物质波在原子波导中传输时的波导衔接激发*

1 (清华大学物理系,北京 100084)

2 (华东师范大学物理系,光谱学与波谱学教育部重点实验室,上海 200062)

3 (清华大学精密仪器系,北京 100084)

(2005年3月23日收到 2005年7月22日收到修改稿)

物质波在原子波导中的传播特性是原子光学的重要研究课题之一.在原子光学集成化的设计中,将会遇到物质波从一段波导向另一段不同波导内的传输问题.由于不同波导的物理参数在衔接处的跳变,原子波的传输特性将在波导衔接处产生改变.研究了原子波在两段波导管衔接处的模式激发以及与此相关的物理现象.根据薛定谔方程,利用波导本征模式展开理论,分析了物质波的反射和激发与波导管特征参数以及物质波入射动量之间的关系,并给出了抑制处于基态模的物质波向高阶模式激发的条件。

关键词:原子光学,原子波导,激发,模式截止

PACC: 3280, 0365

1. 引 言

随着原子光学的兴起,中性冷原子的操控在理论和实验上都得到广泛的研究.人们将越来越多的注意力放在物质波的各种物性及应用前景上,设计出一系列的原子光学器件,如原子反射镜、原子分束器、原子干涉仪、原子波导等,其中原子波导是一项关键的技术,因此很多人在理论和实验[1-11]上对原子波导进行了细致的研究并取得了很大成果.如瑞典的 Markku 等[12]在数值上发现,当物质波从波导进入自由空间时,在波导口处将会发生反射现象,这一点在经典情形下是不存在的,不过文献 12]没有从物理上解释这个现象产生的根源.

本文所研究的是物质波在由两段波导管衔接而成的复合波导管内的传播特性.在波导管横向上将物质波用波导管的本征模式进行展开,通过本征模式展开可以将三维的稳态薛定谔方程约化为一维的稳态薛定谔方程 进而方便求解.从求解的结果可以发现,对于一定的波导管参数,具有某些特定入射动量的物质波将不能从一段波导管进入另一段波导

管 而是在衔接处发生全反射 或者说另一段波导管 对该物质波是传播截止的.此外,适当地选择两段波导管的参数,可以使具有某些入射动量的物质波在穿过两段波导管衔接处发生的模式激发得到抑制.这一点对原子干涉仪导臂的衔接设计具有一定的指导意义.

在集成原子光学中,人们经常会碰到如原子干涉仪、原子分束器等器件.这些器件基本上都是由几段原子波导衔接而成的.因此,研究物质波在由两段波导管衔接而成的复合波导内的传播特性就很有必要.

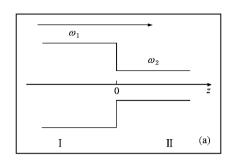
2. 理 论

本文所要研究的是由两段半无限长的波导管衔接而成的复合波导管,如图 1 所示. 在 z < 0 的区域内,其横向束缚谐振频率为 ω_1 ,在 $z \ge 0$ 的区域内为 ω_2 . 物质波从 z < 0 区域经 z = 0 这一衔接点向 z > 0 的区域传播.

在量子力学中用薛定谔方程描述处于上述波导 结构中物质波的演化情况. 即

^{*}国家自然科学基金(批准号:10474055),上海市科学技术委员会科研计划(批准号:04DZ14009)和国家重点基础研究发展规划(批准号: 2001CB309308)资助的课题.

[†]通讯联系人. E-mail:wpzhang@phy.ecnu.edu.cn



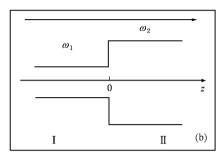


图 1 复合波导管示意图 (a)原子波导管的横向束缚频率左半段比右半段大 (b)原子波导管的横向束缚频率右半段比左半段大 ω_1 和 ω_2 分别表示左波导管和右波导管的横向束缚频率 ω_3 最上方的箭头表示物质波的传播方向

$$\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -\,\frac{\hbar^2}{2M}\,\nabla^{\!2}\Psi + V\Psi\;,\qquad (1)$$

式中 Ψ 为含时归一化波函数 M 为原子质量 Ψ 为物质波感受到的束缚势场 . 势场 Ψ 横向为二维谐振子势 纵向无外势场 ,其具体形式如下:

$$V = \begin{cases} \frac{1}{2} M \omega_1^2 r^2 & (z < 0), \\ \\ \frac{1}{2} M \omega_2^2 r^2 & (z \ge 0). \end{cases}$$

对处于上述势场 V 中的物质波系统可以分区间研究.为了求解方便,这里只研究物质波为稳态的情况.

