton 系统的随机平均法^[15-18], Hamilton 函数 $H(t)$ 依概率弱收敛于一维 Itô 微分过程,

$$dH = m(H)dt + \sigma(H)dB(t). \quad (6)$$

这里, $B(t)$ 是标准 Wiener 过程, $m(H)$ 和 $\sigma(H)$ 分别是 Itô 微分方程的漂移系数与扩散系数. 可以看出 $H=0$ 是系统的一个平凡解, 且方程(6)中漂移系数和扩散系数可以通过空间积分计算得出^[11],

$$m(H) = m_1 H + m_2 H^2 + m_3 H^3 \quad (H \rightarrow 0), \quad (7)$$

$$\sigma^2(H) = \sigma_1^2 H^2 + \sigma_2^2 H^3 \quad (H \rightarrow 0). \quad (8)$$

这里,

$$m_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{D_1 b_1^2}{\omega_1^2} + \frac{D_2 b_2^2}{\omega_2^2} - \beta_1 - \beta_2 \right), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{1}{6} \left(\frac{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2}{\omega_1^2} + \frac{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2}{\omega_2^2} \right) \\ &\quad + \frac{\alpha}{3}(\beta_1 + \beta_2), \end{aligned} \quad (10)$$

$$m_3 = -\frac{\alpha}{4} \left(\frac{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2}{\omega_1^2} + \frac{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2}{\omega_2^2} \right) \quad (11)$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{D_1 b_1^2}{\omega_1^2} + \frac{D_2 b_2^2}{\omega_2^2} \right),$$

$$\sigma_2^2 = -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{D_1 b_1^2}{\omega_1^2} + \frac{D_2 b_2^2}{\omega_2^2} \right). \quad (12)$$

3. 随机稳定性

令 $Z = [q^T, p^T]^T$, 由系统(3)可得 $Z=0$ 是系统(1)的唯一平凡解. 相应地, $H=0$ 是 Itô 微分方程(6)的唯一平凡解. 随机稳定性定义为: 对任意小的 $\varepsilon > 0$, 如果

$$\lim_{\|z_0\| \rightarrow 0} P\{\sup_{t \geq 0} \|Z(t, z_0)\| < \varepsilon\} = 1,$$

则平凡解 $Z=0$ 是概率 1 稳定的. 如果

$$\lim_{\|z_0\| \rightarrow 0} P\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|Z(t, z_0)\| = 0\} = 1,$$

则平凡解 $Z=0$ 是概率 1 渐近稳定的. 这里, $z_0 = Z(0)$ 是确定的初始状态, $\|Z\|$ 是 Z 的范数, 通常表示为 Euclidean 范数, 即 $\|Z\| = (Z_i Z_i)^{1/2}$. 根据 Oseledec 乘积遍历性定理^[19], 线性化系统的最大 Lyapunov 指数定义为 $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|Z(t, z_0)\|$. 其正负号可以决定随机动力系统的稳定性行为^[20], 即系统平凡解概率 1 渐近稳定的充分必要条件是最大 Lyapunov 指数小于零.

然而, 两自由度耦合的 Duffing-van der Pol 系统, 其线性化方程是 2×2 维的, 这在计算上增加了求解最大 Lyapunov 指数统计表达式的难度. 针对这一点, 朱位秋^[11]定义了一个新的范数, 他用 $H^{1/2}$ 来代替 Euclidean 范数, 并对此新范数给出了合理的解释.

