

等束宽超短脉冲光束的远场特性

邹其徽 吕百达

(四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

(2004 年 11 月 30 日收到 2005 年 7 月 8 日收到修改稿)

利用角谱法和复解析信号法推导出了等束宽超短高斯脉冲光束在远场的解析传输公式及其傅里叶谱. 研究了若干个甚至一个光周期数的等束宽超短高斯脉冲光束的远场特性, 并与等衍射长度超短高斯脉冲光束作了比较. 研究表明, 等束宽超短高斯脉冲光束在远场存在脉冲展宽、光谱变窄、离轴光谱红移、轴上光谱蓝移等特性.

关键词: 角谱法, 复解析信号法, 等束宽超短高斯脉冲光束

PACC: 4255B, 4280W

1. 引 言

随着飞秒脉冲激光技术的迅速发展, 超短脉冲光束的传输变换引起了科技工作者的研究兴趣. 与准单色脉冲比较, 脉冲宽度为飞秒量级的超短脉冲在无色散、无损耗的线性介质中传输时, 其光谱、能量、脉冲时间波形要发生变化, 会产生时空耦合效应^[1-5]. 高斯型空间分布的超短脉冲研究一般基于两种假设, 一是设所有频率分量的脉冲光束具有相同的瑞利长度, 即等衍射长度超短高斯脉冲光束^[6], 其在自由空间中传输的近场及远场特性已有研究^[7,8]. 二是设所有频率分量的脉冲光束具有相同的束腰宽度, 即等束宽超短高斯脉冲光束^[6], 由于数学处理上的复杂性, 在等束宽情况下很难得到傍轴波动方程的解析解, 通常处理的方法是直接进行数值计算或给出近似解^[1,4,6,9]. 在超短脉冲与物质相互作用、光谱学等研究中, 需要了解超短光脉冲的远场特性. 本文采用了角谱法和复解析信号法推导出等束宽超短高斯脉冲光束在远场的光场及其傅里叶谱的解析表达式, 并对单周期和若干个光周期的情况进行计算分析和比较讨论.

2. 等束宽超短高斯脉冲光束在远场的传输方程

首先考虑单色分量超短脉冲光束在自由空间中的传输. 频域中脉冲光场满足亥姆霍兹方程

$$(\nabla^2 + k^2)E(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (1)$$

式中, ∇^2 为拉普拉斯算符, $E(\mathbf{r}, \omega)$ 是光场 $E(\mathbf{r}, t)$ 的傅里叶变换谱, $|\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $k = \omega/c$, k 是波数, c 为真空中的光速, ω 为角频率. 由角谱理论得到光场 $E(\mathbf{r}, \omega)$ 的表达式^[10]为

$$E(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, k_y, 0, \omega) \exp[-i(k_x x + k_y y + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z)] dk_x dk_y, \quad (2)$$

式中角谱 $A(k_x, k_y, 0, \omega)$ 由入射平面 $z = 0$ 处光场 $E(\mathbf{r}_0, \omega)$ 得到, 即

$$A(k_x, k_y, 0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\mathbf{r}_0, \omega) \times \exp(ik_x x_0 + ik_y y_0) dx_0 dy_0. \quad (3)$$

使用远场近似和稳相法 (2) 式可化为^[10]

$$E(\mathbf{r}, \omega) = \frac{ikz}{r^2} \exp(-ikr) A\left(k \frac{x}{r}, k \frac{y}{r}, 0, \omega\right). \quad (4)$$

假设在入射面 $z = 0$ 光场为高斯分布,

$$E(\mathbf{r}_0, \omega) = f(\omega) \exp\left[-\frac{(x_0^2 + y_0^2)}{w_0^2}\right], \quad (5)$$

式中, $f(\omega)$ 为初始时轴上的脉冲光谱, w_0 为束腰宽度且与频率无关. 将 (5) 式代入 (3) 式可得

$$A(k_x, k_y, 0, \omega) = f(\omega) \frac{w_0^2}{2} \times \exp\left[-\frac{w_0^2}{4}(k_x^2 + k_y^2)\right]. \quad (6)$$

将 (6) 式代入 (4) 式得

$$E(\mathbf{r}, \omega) = f(\omega) \frac{i\omega w_0^2 \cos\theta}{2cr} \exp(-ikr)$$

$$\times \exp\left(-\frac{w_0^2 k^2 \sin^2 \theta}{4}\right). \quad (7)$$

在傍轴近似下,

$$\begin{aligned} \cos \theta &\approx 1, \\ \sin^2 \theta &\approx \tan^2 \theta = (x^2 + y^2)/z^2, \\ r &\approx z + (x^2 + y^2)/(2z), \end{aligned} \quad (8)$$

则(7)式化为

$$\begin{aligned} E_p(\mathbf{r}, \omega) &= f(\omega) \frac{i\omega w_0^2}{2cz} \exp\left(-i\frac{z}{c}\omega\right) \\ &\times \exp\left[-i\frac{(x^2 + y^2)}{2cz}\omega\right] \\ &\times \exp\left(-\frac{w_0^2(x^2 + y^2)}{4c^2 z^2}\omega^2\right). \quad (9) \end{aligned}$$

(9)式也可由夫琅禾费衍射积分给出(9)式与文献[3]中的(25)式一致.