2.1.7<0区域

如图 1 所示,假设物质波从左向右传播,在 z < 0 区域内其模式为波导管的横向基态模,因此总的 波函数可以记为

$$\Psi_{\rm I} = \varphi'_0(r) f(z) e^{-iEt}$$
,

其中 $,\varphi'_0(r)$ 为频率为 ω_1 的二维谐振子的基态波函数 ,(z)为纵向波函数 ,E 为入射波的总能量.

对
$$\varphi'(r)$$
,有

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_r^2 \varphi_0'(r)(r) + \frac{1}{2} M \omega_1^2 r^2 \varphi_0'(r)(r)$$

$$= \varepsilon' \varphi_0'(r)(r)(r), \qquad (2)$$

式中
$$\varepsilon' = \hbar\omega_1$$
.

将

$$\Psi_{\perp} = \varphi'_{0}(r)(r)(z)e^{-iEt}$$

代入方程(1)中,对方程两边在横向上积分,并利用 方程(2)可得

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial z^2}f + (\varepsilon' - E)f = 0.$$
 (3)

方程(3)是一维等效恒定势场中的薛定谔方程,它具有平面波解.由于波是从左向右传播,当其传播到z=0处由于两区的横向频率不匹配会造成反射,故可将方程(3)的解设为如下形式:

$$f = e^{ikz} + Ae^{-ikz} , \qquad (4)$$

式中, k 为物质波的入射动量, A 表征反射强度.

将(4)式代入方程(3)中,可以得到k, E 及 ε' 之间的关系,

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} + \varepsilon'. \tag{5}$$

$2.2. z \ge 0$ 区域

当物质波传播到波导衔接处,即 z=0 处进入波导管 \parallel 时,由于两段波导管的横向频率不同 物质波的横向模式一般不再处于波导管 \parallel 的基态模,而是各种模式的混合状态,即出现模式的激发,在 $z \ge 0$ 区域可以将特定能量的物质波按波导管的本征模式进行展开,取

$$\Psi_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(r)g_n(z)e^{-iEt}$$
,

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_r^2\varphi_n(r) + \frac{1}{2}M\omega_2^2r^2\varphi_n(r) = \varepsilon_n\varphi_n(r)$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \dots), \qquad (6)$$

式中 $\varepsilon_n = \hbar\omega_2(2n+1)$.

将

$$\Psi_{\parallel} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(r) g_n(z) e^{-iEt}$$

代入方程(1)中,方程两边对 $\varphi_n(r)$ 积分并利用(5)式可得 $g_n(z)$ 满足的方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial z^2}g_n + (\varepsilon_n - E)g_n = 0.$$
 (7)

方程(7)和(3)一样,也有平面波解.由于物质波是从 左往右传播,且可向右无限传播而不会碰到边界,故 其解可设为

$$g_n = C_n e^{ik_n z}.$$

将 g_n (z)代入方程(6)可得 k_n , E 及 ϵ_n 之间的关系为

$$E = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2M} + \varepsilon_n. \tag{8}$$

至此已将两个区域的波函数形式上分别求出,但两个表达式中都含有未定参量,一个是R,一个是 C_n .这里可以利用物质波在两个区域衔接处的连续性条件将它们唯一地确定下来。

3. 结果与分析

在 z=0 处 ,波函数及其一阶导数连续 ,故有 $\Psi_{\parallel}(0,r)=\Psi_{\parallel}(0,r)$, $\Psi'_{\parallel}(0,r)=\Psi'_{\parallel}(0,r)$.

