第 54 卷 第 12 期 2005 年 12 月
1000-3290/2005/54(12)/5574-07
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.54, No.12, December, 2005

一个截断误差诱导下的随机数字振荡系统*

盛利元　贾伟尧
(中南大学物理科学与技术学院, 长沙　410083)
(2005 年 1 月 12 日收到; 2005 年 6 月 20 日收到修改稿)

计算机截断误差通常被认为会导致混沌系统退化. 根据这种认识, 提供了一个完全由计算机截断误差诱导的简单系统走向复杂化或混沌的反例. 该系统定义为椭圆反射腔映射系统的过焦系统, 理论解为一个极限序列, 对应计算机解则是一个随机数字振荡系统. 分析表明, 计算机解是在截断误差诱导下由理论解变异而来的. 理论解中系统存在"回转机制", 截断误差诱导系统在非双曲性不动点局域产生"逃逸机制", 从而发现一种阵发混沌的新机制.

关键词: 截断误差, 切延迟椭圆反射腔映射系统, 随机振荡, 阵发混沌
PACC: 0545

1. 引　　言

计算机是研究混沌系统的一个必不可少的工具. 由于混沌系统敏感地依赖于初始条件, 计算机截断误差将不可避免地要改变系统固有演化轨道[1], 一般而言, 计算机的数字解将按指数规律偏离真实结果. 此外, 计算机截断误差把连续的相空间离散化为有限状态空间, 只要时间足够长, 将使混沌系统的相轨线最终压缩为单一的伪相轨线, 从而使混沌轨道最终塌陷为周期轨道[2—4], 即所谓有限字长效应. 有限字长效应在混沌加密理论中被认为是负面的, 混沌系统演化周期可能突然变短(系统退化)而出现弱密钥[5]. 实际上, 由于混沌系统形式上的多样性和结构上的复杂性, 截断误差的影响是多方面的, 截断误差导致混沌系统退化, 也可能不导致混沌系统退化, 甚至还可能导致系统复杂化或走向混沌. 例如, 近可积系统的 KAM 定理[6] 指出, 在一定条件下, 微小扰动不会改变系统的定性图像; 尾随引理[7,8] (shadowing lemma) 指出, 对于双曲性的可逆映射系统, 存在与真实相轨线初始条件微小偏差的误差相轨线, 它在长时间内逼近这条真相轨线. Grebogi 等[9] 进一步拓宽了尾随引理使用条件。Dalling 和 Goggin[10] 认为, 在相同的初始误差下, 混沌系统自身对误差的放大能力远远大于舍入误差, 混沌中误差呈指数级增长与精度无关, 由于截断误差增长缓慢, 所以它不是混沌系统对初始值敏感的根源, 即截断误差不会导致混沌行为发生. 本文将给出一个纯粹由计算机截断误差诱导系统复杂化或走向混沌的反例: 一个随机数字振荡系统.

2. 椭圆反射腔过焦点系统

文献[11]提出了一类基于切延迟椭圆反射腔映射系统(TD-ERCS). 当切延迟 $m = 0$ 时, 系统没有切延迟操作, 此时系统称为椭圆反射腔映射系统(ERCS).

定义 1　在 ERCS 中, 若取 $0 < \mu < 1$, 且初始射线通过椭圆的一个焦点, 则该系统称为椭圆反射腔过焦点系统, 简称过焦系统.

定理 1　过焦系统中的所有射线都经过焦点.

证明　如图 1 所示. 设 l_0 为 $M_0(x_0, y_0)$ 点处的且通过焦点 C_1 的点入射线, 在 $M_1(x_1, y_1)$ 点反射后得反射线 l_1, 则根据椭圆的性质, 反射线 l_1 必经过另一个焦点 C_2, 即 $M_1(x_1, y_1)$ 点的法线(图中未画出)将平分 l_0 与 l_1 的夹角. 同理, 以 l_1 为入射线, 在 $M_2(x_2, y_2)$ 点反射后得反射线 l_2, 则反射线 l_2 必经过焦点 C_1. 如此继续直至无穷. 显然此过程是可逆的, 即射线反向进行也成立. 证毕.