3.1. 用 Lyapunov 指数法判断耦合的 Duffing-van der Pol 系统的随机稳定性

引入变换 $Y(t) = H^{1/2}(t)$, 由随机微分法则和平均 Itô 微分方程(6), 得到支配 $Y(t)$ 的扩散方程为

$$dY(t) = \alpha(Y)dt + b(Y)dB(t). \quad (13)$$

这里漂移项 $\alpha(Y)$ 和扩散项 $b(Y)$ 满足下列方程:

$$\begin{aligned} \alpha(Y) &= \frac{1}{2} Y^{-1} m(Y) \\ &\quad - \frac{1}{8} Y^{-3} \sigma^2(Y) |_{H=Y^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$b^2(Y) = \frac{1}{4} Y^{-2} \sigma^2(Y) |_{H=Y^2}.$$

将(9)-(12)式代入(14)式, 得

$$\begin{aligned} \alpha(Y) &= \frac{1}{2} \left(m_1 - \frac{1}{4} \sigma_1^2 \right) Y + \frac{1}{2} \left(m_2 - \frac{1}{4} \sigma_2^2 \right) Y^3 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_3 Y^5, \end{aligned} \quad (15)$$

$$b^2(Y) = \frac{1}{4}\sigma_1^2 Y^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^2 Y^4. \quad (16)$$

将方程(13)在 $Y=0$ 处线性化,可以得到

$$dY = a'(0)Hdt + b'(0)HdB(t), \quad (17)$$

其相应的解为

$$Y(t) = Y(0) \exp\left[\int_0^t (a'(0) - \frac{1}{2}b''(0))ds\right] + \int_0^t b'(0)HdB(s). \quad (18)$$

这样,平均 Itô 随机微分方程(6)的最大 Lyapunov 指数 λ_u 为

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln Y(t) \\ &= \frac{1}{2} \left[a'(0) - \frac{1}{2}b''(0) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}m_1 - \frac{1}{4}\sigma_1^2 \right). \end{aligned} \quad (19)$$

因此当 $\lambda_u < 0$ 时,即 $\left(\frac{D_1 b_1^2}{\omega_1^2} + \frac{D_2 b_2^2}{\omega_2^2}\right) < \frac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2)$ 时,平凡解 $H=0$ 是局部渐近稳定的.

3.2. 用边界类别法判断耦合 Duffing-van der Pol 系统的随机稳定性

需要注意的是,基于遍历假设的 Lyapunov 指数法可以判断系统平凡解的概率 1 局部稳定性,但却无法判断出系统平凡解的全局稳定性.为此,这里改用平均方程(6)的边界类别法来识别系统平凡解的全局稳定性.采用边界类别法是因为扩散过程在边界上的性态在很大程度上决定整个扩散过程的性态^[21].特别是一维扩散过程,其概率渐近稳定性可由该过程在边界上的性态确定.因此下面将主要分析扩散过程的两个边界.

首先考虑左边界 $H|_{Y^2=0}$.注意到漂移项 $a(Y)$ 和扩散项 $b(Y)$ 随 $Y \rightarrow 0$ 的渐近表达式为

$$a(Y) = \frac{1}{2} \left(m_1 - \frac{1}{4}\sigma_1^2 \right) Y + O(Y) \quad (Y \rightarrow 0), \quad (20)$$

$$b^2(Y) = \frac{1}{4}\sigma_1^2 Y^2 + O(Y^2) \quad (Y \rightarrow 0). \quad (21)$$

由于 $b^2(Y)|_{Y=H^{1/2} \rightarrow 0} = 0$,所以左边界 $H \rightarrow 0$ 是第一类奇异边界^[21],相应的扩散指数、漂移指数和特征标值分别为

$$\begin{aligned} x_1 &= 2, \\ y_2 &= 1, \\ c_1 &= \frac{4m_1 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2} \end{aligned}$$

$$= 5 - \alpha(\beta_1 + \beta_2) \left(\frac{D_1 b_1^2}{\omega_1^2} + \frac{D_2 b_2^2}{\omega_2^2} \right). \quad (22)$$

当 $c_1 > 1$ 时左边界 $H \rightarrow 0$ 是排斥自然的;当 $c_1 = 1$ 时是严格自然的;当 $c_1 < 1$ 时是吸引自然的^[21].左边界为吸引自然的意味着系统状态空间中内部的所有轨线都将渐近地收敛到左边界 $H=0$ 处,即系统平凡解处.