将以上求得的 Ψ_{\intercal} 和 $\Psi_{
m T}$ 代入可得

$$(1 + A)\varphi'_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(r),$$
 (9)

$$(1 - A)\varphi'_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{k} C_n \varphi_n(r).$$
 (10)

根据(9)和(10)式可以求得

$$C_{n} = \frac{2k}{k_{n} + k} \int \varphi_{n}(r) \varphi'_{0}(r) dr^{2}$$

$$= \frac{2k \sqrt{\omega_{1}\omega_{2}}}{\pi(k_{n} + k)} \left[e^{-\frac{\omega_{1} + \omega_{2}}{2}r^{2}} L_{n}(\omega_{2} r^{2}) dr^{2} \right]$$

$$= \frac{4k \sqrt{\omega_{1}\omega_{2}}}{(k_{n} + k)} \frac{(\omega_{1} - \omega_{2})^{n}}{(\omega_{1} + \omega_{2})^{n+1}}.$$

可见当 ω_1 和 ω_2 不等时 \mathcal{C}_n 不为零 ,意即在 z=0 处进入波导管 \mathbb{I} 处于基态模的物质波将向波导管 \mathbb{I} 的各个高阶本征模式进行激发 .

现在求解物质波由于两段波导管模式不匹配引起的反射率,在量子力学中,反射率(或透射率)是用反射几率流(或透射几率流)与入射几率流的比值来定义的,即

$$R = \frac{\mid j_{r} \mid}{\mid j_{i} \mid},$$

$$T = \frac{\mid j_{t} \mid}{\mid j_{i} \mid}.$$

为了求得反射率和透射率,必须先求出相应的几率流.

由于透射和反射是发生在纵向上 ,故入射几率 流为

$$j_i = \int \frac{\hbar}{2iM} (\boldsymbol{\Psi}^* \nabla \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Psi} \nabla \boldsymbol{\Psi}^*) dr^2$$
$$= k.$$

透射几率流为

$$j_{t} = \int \frac{\hbar}{2iM} (\Psi^{*} \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^{*}) dr^{2}$$
$$= \sum_{n=0}^{N} k_{n} |C_{n}|^{2},$$

式中 n 为能透过的最高模式.由此总透过率为

$$T = \frac{\mid j_{i} \mid}{\mid j_{i} \mid}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{k_{n}}{k} \mid C_{n} \mid^{2}.$$
(11)

反射率可写为

$$R = 1 - T$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{N} \frac{k_n}{k} + C_n + C_n^2.$$
(12)

假设第 n 个模的透过率为 t_n 则

$$\begin{split} t_n &= \frac{k_n}{k} \mid C_n \mid^2 \\ &= \frac{16kk_n\omega_1\omega_2}{(k_n + k)^n} \frac{(\omega_1 - \omega_2)^{n}}{(\omega_1 + \omega_2)^{n+2}}. \end{split}$$

当 k→∞时 $,t_n$ 有极限值 ,

$$t_{n\infty} \ = \ \frac{4\omega_1\,\omega_2(\ \omega_1 \ - \ \omega_2\)^{n}}{\left(\ \omega_1 \ + \ \omega_2\ \right)^{n+2}} \, .$$

首先研究第 n 个模式的透过率与入射动量之间的关系 ,见图 χ 本文所有图中的 h=M=1 ,故 k 以 $\sqrt{\omega_1}$ 为单位). 从图 2 可以看出 ,对于小于其截止动量的区域各模式的透过率均为零 . 在导通区域开始增大很快 ,最后平缓地趋向其极限值 $t_{n\infty}$.

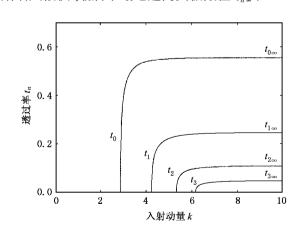


图 2 透过率 t_n 与入射动量之间的关系 $\omega_1 = 1$ Hz $\omega_2 = 5$

相邻模式透过率之比为

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \left(\frac{\left(\omega_1 - \omega_2\right)}{\left(\omega_1 + \omega_2\right)}, \left(k + k_n\right)}{\left(k + k_{n+1}\right)}\right)^2 \frac{k_{n+1}}{k_n}. \quad (13)$$

从(13)式可以看出,透过率的比值与两段波导管横

向束缚频率差有关 ,见图 3. 两段波导管的频率差越大 相邻模式透过率之比也就越大 ,越接近 1. 因此 ,如果两段波导管的横向束缚频率差不特别大 ,在计算总透射率时只需计算为数不多的前几个模式的透过率就能很好地与准确值相比较 .但是 ,当两段波导管的横向束缚频率差较大 ,计算总透射率就需要计及较多的模式才能较好地趋向准确值 . 从图 3 还可以看出 , $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ 对 n 的变化不是很敏感 ,大小基本相同 .