推论 1　在 ERCS 中, 若有一条射线经过焦点,

* 湖南省自然科学基金(批准号: 04JJ3077)资助的课题.

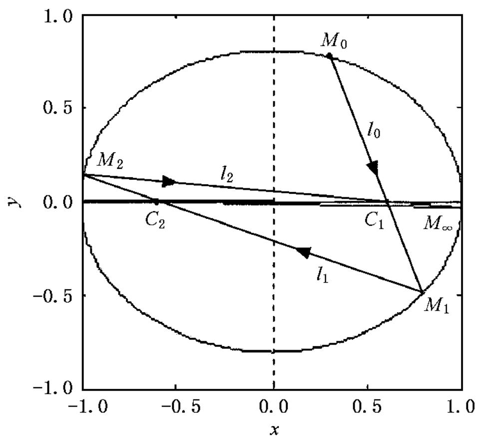

图 1　过焦系统演化的理论轨迹　$\mu = 0.8$，$x_0 = 0.3$，$n = 200$

则该系统就是过焦系统.

推论 2　在 ERCS 中，若有一条射线不经过焦点，则所有射线都不经过焦点.

推论证明是显然的. 非过焦系统不存在过焦点的射线.

过焦系统依然遵循 TD-ERCS 的迭代规则. 有关的迭代式复述如下[11]：

给定过焦系统参数 μ ($0 < \mu < 1$) 和初值 x_0 ($-1 \leqslant x_0 \leqslant 1$)，则取

$$y_0 = \mu\sqrt{1 - x_0^2}. \tag{1}$$

k_0 可由定义 1 导出，

$$k_0 = \frac{-y_0}{x_0^{(C)} - x_0}, \tag{2}$$

式中 $x_0^{(C)}$ 为椭圆的两个焦点之一的横坐标(焦距). 根据椭圆性质，有

$$x_0^{(C)} = \pm\sqrt{1 - \mu^2}. \tag{3}$$

过焦系统则通过迭代关系

$$x_n = -\frac{2k_{n-1}y_{n-1} + x_{n-1}(\mu^2 - k_{n-1}^2)}{\mu^2 + k_{n-1}^2}, \tag{4}$$

$$k_n = \frac{2k'_n - k_{n-1} + k_{n-1}k'^2_n}{1 + 2k_{n-1}k'_n - k'^2_n}, \tag{5}$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots,$$

得到椭圆上的一个点序列

$$\Gamma: M_0(x_0, y_0),\ M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2), \cdots$$

这里，k'_n 为椭圆上 $M_n(x_n, y_n)$ 点处切线的斜率，

$$k'_n = -\frac{x_n}{y_n}\mu^2, \tag{6}$$

$$y_n = k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + y_{n-1}. \tag{7}$$

点序列 Γ 可以分成奇偶两个点序列，即

$$\Gamma_1: M_0(x_0, y_0), M_2(x_2, y_2), \cdots,$$
$$\Gamma_2: M_1(x_1, y_1), M_3(x_3, y_3), \cdots$$

定理 2　设 $M_\infty(-1, 0)$ 和 $M_\infty(1, 0)$ 分别为长轴方向的两个椭圆端点，则点序列 Γ_1 和 Γ_2 分别收敛于 $M_\infty(-1, 0)$ 或 $M_\infty(1, 0)$，与初值 x_0 和 μ 无关，即当 $n \to \infty$ 时，Γ_1 趋于 $M_\infty(-1, 0)$，$M_\infty(1, 0)$ 中的一个点，而 Γ_2 趋于另一个点.

证明　定理 2 成立，等价于证明点序列中的 $\lim\limits_{n\to\infty} y_{2n} = 0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_{2n+1} = 0$. 仍以图 1 为讨论对象. 令 $\eta_n = \left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right|$，则 η_n 只有两种可能状态，即 $\eta_n > 1$ 或 $\eta_n < 1$.

