

Rössler 混沌系统的追踪控制^{*}

王兴元[†] 石其江

(大连理工大学电子与信息工程学院, 大连 116024)

(2005 年 2 月 23 日收到, 2005 年 6 月 27 日收到修改稿)

基于离散线性系统的稳定性理论, 提出了 Rössler 混沌系统的一种追踪控制方案, 实现了 Rössler 系统对任意给定参考信号的追踪, 并且在理论上证明这种控制方案是按指数收敛的. 数值仿真表明, 该控制方案不仅可以对给定参考信号进行追踪, 而且响应系统可以与驱动系统(同结构、异结构均可)同步.

关键词: Rössler 混沌系统, 追踪控制, 同步

PACC: 0545, 0555

1. 引 言

1990 年, 美国马里兰大学物理学家 Ott, Grebogi 和 Yorke^[1]通过参数微扰法(OGY 法)成功地控制了混沌, Pecora 和 Carroll^[2]又提出了混沌同步方案. 由于混沌控制及同步在信息科学、医学、生物、工程等领域具有很大的应用潜力及发展前景, 引起了人们的广泛关注与兴趣, 科学工作者在理论和实验上都已做了大量的工作^[3-5]. 同步的两个混沌系统结构可以相同, 也可以不同, 如果结构不相同, 则称这两个混沌系统的同步为“异结构同步”^[6]. 从系统结构的角度, 迄今已提出的实现混沌同步的诸多方法中, 大多数集中于混沌系统的自同步研究^[7-11]. 目前, 异结构同步的研究也引起了人们的关注: 如李丽香等^[12]实现了 Hénon 混沌系统对参考信号的追踪控制与同步, 给出了“异结构混沌同步”的概念; 关新平等^[13]利用径向基函数网络实现了异结构混沌同步; 刘福才等^[14]给出了两个不同连续时间混沌系统同步的预测变结构控制方法. 异结构混沌同步要比混沌自同步具有更大的应用潜力和发展前景. 为此, 本文对 Rössler 混沌系统进行了追踪控制, 使之追踪任意参考信号并可实现自同步及异结构同步. 理论证明了受控 Rössler 系统可指数地收敛到参考信号, 数值仿真进一步证明了该方法的有效性.

2. 追踪控制的描述

1976 年, Rössler^[15]在研究具有中间产物的化学反应问题时, 通过适当的标度变换, 给出 Rössler 方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + \alpha(x - c). \end{aligned} \quad (1)$$

考虑 Rössler 系统在受到外部噪声信号 $\alpha(t)$ 干扰时, 设计一个控制器 U , 使受控 Rössler 系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + \alpha(x - c) + \alpha(t) + U \end{aligned} \quad (2)$$

的输出信号 $x(t)$ 追踪给定的参考信号 $r(t)$, 即要求

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\epsilon(t)| = 0. \quad (3)$$

这里 $\epsilon(t) = x(t) - r(t)$ 为误差信号.

3. 控制器的设计

首先给出设计条件. 令

$$S_1(t) = x - r,$$

$$S_2(t) = z - x + y + r + \dot{r}.$$

这里 $S_1(t)$ 表示受控追踪信号与参考信号差值, $S_2(t)$ 为系统(2)信号的耦合项. 在下面的设计与实

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 60573172)和辽宁省教育厅高等学校科学技术研究计划(批准号: 20040081)资助的课题.

[†] E-mail: wangxy@dlut.edu.cn

验中将会看到:由于 $S_2(t)$ 中加入了 $\dot{r}(t)$ 将使系统对 $\delta(t)$ 具有较好的鲁棒性.

引理 1 若 $S_1(t)$ 和 $S_2(t)$ 满足下列条件:

$$S_1(t)\dot{S}_1(t) + S_2(t)\dot{S}_2(t) < 0, \quad (4)$$

则系统 (2) 的运动趋于稳态.