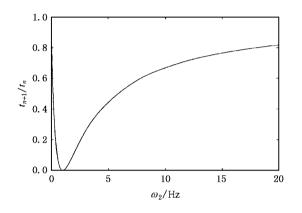


图 3 $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ 与 ω_2 之间的关系 $\omega_1 = 1$ Hz k = 50

图 5 是反射率与波导管频率之间的关系. 从图 5 中可以看出 ,当 ω_1 不变时随着 ω_2 增大反射系数 也增大. 这是因为两边的波导管模式随着 ω_2 增大相差也就越大. 由此引起的纵向等效势差就越大 ,反射系数自然会增大. 同样在反射曲线上也出现了突变点, 这些点出现的原因也将在下面解释. 图 5 显示 ,当 ω_2 增大到某个频率 $\omega_{\rm el}$ (或 $\omega_{\rm el}$)之后对于一定入射动量的物质波的反射系数为 1 ,表明此时发

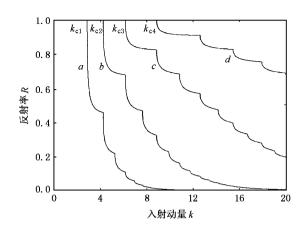


图 4 反射率 R 随入射动量的变化情况 $\omega_1=1$ Hz. 曲线 $a:\omega_2=5$ Hz ,曲线 $b:\omega_2=10$ Hz ,曲线 $c:\omega_2=20$ Hz ,曲线 $d:\omega_2=40$ Hz

生了全反射 这个频率称为该复合波导管对一定入射动量的物质波的截止频率.此外 随着入射动量的增大 复合波导管的截止频率也会增大.

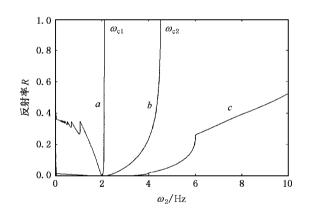


图 5 反射率 R = 10 Hz. 曲线 a: k=1 ,曲线 b: k=5 : 曲线 c: k=10

现在具体考察模式截止与波导管及物质波入射动量之间的关系.由方程(5)和(8)可得到色散关系式

$$k_n^2 = k^2 + \frac{2M}{\hbar} (\varepsilon' - \varepsilon_n). \tag{14}$$

这也是能量守恒等式.图 6 和图 7 分别给出了 k_n 与 k 和 ω_2 的关系.图 6 表明 k_n 具有截止值 ,小于该值 的 k_n 没有实数值.图 7 表明 k_n 随 ω_2 增大而减小 , 当 ω_2 增大到某一数值时 k_n 没有相应的实数值 ,即 出现了截止.

这里给出图 4、图 5 中反射率突变点的解释 1 从图 6 可以看到 1 那些突变点的横坐标和 1 1 的截止坐

标是一一对应的.这说明,每当 ½ 增大到某个模式的截止动量时,该模式就从截止状态变为导通状态,该模式的反射率马上从 1 开始减小,因而总反射率曲线出现突变.同样道理,图 7 的突变点与相应的某个模式的截止频率是一一对应的,因而当某个模式从截止状态转变为导通状态,总反射率曲线就会出现突变