1) $\eta_n < 1$，对应图 1 中给出的演化轨迹. 不失一般性，仅考虑射线的起点和终点分别在 y 轴两边的情形，这里对应 $n = 1$，$x_1 > 0$，$x_2 < 0$，射线 l_1 交于焦点 C_2，焦点与射线起点也分别在 y 轴两边，显然有 $\overline{M_1C_2} > \overline{C_2M_2}$，因此

$$\eta_1 = \left|\frac{y_2}{y_1}\right| = \frac{\overline{C_2M_2}}{\overline{M_1C_2}} < 1.$$

同理，可证 $\eta_2 < 1, \cdots, \eta_n < 1$. 于是，对于点序列 Γ_1(或 Γ_2)有

$$\left|\frac{y_{n+1}}{y_{n-1}}\right| = \left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right|\left|\frac{y_n}{y_{n-1}}\right| = \eta_n\eta_{n-1} < 1,$$

且极限

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left|\frac{y_{n+1}}{y_{n-1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right|\left|\frac{y_n}{y_{n-1}}\right| \\ &= \left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2 < 1,\end{aligned} \tag{8}$$

式中 c 为椭圆焦距. 故有

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = 0.$$

2) $\eta_n > 1$. 由于过程的可逆性，可将 $\eta_n < 1$ 中过程反向分析. 易知，当射线起点和终点分别在 y 轴两边时，焦点与射线起点分别在 y 轴同一边，y_n 不断增大. 但是，系统存在一个从增加到减小的转折点，如图 1 中的 M_0 点，入射线 l_0 逆向，由 M_1 射向 M_0，其起点、终点和焦点在 y 轴同一边，而反射线(图中未画出)的起点与终点和焦点分别在 y 轴的两边，过程进入 $\eta_n < 1$ 的状态.

以上分析表明，无论起始点使得 $\eta_n < 1$ 还是

$\eta_n > 1$，系统最终将进入 $\eta_n < 1$ 状态，定理 2 成立．证毕．

定义 2 系统若存在从 $\eta_n > 1$ 状态自动进入 $\eta_n < 1$ 状态的转折点，则称系统是可回转的，对应机制称为"回转机制"；系统若存在从 $\eta_n < 1$ 状态自动进入 $\eta_n > 1$ 状态的转折点，则称系统是可逃逸的，对应机制称为"逃逸机制"．

定理 2 的证明清楚表明，过焦系统只有回转机制，没有逃逸机制．图 2 为序列 Γ_1 或序列 Γ_2 中用 y_n 表示的过焦系统演化进程曲线，其中极大值对应状态转折点，表明系统只有回转机制．

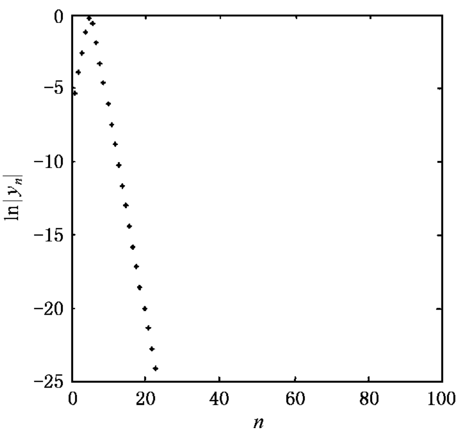

图 2 过焦系统 y 的理论演化进程 $\mu = 0.8$，$x_0 = 0.99999$

(8) 式为系统收敛极限速率，μ 越小，c 越大，收敛速率越快．极限点 $M_\infty(-1,0)$ 和 $M_\infty(1,0)$ 两者性质上完全相同，结构上互为镜像对称，行为上以镜像为不动点，暂且称为对偶吸引子．

3．计算机迭代解

用 C++ 编程分析，Matlab 6.5 作图．给定初值 x_0 和参数 μ，计算迭代 (4) 和 (5) 式，分别得到系统的演化轨迹图 3 和演化进程图 4．分别与图 1 和图 2 比较，过焦系统的计算机解具有如下特征：

1) 形式上在不断地重复过焦系统的理论演化过程，周期性明显，但点序列 Γ_1，Γ_2 不重复，幅值是随机的．

2) 系统状态从 $\eta_n > 1$ 进入 $\eta_n < 1$，又从 $\eta_n < 1$ 进入 $\eta_n > 1$，循环不断，出现逃逸机制，对应图 4 中的极小值．