证明 令 Lyapunov 函数为

$$V(t) = S_1^2 + S_2^2 = (x - r)^2 + (z - x + y + r + \dot{r})^2, \quad (5)$$

根据 Lyapunov 稳定性定理 (4) 式保证了

$$\dot{V}(t) = S_1(t)\dot{S}_1(t) + S_2(t)\dot{S}_2(t) < 0,$$

因此系统 (2) 上的运动趋于稳定平衡点.

为了得到引理 1 给出的条件, 给出如下控制策略:

$$U = (-V - \rho - \eta\mu)\eta, \quad (6)$$

这里,

$$\rho = (r - x)(y + z + \dot{r}),$$

$$\eta = z - x + y + r + \dot{r},$$

$$\mu = b - cz + xz + y + z + x$$

$$+ ay + \delta(t) + \dot{r} + \ddot{r}.$$

下面证明控制策略 (6) 式可使系统 (2) 的输出信号 $x(t)$ 追踪给定的参考信号 $r(t)$.

定理 1 对于受控系统 (2), 若控制器 $U = (-V - \rho - \eta\mu)\eta$, 则系统 (2) 的运动趋于稳态.

证明 由 (5) 式可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2(x - r)(\dot{x} - \dot{r}) \\ &\quad + 2(z - x + y + r + \dot{r}) \\ &\quad \times (\dot{z} - \dot{x} + \dot{y} + \dot{r} + \ddot{r}) \\ &= 2(x - r)(-y - z - \dot{r}) \\ &\quad + 2\eta(-cz + b + xz + \delta(t) + U \\ &\quad + y + z + x + ay + \dot{r} + \ddot{r}) \\ &= 2\rho + 2\eta(\mu + U) \\ &= 2\rho + 2\eta\mu + 2\eta U \\ &= 2\rho + 2\eta\mu - 2V - 2\rho - 2\eta\mu \\ &= -2V(t). \end{aligned}$$

根据 $V(t) \geq 0$, 有 $\dot{V}(t) \leq 0$. 符合引理 1 的条件, 故命题得证.

定理 2 对于受控系统 (2), 若令控制器

$$U = \frac{-V - \rho - \eta\mu}{\eta},$$

则

$$\forall \sigma > 0, \quad \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|e(t)|}{\exp[-(1 - \sigma)t]} = 0,$$

即在该控制器作用下, 输出信号 $x(t)$ 按指数速率收

敛到参考信号 $r(t)$.

证明 由定理 1 知

$$\frac{d(V(t))}{dt} = -2V(t),$$

故可得

$$V(t) = V(0)\exp(-2t).$$

因为 $e = x - r$, 由 (5) 式可推出

$$e^2(t) \leq V(t),$$

就有

$$\begin{aligned} \frac{e^2(t)}{\exp[-(2 - 2\sigma)t]} &\leq \frac{V(t)}{\exp[-(2 - 2\sigma)t]} \\ &= \frac{V(0)\exp(-2t)}{\exp[-(2 - 2\sigma)t]} = \frac{V(0)}{\exp(2\sigma t)}. \end{aligned}$$

$\forall \sigma > 0, \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{V(0)}{\exp(2\sigma t)} = 0$, 故可推得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|e(t)|}{\exp[-(1 - \sigma)t]} = 0,$$

即受控系统 (2) 的输出信号 $x(t)$ 按指数速率收敛到参考信号 $r(t)$ 上. 命题成立.

4. 数值研究结果

当参数 $a = 0.2, b = 0.2$ 和 $c = 8$ 时, Rössler 系统是混沌的^[15], 图 1 为 Rössler 吸引子. 选取上述参数, 进行数值研究.