对于右边界 $H|_{Y^2 \rightarrow \infty}$.由于 $a(Y)|_{Y=H^{1/2} \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$,所以右边界 $H \rightarrow \infty$ 是第二类奇异边界,此时 $a(Y)$ 和 $b(Y)$ 随 $Y \rightarrow \infty$ 的渐近表达式为

$$\begin{aligned} a(Y) &= \frac{1}{2}m_3 Y^5 + O(Y^5) \\ &= -\frac{\alpha}{8} \left(\frac{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2}{\omega_1^2} + \frac{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2}{\omega_2^2} \right) Y^5 \\ &\quad + O(Y^5) \quad (Y \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} b^2(Y) &= \frac{1}{4}\sigma_2^2 Y^4 + O(Y^4) \\ &= -\frac{\alpha}{8} \left(\frac{D_1 b_1^2}{\omega_1^2} + \frac{D_2 b_2^2}{\omega_2^2} \right) Y^4 \\ &\quad + O(Y^4) \quad (Y \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (24)$$

相应地,扩散指数、漂移指数以及特征标值分别为

$$\begin{aligned} x_2 &= 4, \\ y_2 &= 5, \\ c_2 &= \frac{4m_3}{\sigma_2^2} \\ &= 2 \left(\frac{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2}{\omega_1^2} + \frac{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2}{\omega_2^2} \right) \\ &\quad \div \left(\frac{D_1 b_1^2}{\omega_1^2} + \frac{D_2 b_2^2}{\omega_2^2} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

注意到 $y_2 > x_2 - 1$, $a(+\infty) < 0$ 且 $y_2 > 1$,可知右边界 $H \rightarrow \infty$ 是进入边界^[21].右边界为进入边界意味着所有右边界上的轨线都将进入到系统空间内部,再被左边界吸引.

于是,系统平凡解概率 1 渐近全局稳定的充要条件可以归纳为:左边界是吸引自然的,同时右边界是进入的.因此,根据上述得到的限制条件,可得 $c_1 < 1$,亦即

$$\left(\frac{D_1 b_1^2}{\omega_1^2} + \frac{D_2 b_2^2}{\omega_2^2} \right) < \frac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2). \quad (26)$$

这一结论与应用 Lyapunov 指数法得到的结论正好符合,说明系统平凡解在条件(26)式下既是局部稳定的又是全局稳定的.相反,平凡解 $H=0$ 不稳定的条件是

$$\left(\frac{D_1 b_1^2}{\omega_1^2} + \frac{D_2 b_2^2}{\omega_2^2} \right) > \frac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2). \quad (27)$$

图 1 和图 2 分别给出了系统(1)与平均后系统(6)在稳定条件(26)式和不稳定条件(27)式下的数值结果,可以看出数值结果与理论分析是一致的.

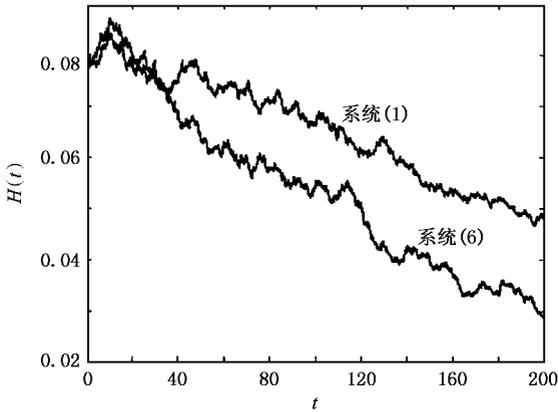


图 1 系统(1)与平均后系统(6)在条件(26)式下的能量函数初值为 $q_1(0)=0.18, p_1(0)=0.1, q_2(0)=0.15, p_2(0)=0.1$. 参数值分别为 $\omega_1=1, \omega_2=2, \alpha=2, \beta_1=0.001, \beta_2=0.005, \lambda_1=0.4, \lambda_2=0.6, b_1=0.2, b_2=0.4, D_1=0.01, D_2=0.01$