3) 点序列从吸引子出来的方向不确定，即点序列从吸引子上方出来还是从下方出来是随机的．

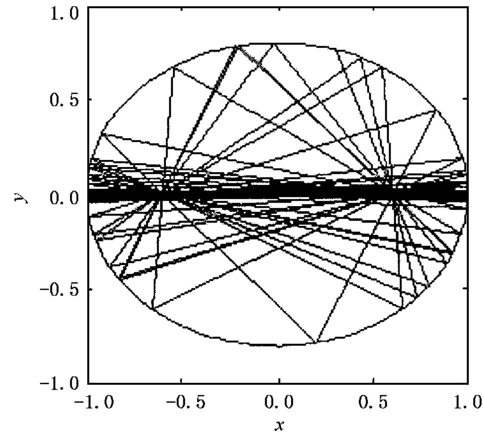

图 3 过焦系统计算机解的演化轨迹 $\mu = 0.8$，$x_0 = 0.3$，$n = 200$

4) 表观上射线交于椭圆焦点．

5) 振荡的点序列最终将覆盖全部椭圆曲线．

6) 实验结果是可重复的．

以上特征貌似一个随机数字振荡系统，而原系统是一个比较简单的非振荡系统．迭代中没有引入任何微扰项，因此过焦系统的这种性状改变只可能是截断误差诱导的，也就是在一定条件下截断误差可以使系统复杂化．

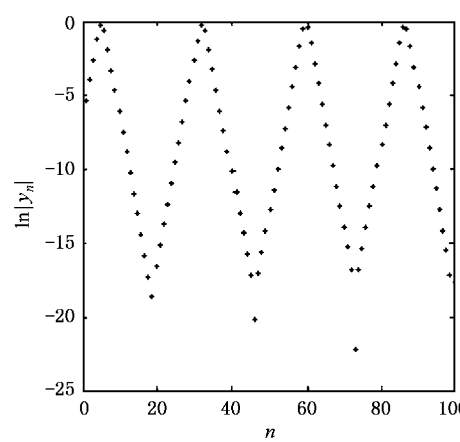

图 4 过焦系统计算机解的演化进程 $\mu = 0.8$，$x_0 = 0.99999$

4．随机数字振荡的发生机制

过焦系统理论上仅存在回转机制，计算机解表明，系统还存在逃逸机制．

4.1. 对偶吸引子性状

定理 3 对偶吸引子是非双曲性的.

证明 根据各变量关系,将迭代关系(4)和(5)式改写为

$$x_n = f(x_{n-1}, k_{n-1}, y_{n-1}(x_{n-1})), \tag{9}$$

$$k_n = g(x_{n-1}, k_{n-1}, k'_n(x_n, y_n \times (x_n, x_{n-1}, y_{n-1}(x_{n-1}), k_{n-1})))\,. \tag{10}$$

令其 Jacobi 矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \tag{11}$$

式中,

$$a = \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_{n-1}}, \tag{12}$$

$$b = \frac{\partial x_n}{\partial k_{n-1}} = \frac{\partial f}{\partial k_{n-1}}, \tag{13}$$

$$c = \frac{\partial k_n}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial g}{\partial k'_n}\frac{\partial k'_n}{\partial x_{n-1}}, \tag{14}$$

$$d = \frac{\partial k_n}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial g}{\partial k_{n-1}} + \frac{\partial g}{\partial k'_n}\frac{\partial k'_n}{\partial k_{n-1}}\,. \tag{15}$$

将(4)—(7)式代入后得

$$a = -\frac{1}{M_1}(2k_{n-1}k_{n-2} + M_2), \tag{16}$$

$$b = \frac{4x_{n-1}k_{n-1}\mu^2 - 2y_{n-1}M_2}{M_1^2}, \tag{17}$$

$$c = \frac{2(1 + k_{n-1}^2)(1 + k'^2_n)}{(1 + 2k_{n-1}k'_n - k'^2_n)^2}\frac{\partial k'_n}{\partial x_{n-1}}, \tag{18}$$

$$d = \frac{2(1 + k_{n-1}^2)(1 + k'^2_n)\dfrac{\partial k'_n}{\partial k_{n-1}} - (1 + k'^2_n)^2}{(1 + 2k_{n-1}k'_n - k'^2_n)^2}, \tag{19}$$