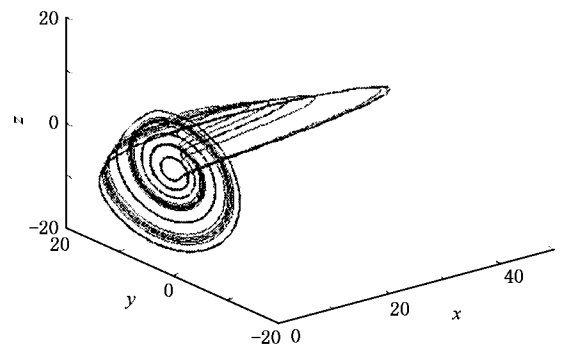


图 1 Rössler 吸引子

4.1. 在无干扰下追踪正弦信号

选取参考信号为正弦信号 $r(t) = \sin(t)$, 外部噪声干扰信号 $\delta(t) = 0$, 初始条件为 $x(0) = 1, y(0) = 1$ 和 $z(0) = 1$, 时间步长为 $\tau = 0.002$ s, 采用四阶 Runge-Kutta 法^[16] 求解方程 (2). 作者研究了 Rössler 混沌系统追踪正弦信号的情况, 图 2 为 Rössler 系统追踪正弦信号效果图. 由图 2(a) 可见, 当 t 接近 10 s 时, Rössler 混沌系统已稳定地追踪上

正弦信号 $r(t)$. 由图 2(b) 也可看到, 当 t 接近 10 s 时, 误差 $e(t)$ 已基本稳定在零附近.

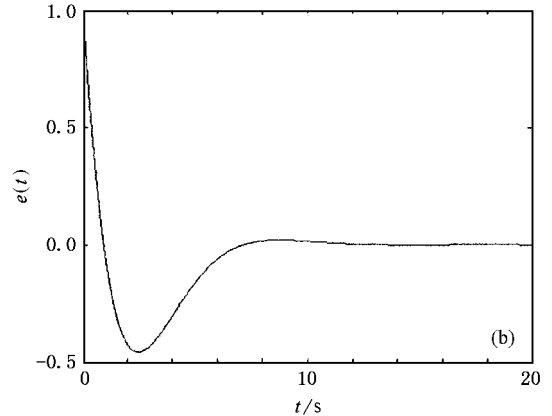
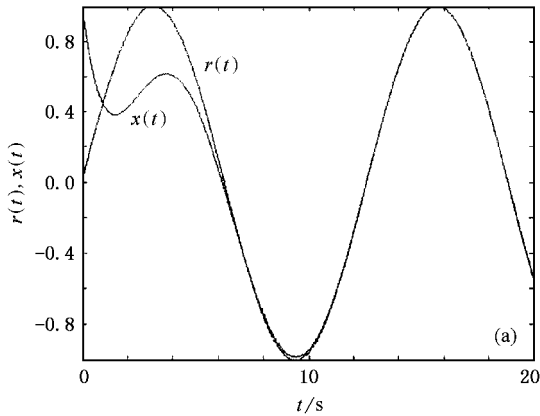


图 2 无干扰下 Rössler 混沌系统追踪正弦信号的模拟结果 (a) $r(t)$ 和 $x(t)$ 随时间 t 的变化 (b) $e(t)$ 随时间 t 的变化

4.2. 在有干扰下追踪正弦信号

当外部噪声干扰信号 $\delta(t) = 0.5\cos(\pi t)$ 时, 仍取上述相同的参数, 在其他条件不变的情况下, 作者研究了 Rössler 混沌系统追踪正弦信号的情况, 图 3 为 Rössler 混沌系统追踪正弦信号的效果图. 由图 3

(a) 可见, 当 t 接近 10 s 时, Rössler 混沌系统已稳定地追踪上正弦信号 $r(t)$, 即与上述无干扰时的分析结果基本相同. 图 3(b) 是有干扰情况下把两个误差分别作差值得到的效果, 可见它们的差值是非常小的, 在 10^{-15} 这个数量级, 这在工程中是很有实用价值的.