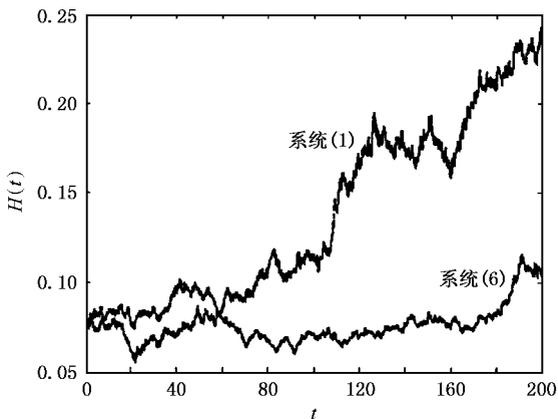


图 2 系统(1)与平均后系统(6)在条件(27)式下的能量函数初值为 $q_1(0)=0.18, p_1(0)=0.1, q_2(0)=0.15, p_2(0)=0.1$. 参数值分别为 $\omega_1=1, \omega_2=2, \alpha=2, \beta_1=0.001, \beta_2=0.002, \lambda_1=0.4, \lambda_2=0.6, b_1=0.3, b_2=0.5, D_1=0.05, D_2=0.02$

4. 受控系统的随机稳定性控制

受控的耦合 Duffing-van der Pol 振子运动方程可表示为

$$\ddot{X}_1 + \beta_1(1 - \lambda_1 X_1^2 - \lambda_1 X_2^2)\dot{X}_1$$

$$\begin{aligned} & + \alpha\omega_1^2 X_1(\omega_1^2 X_1^2 + \omega_2^2 X_2^2) + \omega_1^2 X_1 \\ & = b_1 X_1 \xi_1(t) + u_1, \\ & \ddot{X}_2 + \beta_2(1 - \lambda_2 X_1^2 - \lambda_2 X_2^2)\dot{X}_2 \\ & + \alpha\omega_2^2 X_2(\omega_1^2 X_1^2 + \omega_2^2 X_2^2) + \omega_2^2 X_2 \\ & = b_2 X_2 \xi_2(t) + u_2, \end{aligned} \quad (28)$$

式中 u_1 和 u_2 为控制项. 类似前面的分析, 其 Hamilton 函数收敛于部分平均的 Itô 微分方程

$$dH = \overline{m}(H)dt + \sigma(H)dB(t), \quad (29)$$

式中,

$$\overline{m}(H) = m(H) + \frac{\partial H}{\partial p_1} u_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2} u_2. \quad (30)$$

这里的 $m(H)$ 与(7)式一致.

以系统响应最小为目标, 考虑半无穷长时间区间 $[0, \infty)$ 内的无界控制, 相应的性能指标为

$$\mathcal{J}(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\mathcal{f}(H) + u^T N u] dt. \quad (31)$$

这里 N 是正定的对角矩阵, 假设 $N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}$, $N_i > \alpha$ ($i=1, 2$) 为控制参数. 这样控制问题相应的动态规划方程为

$$\begin{aligned} \min_u \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2(H) \frac{d^2 V}{dH^2} + u^T N u \right. \\ \left. + \frac{dV}{dH} \left[m(H) + \frac{\partial H}{\partial p_i} u_i \right] + \mathcal{f}(H) \right\} = \chi. \end{aligned} \quad (32)$$

这里

$$\chi = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\mathcal{f}(H) + u^{*T} N u^*] dt$$

是最优平均成本函数, 其中 u^* 为最优控制. 根据方程(32)的必要条件可得最优控制项的表达式为

$$u_i^* = -\frac{1}{2N_i} \frac{dV}{dH} p_i. \quad (33)$$

将 u_i^* 代入方程(32)取代 u_i , 得随机最优控制问题的最后动态规划方程

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^2(H) \frac{d^2 V}{dH^2} + m(H) \frac{dV}{dH} \\ - \frac{1}{4N_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right)^2 \left(\frac{dV}{dH} \right)^2 + \mathcal{f}(H) = \chi. \end{aligned} \quad (34)$$

由(33)式, 控制项可以改写为

$$u_1^* p_1 + u_2^* p_2 = -\frac{p_1^2}{2N_1} + \frac{p_2^2}{2N_2} \frac{dV}{dH}. \quad (35)$$

4.1. 采用 Lyapunov 指数法检验受控系统平凡解的局部稳定性

类似系统(1)的讨论方法, 以下分别采用最大

Lyapunov 指数法和边界类别法来检验平凡解的稳定性.