式中,

$$M_1 = \mu^2 + k_{n-1}^2,$$

$$M_2 = \mu^2 - k_{n-1}^2,$$

$$\frac{\partial k'_n}{\partial x_{n-1}} = -\frac{\mu^2}{y_n^2}[a(y_n - k_{n-1}x_n) + x_n(k_{n-1} - k_{n-2})],$$

$$\frac{\partial k'_n}{\partial k_{n-1}} = -\frac{\mu^2}{y_n^2}[b(y_n - k_{n-1}x_n) + x_n(x_{n-1} - x_n)]\,.$$

设 λ_n 为 Jacobi 矩阵 A 的特征值,则由(11)式可解出 λ_n 的两个特征值 λ_{n1} 和 λ_{n2}. 迭代计算 λ_{n1} 和 λ_{n2},结果表明在对偶吸引子处,两个 λ_{n1} 和 λ_{n2} 中必有一个等于 1. 表 1 给出了奇序列 Γ_2 的某振荡半个周期($|y_n|$从最大值到最小值再到最大值)内 λ_{n1} 和 λ_{n2} 的值. 图 5 给出了在吸引子处等于 1 的 λ_n 值和对应 k_n 的演化进程. 根据双曲性概念,对偶吸引子必为非双曲性的. 证毕.

表 1 振荡半周期内对偶吸引子处的特征值

n	y_n	λ_{n1}	λ_{n2}
1	7.2000×10^{-1}	-0.4799	36.0880
3	5.1800×10^{-1}	-4.7008	3.6402
5	9.9725×10^{-3}	-1.0049	5.2433
7	6.2331×10^{-4}	-1.0000	5.2500
9	3.8957×10^{-5}	-1.0000	5.2500
11	2.4347×10^{-6}	-1.0000	5.2500
13	1.5064×10^{-7}	-1.0000	5.2500
15	1.4960×10^{-8}	-1.0000	5.2500
17	3.9095×10^{-7}	-1.0000	5.2500
19	6.2646×10^{-6}	-1.0000	5.2500
21	1.0023×10^{-4}	-1.0000	5.2501
23	1.6038×10^{-3}	-1.0000	5.2659
25	2.5654×10^{-2}	-0.9995	11.9730
27	3.8520×10^{-1}	-0.8816	40.0630

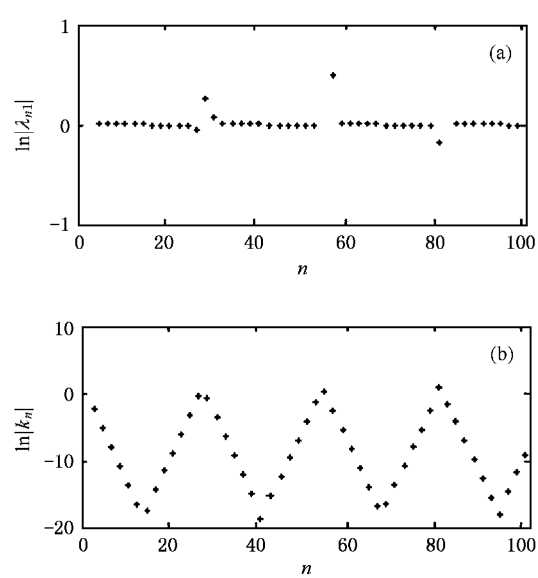

图 5 λ_1 和 k_n 的演化进程 $\mu = 0.8$, $x_0 = 0.3$. (a) λ_1 在吸引子处等于 1, (b) 对应 λ_1 的 k_n 振荡行为