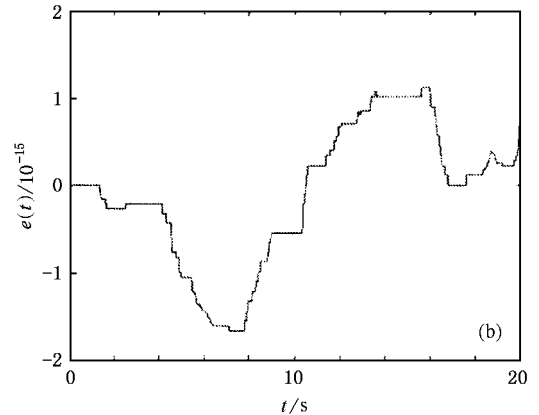
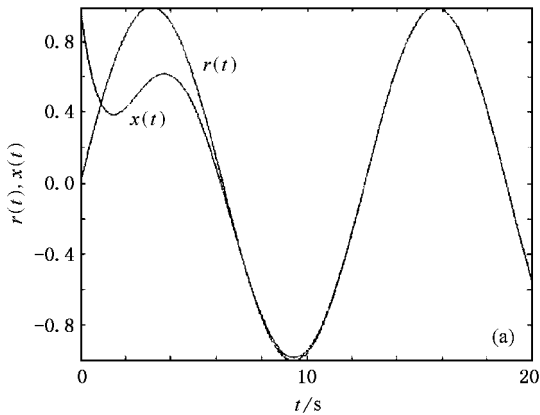


图 3 有干扰下 Rössler 混沌系统追踪正弦信号的模拟结果 (a) $r(t)$ 和 $x(t)$ 随时间 t 的变化 (b) $e(t)$ 随时间 t 的变化

4.3. 自同步

选择与响应系统 (2) 的结构相同的如下驱动系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(y_1 + z_1), \\ \dot{y}_1 &= x_1 + 0.2y_1, \\ \dot{z}_1 &= 0.2 + z_1(x_1 - 5), \end{aligned}$$

令参考信号 $r(t) = x_1(t)$. 选取初始条件为

$x(0) = 12, y(0) = 3, z(0) = 4, x_1(0) = 5, y_1(0) = 10$ 和 $z_1(0) = 4$, 时间步长为 $\tau = 0.002$ s, 采用了四阶 Runge-Kutta 法^[16]求解方程 (2). 作者研究了 Rössler 混沌系统的自同步, 图 4 为 Rössler 混沌系统自同步的数值模拟结果. 由图 4(a) 可见, 当 t 接近 18 s 时, Rössler 混沌系统已稳定地追踪上参考信号 $x_1(t)$. 由误差效果图 4(b) 也可看到, 当 t 接近 18 s 时, 误差 $e(t)$ 已基本稳定在零附近.

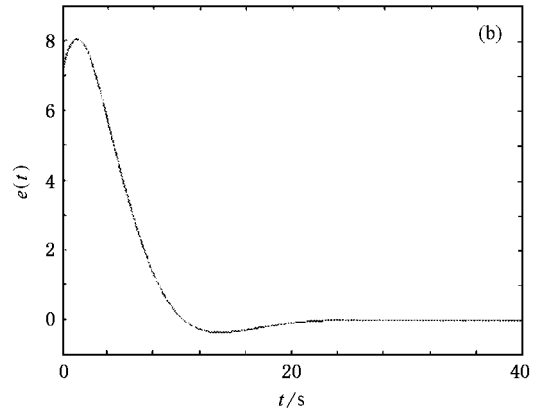
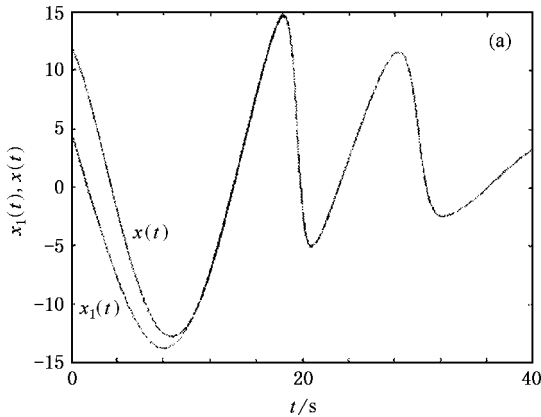


图 4 Rössler 混沌系统自同步的模拟结果 (a) $x_1(t)$ 和 $x(t)$ 随时间 t 的变化 (b) $e(t)$ 随时间 t 的变化



4.4. 异结构同步

1963 年, 数学家 Lorenz^[17] 提出了 Lorenz 方程,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \alpha(v - u), \\ \dot{v} &= (\beta - w)u - v, \\ \dot{w} &= -\gamma w + uv. \end{aligned} \quad (7)$$

当参数 $\alpha = 10$, $\beta = 28$ 和 $\gamma = 8/3$ 时, Lorenz 系统(7) 处于混沌状态, 其吸引子如图 5 所示.