(35) 式在状态空间中完成平均后得到

$$p_1^2 = p_2^2 = \frac{1}{2}H + \mathcal{O}(H) \quad (H \rightarrow 0). \quad (36)$$

这样漂移系数和扩散系数随 $H \rightarrow 0$ 收敛于下列等式:

$$\begin{aligned} m(H) &= \frac{1}{2} \left[\frac{D_1 b_1^2}{\omega_1^2} + \frac{D_2 b_2^2}{\omega_2^2} - (\beta_1 + \beta_2) \right] H + \mathcal{O}(H) \\ &= m_1 H + \mathcal{O}(H) \quad (H \rightarrow 0), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(H) &= \frac{1}{3} \left(\frac{D_1 b_1^2}{\omega_1^2} + \frac{D_2 b_2^2}{\omega_2^2} \right) H^2 + \mathcal{O}(H^2) \\ &= \sigma_1^2 H^2 + \mathcal{O}(H^2) \quad (H \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (38)$$

为使动态规划方程(34)具有可解性,假设

$$f_1(H) - \chi = f_0 H + \mathcal{O}(H) \quad (H \rightarrow 0), \quad (39)$$

$$\frac{dV}{dH} = k + \mathcal{O}(H^0) \quad (H \rightarrow 0). \quad (40)$$

然后将(36)–(40)式代入(34)式,可解得

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{m_1 + (m_1^2 + f_0 n_0 / 2)^2} n_0, \\ n_0 &= \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

将(33)(35)(40)式代入(30)式,得到完全平均的 Itô 微分方程,其漂移系数变为

$$\bar{m}(H) = m_1 H - \frac{1}{4} n_0 k H + \mathcal{O}(H) \quad (H \rightarrow 0). \quad (42)$$

回顾(19)式,则支配受控系统平凡解的最大 Lyapunov 指数 λ_c 为

$$\begin{aligned} \lambda_c &= \frac{1}{2} \left[\bar{m}'(0) - \frac{1}{2} (\sigma'(0))^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m_1 - \frac{1}{8} n_0 k - \frac{1}{4} \sigma_1^2. \end{aligned} \quad (43)$$

显然,当 $\lambda_c < 0$ 时系统平凡解是局部渐近稳定的.

比较原系统与其受控系统的最大 Lyapunov 指数,两者之差为

$$\lambda_u - \lambda_c = \frac{1}{8} n_0 k. \quad (44)$$

因此,实现最优局部稳定性控制的关键问题是如何选取参数 f_0 和 N_i ,使得原系统在局部不稳定的情况下受控系统是局部稳定的.

4.2. 应用边界类别法检验受控系统全局稳定性

关于左边界 $H \rightarrow 0$,受控 Itô 微分方程(29)的漂

移系数和扩散系数随 $H \rightarrow 0$ 收敛于下列方程:

$$\bar{m}(H) = m_1 H - \frac{1}{4} n_0 k H + \mathcal{O}(H) \quad (H \rightarrow 0), \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(H) &= \frac{1}{3} \left(\frac{D_1 b_1^2}{\omega_1^2} + \frac{D_2 b_2^2}{\omega_2^2} \right) H^2 + \mathcal{O}(H^2) \\ &= \sigma_1^2 H^2 + \mathcal{O}(H^2) \quad (H \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (46)$$