4.2. 逃逸机制 截断误差诱导阵发混沌

由于非双曲性,对偶吸引子同时具有排斥性,在截断误差存在的条件下将诱导阵发混沌. 这一机制可用图 6 给出定性解释. 图 6 中 x_∞ 为一非双曲不动

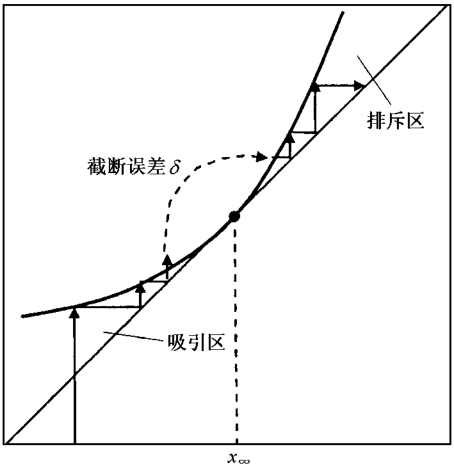

图 6 逃逸机制:截断误差诱导阵发混沌

点,不动点的左边为吸引区,右边为排斥区.若 $x_n < x_\infty$,x_n 被吸引;若 $x_n > x_\infty$,x_n 被排斥.对于精确解,x_n 不可能在迭代下从吸引区越过 x_∞ 到达排斥区,即一个被吸引的序列不可能转变为被排斥的序列.对于数字解,因有截断误差 δ,故存在一个整数 N,当 $n \geqslant N$ 时,$|x_n - x_\infty| < \delta$,就有可能使得 $x_n > x_\infty$,即 x_n 可越过 x_∞ 进入排斥区,截断误差 δ 成为 x_n 从吸引区抵达排斥区的桥梁,对偶吸引子邻域内存在从 $\eta_n < 1$ 状态自动进入 $\eta_n > 1$ 状态的转折点,即产生了逃逸机制.这是阵发混沌的一种新机制.采用与文献[11]相同的计算方法获得了过焦系统的 Lyapunov 指数随 μ 的变化曲线,如图 7 所示.除$\mu = 1$之外,过焦点系统全域是混沌的,且与一般混沌系统不一样,它有很大的 Lyapunov 指数.若将表 1 中 λ_{n2}取对数后再取平均,也能得到类似图 7 的曲线.可见,过焦系统的计算机解的确是一个混沌系统,且是一个具有大的正指数的混沌系统.

逃逸机制最终发生还与不动点局域内系统的误差放大特性有关,实验证明过焦系统的误差放大特性有利于逃逸机制形成.

由于对偶吸引子同时具有排斥性,故准确地应称它为对偶吸引排斥子.

4.3. 射线的过焦振荡

由定理 1 知,过焦系统的每一条射线都经过椭圆焦点,图 3 似乎把这一性质展示得十分清晰.但计算机解的细致结构却是另一种复杂图像.用 $x_n^{(c)}$ 表示射线 l_n 与 x 轴的交点,由定理 1 知

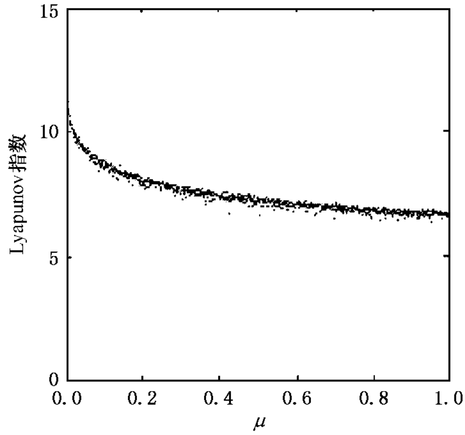

图 7 过焦系统的最大 Lyapunov 指数

$$x_n^{(c)} \equiv \pm \sqrt{1 - \mu^2}, \tag{20}$$

即为两条水平直线.图 8 为点序列 Γ_1 的 $x_n^{(c)}$ 的计算机解,是一个在两焦点之间或之外的随机振荡.结果表明,过焦系统的计算机解不再满足定理 1 及其推论.特别是,当 $x_n^{(c)}$ 在两焦点之外振荡时,部分值已经远离椭圆的定义域,偏离焦点如此之远,从一个侧面显出系统累计放大截断误差的能力.当然图 8 仅是图 3 的另一种直观表示.