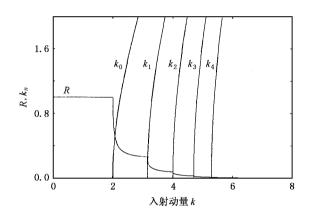


图 6 $R_n k_n$ 与 k 之间的关系 k=1 $\omega_1=1$ Hz $\omega_2=3$ Hz

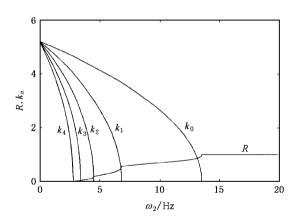


图 7 R k_n 与 ω_2 之间的关系 k=5 $\omega_1=1$ Hz

当 k_n 和 k 都是实数时 物质波可以自由地从波导管 I 进入波导管 I ,这种情况是可以期望的 .然 而 如果 $k^2 > 0$,即物质波在波导管 I 内自由传播 , 而 $k_n^2 < 0$,即高于 n 阶的横向模式在波导管 I 内按指数衰减 ,可以说此时波导管 I 对具有一定动量的物质波具有截止传播的作用

首先考虑 n=0 的情况 ,即

$$k_0^2 = k^2 + \frac{2M}{\hbar}(\omega_1 - \omega_2).$$

若 $k_0^2 < 0$ $k^2 > 0$ 则有

$$k^2 + \frac{2M}{\hbar}(\omega_1 - \omega_2) < 0.$$
 (15)

(15)式成立时必有 $\frac{\omega_2}{\omega_1} > 1$. 此条件表明当物质波从

一段弱横向束缚的波导管向紧横向束缚的波导管传输时,如其动量满足(15)式,该物质波将不能在紧横向束缚的波导管内自由传播,这种情况我们称之为波导截止.图6中当入射动量 k < 2显示的就是这种情况,图中的反射率曲线表明此时的反射率为1.

接着考虑 $n \ge 1$ 的情况. 若 $k_n^2 < 0$, $k_{n-1}^2 > 0$,即大于和等于 n 阶的横模被截止 ,低于 n 阶的横模可以自由传播 ,由(14)式有

$$\frac{2M}{\hbar} [(2n-1)\omega_2 - \omega_1] < k^2$$

$$< \frac{2M}{\hbar} [(2n+1)\omega_2 - \omega_1], \qquad (16)$$

$$0 < k^2 < \frac{2M}{\hbar} [(2n + 1)\omega_2 - \omega_1].$$
 (17)

要使不等式(17)成立 必须有

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} > \frac{1}{2n+1}.\tag{18}$$

这说明两段波导管横向束缚频率之比必须满足(18)式 才能有大于和等于 n 阶的横模被截止 ,低于 n 阶的横模在两段波导管内自由传播.

ᅶ

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} > 1$$

时 波导管形状如图 I(a)所示.这时动量满足(16)式 处于横模基态的物质波从左向右传播进入波导管 II时 在衔接处激发到等于或高于 n 阶的模式将很快地衰减掉 不能自由传播.

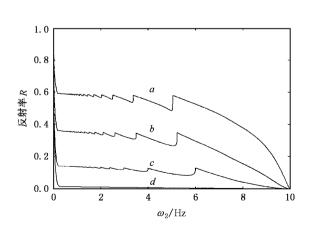


图 8 反射率 R 与 ω_2 之间的关系 $1 > \frac{\omega_2}{\omega_1} > \frac{1}{2n+1}$, $\omega_1 = 10$ Hz. 曲线 a: k=0.5 , 曲线 b: k=1.0 , 曲线 c: k=2.0 , 曲线 d: k=5.0

当

$$1 > \frac{\omega_2}{\omega_1} > \frac{1}{2n+1}$$

时 波导管形状如图 1(b)所示.这时动量满足(17)式的物质波在右半段波导管中也会出现在衔接处激发起来的高阶模被截止的情况.从图 8 可以看出 ,当 ω_2 逐渐变小时 ,反射率的突变点越来越多 ,这些突变点的个数直接与导通模式的个数 n 相关.

4. 总 结

本文研究了物质波在由两段波导管相衔接的复合波导管内的传播特性.利用波导管本征模式展开,理论上分析和计算了物质波在这种复合波导管中的反射和模式激发特性.从上述分析可以看出,由于波导管横向束缚势在衔接处的跳变,在波导管衔接处将出现物质波的反射、模式激发等现象.