相应的扩散指数、漂移指数和特征值分别为

$$\begin{aligned} x_3 &= 2, \\ y_3 &= 1, \end{aligned} \quad (47)$$

$$c_3 = \left(2m_1 - \frac{1}{2} n_0 k \right) / \sigma_1^2.$$

当 $c_3 < 1$ 时,左边界 $H \rightarrow 0$ 是吸引自然边界^[21],即

$$\left(2m_1 - \frac{1}{2} n_0 k \right) < \sigma_1^2.$$

关于右边界 $H \rightarrow \infty$,受控 Itô 微分方程(29)的漂移系数和扩散系数随 $H \rightarrow \infty$ 收敛于下列方程:

$$\begin{aligned} m(H) &= m_3 H^3 + \mathcal{O}(H^3) \\ &= -\frac{\alpha}{4} \left(\frac{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2}{\omega_1^2} + \frac{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2}{\omega_2^2} \right) H^3 \\ &\quad + \mathcal{O}(H^3), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(H) &= \sigma_2^2 H^3 + \mathcal{O}(H^3) \\ &= -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{D_1 b_1^2}{\omega_1^2} + \frac{D_2 b_2^2}{\omega_2^2} \right) H^3 \\ &\quad + \mathcal{O}(H^3). \end{aligned} \quad (49)$$

相应的扩散指数、漂移指数和特征值分别为

$$\begin{aligned} x_4 &= 3, \\ y_4 &= 3, \\ c_4 &= -\frac{2m_3}{\sigma_2^2}. \end{aligned} \quad (50)$$

由以上对各参数的假设可知, $m(+\infty) = -\infty$. 另一方面,当 $y_4 > x_4 - 1 > 1$ 时,根据对第二类奇异边界的划分,可知右边界 $H \rightarrow \infty$ 是进入边界.

因此,受控系统平凡解概率 1 渐近全局稳定的条件是扩散过程的左边界是吸引自然的,而右边界是进入的.为满足这一条件,只需 $c_3 < 1$,亦即

$$\left(2m_1 - \frac{1}{2} n_0 k \right) < \sigma_1^2. \quad (51)$$

5. 数值结果

下面将检验控制项对系统稳定性的影响.图 3 描述的是高斯白噪声激励下未控与受控 Duffing-van der Pol 系统的最大 Lyapunov 指数.从图 3 可以看出,

在相同参数下未控系统的 Lyapunov 指数都是正的,表示系统平凡解是不稳定的;而受控系统的 Lyapunov 指数都是负的,表示系统平凡解是稳定的.图 3 从 Lyapunov 指数的角度说明了控制项的确改变了系统本身的稳定性性质.注意到图 2 中的能量函数,不论对应原系统还是对应平均后系统,在平凡解邻域内随时间的增加而递增,即能量不断扩张,加剧系统运动,导致系统平凡解不稳定.相比之下,在适当选择控制参数 f_0 后,图 4 中受控系统的能量函数随时间增长趋于递减,即能量不断减少,导致系统运动,最后趋于稳定.图 4 从系统能量的角度再次说明在控制参数作用下系统稳定性得到了控制.图 5 和图 6 主要检验控制参数对结果的影响.取参数值 $f_0 = 0.08$,从图 5 可以看出受控系统(28)与平均后

系统(29)的能量以更快的速度衰减,最后收敛于系统平凡解处.进一步加大控制参数 f_0 ,由图 6 可见两系统能量迅速地收敛到平凡解处,并且系统(28)与平均后系统(29)也更加拟合,说明控制参数值 f_0 的增加不仅能够提高控制的效果,同时也可增加随机平均法对原系统的逼近程度.