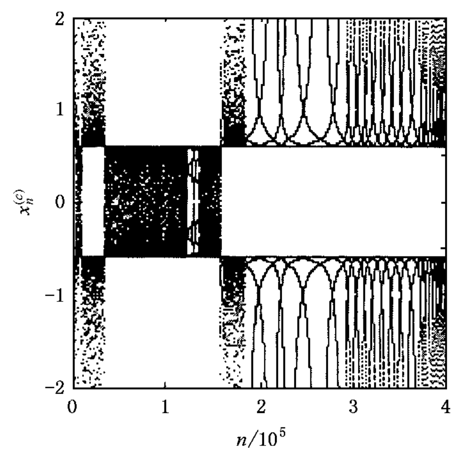

图 8 射线的过焦振荡 $\mu = 0.8, x_0 = 0.3$

由于所有的射线都没有经过焦点(除去 l_0),根据推论 2,图 3 给出的计算机解既不是理论上的过焦系统,也不是理论上的非过焦点系统,是一个截断误差诱导下从过焦系统变异的随机数字振荡系统,是一种准周期性的数字阵发混沌系统.

4.4. 截断误差等量放大与缩减机制

假定系统从给定点 $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$出发,精确

通过焦点到达 $M_n(x_n, y_n)$，研究反射线 l_n 偏离焦点的趋势．为此求得(6)式的变分

$$\delta k'_n = -\frac{\delta x_n}{y_n^3}\mu^2, \tag{21}$$

式中 δx_n 为(4)式计算 x_n 时每一步运算截断误差产生的综合误差．因 $|y_n| < 1$，误差 $\delta k'_n$ 是放大的．特别是 $y_n \to 0$ 时，放大量更为显著．$\delta k'_n$ 的符号取决于 δx_n 和 y_n 的符号．如图 9 所示，若 $x_n > 0, y_n > 0, \delta x_n$ 的符号决定了反射线 l_n 向左还是向右偏离焦点，决定了 $x_n^{(c)}$ 是在两焦点内还是在焦点外的振荡．

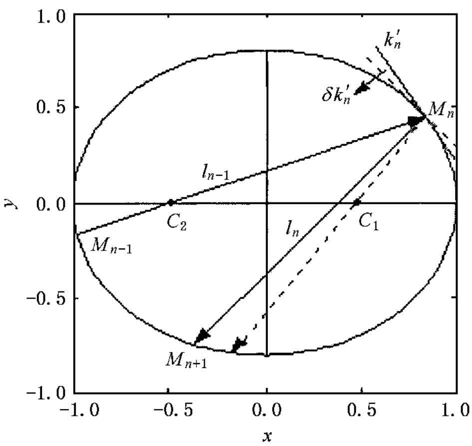

图 9　截断误差使反射线偏离焦点

再假定入射线 l_n 的 $x_n^{(c)}$ 已经分别在两焦点之间，如图 10 所示．若系统处于 $\eta_n < 1$ 状态，则由几何关系知，反射线 l_{n+1} 的 $x_{n+1}^{(c)}$ 偏离焦点 C_2 比入射线的 $x_n^{(c)}$ 偏离焦点 C_1 更远，误差 δ 被放大；反之，l_n 与 l_{n+1} 逆向进行，系统处于 $\eta_n > 1$ 状态，则误差 δ 被缩减．显然，系统通过转折点时对应的入射线与反射线将通过椭圆中心相遇，这时系统从 $\eta_n < 1$ 状态进入 $\eta_n > 1$ 状态，或者相反．由于对称性，系统在 $\eta_n < 1$ 状态的误差累计放大量与在 $\eta_n > 1$ 状态的误差累计缩减量相等，保证了 $x_n^{(c)}$ 能够回到焦点进行新一轮振荡．对于 $x_n^{(c)}$ 处于两焦点之外的情况也可以做同样分析并得到相同的结论．总之，在一个周期内，系统对截断误差的综合累计放大量与综合累计缩减量在统计意义上是相等的，从而维持了系统周而复始的随机振荡．