1996 年, 基于三维自治方程组的动力学行为, Vanecek 和 Celikovsky^[18] 曾对三维自治系统进行了分类. 结果表明 Rössler 系统与 Lorenz 系统是非拓扑等价的, Rössler 吸引子(图 1) 和 Lorenz 吸引子(图 5) 是具有不同结构特征的奇怪吸引子.

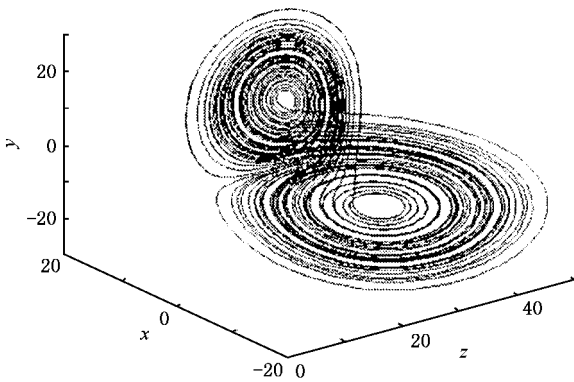


图 5 Lorenz 吸引子

令参考信号 $r(t) = u(t)$, 选取初始条件为 $x(0) = 12$, $y(0) = 3$, $z(0) = 4$, $u(0) = 2$, $v(0) = 4$ 和 $w(0) = 5$, 时间步长为 $\tau = 0.002$ s, 采用了四阶 Runge-Kutta 法^[16] 去求解方程(2) 和(7). 作者研究了 Rössler

混沌系统(2) 和 Lorenz 混沌系统(7) 的异结构同步, 图 6 为 Rössler 混沌系统追踪 Lorenz 混沌系统的数值模拟结果. 由图 6(a) 可见, 当 t 接近 5 s 时, Rössler 混沌系统已稳定地追踪上 Lorenz 混沌系统. 由误差效果图 6(b) 也可看到, 当 t 接近 5 s 时, 误差 $e(t)$ 已基本稳定在零附近.

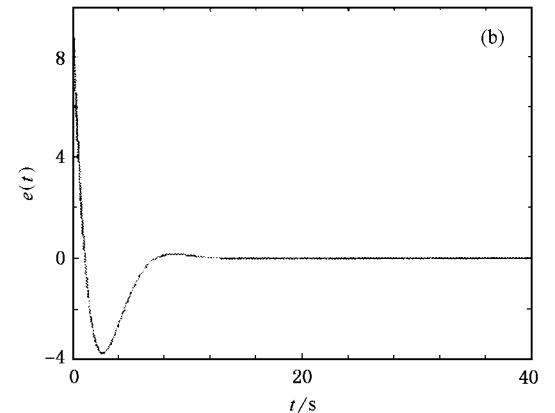
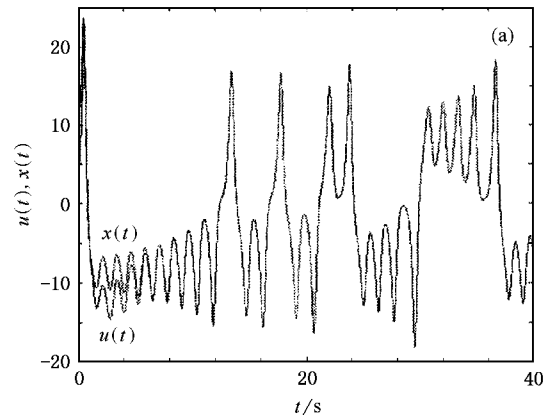


图 6 Rössler 混沌系统追踪 Lorenz 混沌系统的模拟结果 (a) $u(t)$ 和 $x(t)$ 随时间 t 的变化 (b) $e(t)$ 随时间 t 的变化

5. 结 论

本文提出的追踪控制方法,可以有效实现 Rössler 混沌系统对任意参考信号的追踪控制,同时

可以实现自同步以及异结构同步,这种控制器形式简单,易于实现,且收敛速度快、控制范围宽.此方法可以适用于其他混沌系统,且可以进一步推广到对多个状态变量的追踪控制问题.