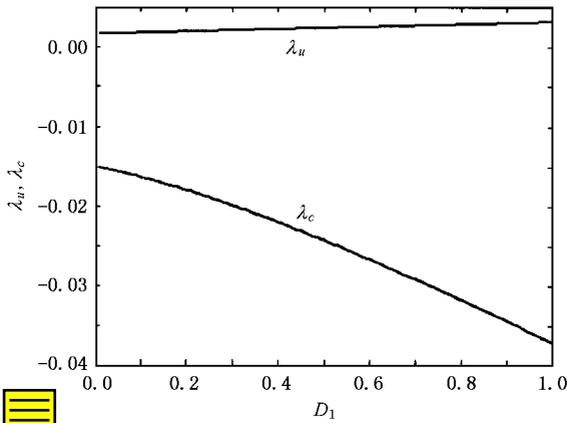


图 3 高斯白噪声激励下未控与受控系统的最大 Lyapunov 指数 参数为 $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \alpha = 2, \beta_1 = 0.001, \beta_2 = 0.002, \lambda_1 = 0.4, \lambda_2 = 0.6, b_1 = 0.3, b_2 = 0.5, D_2 = 0.02, N_1 = 1, N_2 = 2, f_0 = 0.001$

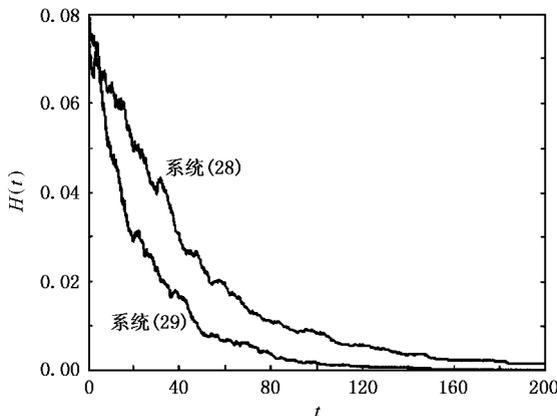


图 4 取 $f_0 = 0.001$ 时,受控系统(28)与平均后系统(29)的能量函数 初值与其余参数同图 2

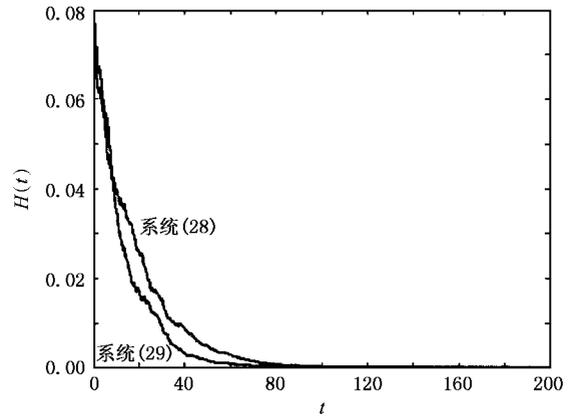


图 5 取 $f_0 = 0.08$ 时,受控系统(28)与平均后系统(29)的能量函数 初值与其余参数同图 2

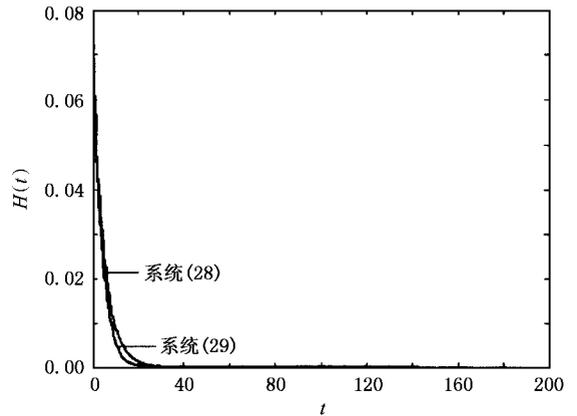


图 6 取 $f_0 = 0.1$ 时,受控系统(28)与平均后系统(29)的能量函数 初值与其余参数同图 2

6. 结 论

本文详细研究了高斯白噪声激励下耦合的 Duffing-van der Pol 系统的稳定性及稳定性控制.使用 Lyapunov 指数法和边界类别法分别讨论了系统的局部稳定性以及全局稳定性,得到的结果表明,系统平凡解若是局部稳定的则是全局稳定的.对于受控系统,系统只能收敛于部分平均的扩散过程,但根据动态规划原则以及求解动态规划方程,可以将部

分平均转化为完全平均. 数值结果表明, 合理地选择控制参数, 确实可以达到稳定性控制的目的, 选择不同的控制参数, 控制的效果也会不同.