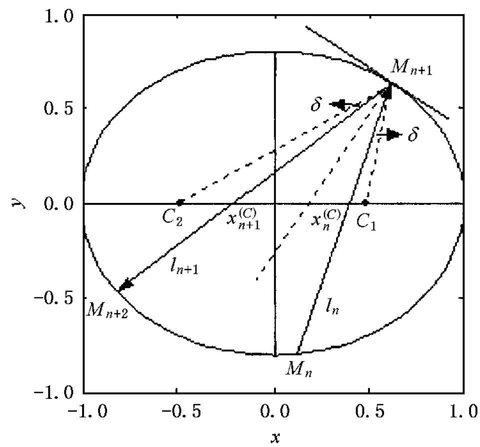

图 10　截断误差等量放大与缩减机制

5. 结　论

从以上理论模型、实验结果和机制的分析，可以得出如下结论：

1）用计算机研究复杂的非线性动力系统，由于截断误差，可能永远得不到它的真实轨道．截断误差可能会使混沌系统退化，也可能不退化，还可能使系统复杂化．使系统复杂化的机制对于混沌加密理论而言具有重大的理论意义．

2）回转机制、逃逸机制和截短误差等量放大与缩减机制维持随机数字振荡．

3）一种阵发混沌的新机制：截断误差在非双曲性不动点邻域诱导数字阵发混沌．这种机制在非线性系统的计算机仿真实验中是存在的，如果系统隐含一个或多个未知的非双曲性不动点，仿真结果将可能导致性质完全不同的结论．

4）混沌系统的内秉随机性与传统随机性概念之不同素有争议[12]，前者是确定性的，后者是非确定性的．本文给出的实例对传统随机性概念提出了质疑．截断误差是一个传统概念的随机数，在有限精度下其大小无法确定，但由于它导致的计算结果是可重复的，故随机数是可重复的，这与传统概念矛盾．

[1] Grebogi C，Ott E，Yorke J A 1988 *Phys. Rev.* A **38** 3688

[2] Levy Y E 1982 *Phys. Lett.* A **53** 1

[3] Beck C，Roepstorff G 1987 *Physica* D **25** 173

[4] Binder P M 1992 *Physica* D **57** 31

[5] Li S J，Mou X Q，Cai Y L *et al* 2003 *Comput. Phys. Commun.* **153** 52

[6] Hao B L 1983 *Prog. Phys.* **3** 329 (in Chinese) [郝柏林 1983 物理学进展 **3** 329]

[7] Anosov D V 1967 *Proc. Steklov Inst. Math.* **90** 1
[8] Bowen R 1975 *J. Diff. Eq.* **18** 333
[9] Grebogi C, Hammel S M, Yorke J A *et al* 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 1527
[10] Dalling R H, Goggin M E 1994 *M. J. Phys.* **62** 563
[11] Sheng L Y, Sun K H, Li C B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2871 (in Chinese) [盛利元、孙克辉、李传兵 2004 物理学报 **53** 2871]
[12] Wang Z K 1994 *Journal of Beijing Normal University* (Nature Science) **30** 199 (in Chinese) [王梓坤 1994 北京师范大学学报(自然科学版) **30** 199]

A stochastic digital oscillating system induced by the truncation error*

Sheng Li-Yuan Jia Wei-Yao
(*School of Physics Science and Technology, Central South University, Changsha* 410083, *China*)

(Received 12 January 2005; revised manuscript received 20 June 2005)

Abstract

It is generally believed that chaotic systems will collapse due to computer truncation error. In this paper we introduce a contrary example, in which a simple system is induced to complication or chaos completely by computer truncation. The system is defined as a cross-focus system in elliptical reflecting cavity map system. The theoretical solution is a limiting sequence and the computer solution is a stochastic digital oscillating system induced from the theoretical solution by truncation error. There is only a turn-round mechanism in the system theoretically. On the other hand, round-off induces the nonhyperbolic fixed points in the system to produce a new escape mechanism of intermittent chaos.

Keywords: truncation error, tangent-delay elliptical reflecting cavity map system, stochastic oscillation, intermittent chaos
PACC: 0545

* Project supported by the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 04JJ3077).