- [1] Ott E , Grebogi C , Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [2] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [3] Chen G , Dong X 1998 *From Chaos to Order : Methodologies , Perspectives and Applications* (Singapore : World Scientific) Chapt 1
- [4] Wang G R , Yu X L , Chen S G 2001 *Chaotic Control , Synchronization and Utilizing* (Beijing : National Defence Industry Press) Chapt 6 (in Chinese) [王光瑞、于熙龄、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用(北京:国防工业出版社)第6章]
- [5] Guan X P , Fan Z P , Chen C L *et al* 2002 *Chaotic Control and Its Application on Secure Communication* (Beijing : National Defence Industry Press) Chapt 4 (in Chinese) [关新平、范正平、陈彩莲等 2002 混沌控制及其在保密通信中的应用(北京:国防工业出版社)第4章]
- [6] Wang X Y 2003 *Chaos in the Complex Nonlinearity System* (Beijing : Electronic Industry Press) Chapt 3 (in Chinese) [王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌(北京:电子工业出版社)第3章]
- [7] Li Z , Shi S J 2003 *Phys. Lett. A* **311** 389
- [8] Wang Y W , Guan Z H , Wen X J 2004 *Chaos Solitons and Fractals* **19** 899
- [9] Yu Y G , Zhang S C 2004 *Chaos Solitons and Fractals* **21** 643
- [10] Solak E 2004 *Phys. Lett. A* **325** 276
- [11] Zhang X M , Peng J H , Chen G R 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2864 (in Chinese) [张晓明、彭建华、陈关荣 2004 物理学报 **53** 2864]
- [12] Li L X , Peng H P , Lu H B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 629 (in Chinese) [李丽香、彭海朋、卢辉斌 2001 物理学报 **50** 629]
- [13] Guan X P , Fan Z P , Peng H P 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1670 (in Chinese) [关新平、范正平、彭海朋 2001 物理学报 **50** 1670]
- [14] Liu F C , Wang J , Shi M 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2707 (in Chinese) [刘福才、王娟、石森 2002 物理学报 **51** 2707]
- [15] Rössler O E 1976 *Phys. Lett. A* **57** 397
- [16] Wang X Y 2003 *Chin. J. Comput. Phys.* **20** 458 (in Chinese) [王兴元 2003 计算物理 **20** 458]
- [17] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [18] Vaneccek A , Celikovský S 1996 *Control Systems : From Linear Analysis to Synthesis of Chaos* (London : Prentice-Hall) Chapt 2

Tracking control and synchronization of the Rössler 's chaotic system ^{*}

Wang Xing-Yuan[†] Shi Qi-Jiang

(*School of Electronic and Information Engineering , Dalian University of Technology , Dalian 116024 , China*)

(Received 23 February 2005 ; revised manuscript received 27 June 2005)

Abstract

This paper presents a strategy of the Rössler 's chaotic system tracking control based on the theory of stability of the linear system. This strategy can track all kinds of reference signals. It is also proved that the strategy can make the system approach to any desired smooth orbit at an exponential rate. Numerical simulations have shown the proposed strategy can not only trace the given reference signals , but also synchronize structures , including self structures and diverse ones.

Keywords : Rössler 's chaotic system , tracking control , synchronization

PACC : 0545 , 0555

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 60573172) and the College Science and Technology Research Program of Education Department of Liaoning Province , China(Grant No. 20040081).

[†] E-mail : wangxy@dlut.edu.cn