- [1] Ying Z G , Ni Y Q , Ko J M 2004 *J. Sound Vib.* **274** 2775
- [2] Wendell H F , Jerome L S 2004 *J. Banking and Finance* **28** 979
- [3] Tao J W , Shi Y W , Chang W X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1682 [in Chinese] 陶建武、石要武、常文秀 2004 物理学报 **53** 1682]
- [4] Stefano L , Giuseppe R 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **21** 1031
- [5] Khasminskii R Z 1980 *Stochastic Stability of Differential Equation* (Netherlands : Sijthoff & Noordhoff)
- [6] Ariaratnam S T , Abdelrahman N M 2004 *J. Solids Struct.* **41** 2685
- [7] Mosta T , Buchera C , Schorling Y 2004 *J. Sound Vib.* **276** 381
- [8] Mahmoud M , Borai E , Osama L *et al* 2003 *Appl. Math. Compt.* **144** 273
- [9] Zhang X H , Zhao C A 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 636 [in Chinese] [章新华、赵长安 2000 物理学报 **49** 636]
- [10] Shi P L , Hu G , Xu L M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 24 [in Chinese] [史朋亮、胡 岗、徐莉梅 2000 物理学报 **49** 24]
- [11] Zhu W Q 2003 *Nonlinear Stochastic Dynamics and Control : Framework of Hamilton Theory* (Beijing : Science Press) p203 [in Chinese] 朱位秋 2003 非线性随机动力学与控制 : Hamilton 理论体系框架(北京 科学出版社) 第 203 页]
- [12] Zhu W Q 2004 *Int. J. Non-linear Mech.* **39** 569
- [13] Huang Z L , Zhu W Q 2003 *Int. J. Non-linear Mech.* **38** 239
- [14] Zhu W Q , Huang Z L , Suzuki Y 2001 *Int. J. Non-linear Mech.* **36** 1235
- [15] Zhu W Q , Yang Y Q 1997 *ASME J. Appl. Mech.* **64** 157
- [16] Zhu W Q , Huang Z L , Suzuki Y 2002 *Int. J. Non-linear Mech.* **37** 419
- [17] Huang Z L , Zhu W Q 2004 *Prob. Eng. Mech.* **19** 219
- [18] Zhu W Q , Huang Z L 2004 *Int. J. Non-linear Mech.* **39** 879
- [19] Oseledec V I 1968 *Tran. Moscow Math. Soc.* **19** 197
- [20] Anold L 1998 *Random Dynamical System* (New York : Springer-Verlag) p49
- [21] Lin Y K , Cai G Q 1995 *Probabilistic Structure Dynamics* (New York : McGraw-Hill) p127

Stochastic stability and control of coupled Duffing-van der Pol systems^{*}

Li Wei[†] Xu Wei Zhao Jun-Feng Jin Yan-Fei

(Department of Applied Mathematics , Northwestern Polytechnical University , Xi'an 710072 , China)

(Received 30 November 2004 ; revised manuscript received 21 June 2005)

Abstract

By using the stochastic averaging method of quasi-Hamilton system and stochastic stabilization strategy , the stochastic stability and stabilization control of a coupled Duffing-van der Pol system under Gaussian white noise excitation within semi-infinite time interval are investigated. The results show that , with suitable controlled parameters , effective stochastic stabilization can be realized.

Keywords : stochastic averaging method , quasi-Hamilton system , Lyapunov exponent , stochastic optimal control

PACC : 0540 , 1110E , 1110L

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472091 , 10332030) and the Natural Science Foundation of Shaanxi Province , China (Grant No. 2003A03).

[†] E-mail : liwei@mail.nwpu.edu.cn