对于一定参数的复合波导管,具有较小入射动量的物质波将不能在这种波导管内自由传播,而是在衔接处发生全反射,或是物质波在该复合波导管

是传播截止的. 当物质波的入射动量逐渐增大时. 在 复合波导管中的另半段波导管中会逐渐激发出可以 传播的处于基态模、第一激发模甚至更高阶激发模 的物质波,在衔接处的反射率会从第一截止动量 kal 处从1开始变小.随着入射动量的增大,更多模式的 激发 反射率会变得越来越小,研究发现,在反射率 随动量增大而变小的过程中在某些动量值会出现反 射率突变的现象 这是由于某个模式从截止状态激 发到导通状态所引起的,从该现象可以得出,适当地 选择复合波导管的参数 ,可以使具有某些动量的处 于基态模的物质波在穿过复合波导管的衔接处时发 生的模式激发得到抑制,如果处于基态模式的物质 波中混有高阶模式将会对原子干涉仪的精度产生不 良影响 因而在设计原子干涉仪的导臂时就应当按 照本文的分析适当地选择参数,用以抑制物质波由 于穿过导臂的不同区段而激发起来的高阶模式,本 文工作还可以推广到具有非线性相互作用的波色-爱因斯坦凝聚体 利用前人的工作[13,14]考察波色-爱 因斯坦凝聚体在波导管中的传输特性,并研究其动 力学性质

- [1] Pruvost L, Dan M, Olivier H et al 1999 Opt. Commun. 166 199
- [2] Hau L V , Golovchenko J A , Michael M B 1995 Phys. Rev. Lett. 74 3138
- [3] Schmiedmayer J 1995 Phys. Rev. A 52 R13
- [4] James A S , Alex A Z 2003 Phys . Rev . A 68 013611
- [5] Hinds E A, Vale C J, Boshier M G 2001 Phys. Rev. Lett. 86 1462
- [6] Kevrekidis P G , Frantzeskakis D J , Theocharis G et al 2003 Phys . Lett . A $317\ 513$
- [7] Davis T J 1999 J. Opt. B: Quantum Semiclass 1 408
- [8] Kan W H , He M , Wang J et al 2003 Chin . J . Quantum Electron .

- **20** 310 (in Chinese)[谌维浩、何 明、王 谨等 2003 量子电子学报 **20** 310]
- [9] Li S Q, Huang H, Li D J 1999 Acta Sin. Quantum Opt. 5 (in Chinese) [李师群、黄 湖、李代军 1999 量子光学学报 5]
- [10] Yin J P , Gao W J , Wang H F et al 2002 Chin . Phys . 11 1157
- [11] Zhang L, Cai YJ, Lu X H 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1777 (in Chinese)[张 蕾、蔡阳健、陆璇辉 2004 物理学报 **53** 1777]
- [12] Markku J , Stig S 2002 Phys . Rev . A 66 053605
- [13] Liu W M , Wu B , Niu Q 2000 Phys . Rev . Lett . 84 2294
- [14] Liang Z X , Zhang Z D , Liu W M 2005 Phys . Rev . Lett . 94 050402

Propagation of matter waves through the joint between two atomic waveguides *

Duan Zheng-Lu¹) Zhang Wei-Ping²)[†] Li Shi-Qun¹) Zhou Zhao-Ying³)

Feng Yan-Ying³) Zhu Rong³)

1 **Market Department of Physics , Tsinghua University , Beijing 100084 , China)

2 **Market Laboratory of Optical and Magnetic Resonance Spectroscopy of Ministry of Education ,

Department of Physics , East China Normal University , Shanghai 200062 , China)

3 **Market Department of Precision Instruments and Mechanology , Tsinghua University , Beijing 100084 , China)

(Received 23 March 2005 ; revised manuscript received 22 July 2005)

Abstract

In this paper, the propagation properties of matter waves through the joint between two atomic waveguides are investigated. A multimode coupling model is developed to describe the excitation of the matter waves through the waveguides. We analyze the dependence of the reflection and excitation on the parameters of the atomic waveguides. The condition to minimize the excitation of the atomic waves is given.

Keywords: atom optics, atom waveguide, excitation, mode cutoff

PACC: 3280, 0365

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10474055), the Scientific Research Program from the Science and Technology Committee of Shanghai China (Grant No. 04DZ14009), and the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2001CB309308).

 $[\]dagger$ E-mail $\mbox{`wpzhang@phy.ecnu.edu.cn}$