考虑初始时轴上脉冲为高斯型^[11],

$$A(t) = \exp\left[-\left(a_g \frac{t}{T}\right)^2\right] \cos(\omega_c t), \quad (10)$$

式中, $a_g = (2\ln 2)^{1/2}$, ω_c 为载波频率, T_c 是相应的振荡周期, T 是脉冲宽度, $m = T/T_c$ 是脉冲宽度所包含振荡的光周期数. $A(t)$ 的傅里叶谱为

$$f(\omega) = \frac{1}{2}[g(\omega - \omega_c) + g^*(-\omega - \omega_c)], \quad (11)$$

式中, 符号“ $*$ ”表示复共轭,

$$g(\gamma) = \frac{T}{\sqrt{2}a_g} \exp\left[-\frac{T^2 \gamma^2}{4a_g^2}\right].$$

为了能研究若干个光周期, 甚至一个光周期的超短脉冲并避免光脉冲出现空间奇异行为, 我们采用复解析信号解 $E^+(\mathbf{r}, t)$ 描述光场^[5,12], 它可由(7)和(11)式经单边逆傅里叶变换得^[13]

$$\begin{aligned} E^+(\mathbf{r}, t) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty E(\mathbf{r}, \omega) \exp(i\omega t) d\omega \\ &= \frac{w_0^2 \cos \theta}{4rc \sqrt{\pi p}} \int_0^\infty i\omega \exp(i\omega t') \\ &\times \exp\left(-\frac{w_0^2 \sin^2 \theta}{4c^2} \omega^2\right) \\ &\times \left\{ \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_c)^2}{4p}\right] \right. \\ &\left. + \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_c)^2}{4p}\right] \right\} d\omega, \quad (12) \end{aligned}$$

式中, $p = a_g^2/T^2$, $t' = t - r/c$ (当地时间). (12)式积分后得

$$E^+(\mathbf{r}, t) = \frac{w_0^2 \cos \theta}{4rc(1 + 4ap)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} &\times \left\{ i2\sqrt{4p(1 + 4ap)} \pi \exp\left[\frac{(2pt' - i\omega_c)^2}{4p(1 + 4ap)}\right] \right. \\ &+ (-2pt' - i\omega_c) \exp\left(-\frac{i2\omega_c t'}{1 + 4ap}\right) \\ &+ (-2pt' - i\omega_c) \\ &\times \exp\left(-\frac{i2\omega_c t'}{1 + 4ap}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{2ipt' - \omega_c}{\sqrt{4p(1 + 4ap)}}\right) \\ &+ (-2pt' + i\omega_c) \operatorname{erf}\left(\frac{2ipt' + \omega_c}{\sqrt{4p(1 + 4ap)}}\right) \\ &+ \omega_c - 2pt'\left. \right\} \\ &\times \exp\left(-\frac{pt'^2 - i\omega_c t' + a\omega_c^2}{1 + 4ap}\right), \quad (13) \end{aligned}$$

式中, $a = w_0^2 \sin^2 \theta / (4c^2)$, $\operatorname{erf}(\cdot)$ 为误差函数. (13)式为等束宽超短高斯脉冲光束在远场的光场解析式, 是本文的主要解析结果. 在文献[1]中仅给出角谱法的傍轴近似解析解, 文献[6]给出的是脉冲包络的解析解, 仅适用于若干个光周期以上的超短脉冲光束. 本文所得到的解析式适用于大衍射角及光周期数任意的情形, 具有普遍应用意义.

由(12)式得等束宽超短高斯脉冲光束的傅里叶谱 $\hat{E}(\mathbf{r}, \omega)$ 为

$$\begin{aligned} \hat{E}(\mathbf{r}, \omega) &= H(\omega) \frac{w_0^2 \cos \theta}{2\sqrt{2\pi}rc} i\omega \\ &\times \left[\exp\left(-\frac{(\omega - \omega_c)^2}{4p}\right) \right. \\ &+ \exp\left(-\frac{(\omega + \omega_c)^2}{4p}\right) \left. \right] \\ &\times \exp\left(-i\frac{\omega r}{c}\right) \exp(-a\omega^2), \quad (14) \end{aligned}$$

式中 $H(\omega)$ 是单位阶跃函数.

由(14)式可得等束宽超短高斯脉冲光束的中心频率 ω_0 为

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{p}{\sqrt{2\pi}\beta} \left[8\beta + 2\omega_c^2 + \sqrt{\frac{2\pi\omega_c^2}{\beta}} \right. \\ &\times \exp\left(\frac{\omega_c^2}{2\beta}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\omega_c}{\sqrt{2\beta}}\right) (3\beta + \omega_c^2) \\ &\left. \div \left[\beta + (\beta + \omega_c^2) \exp\left(\frac{\omega_c^2}{2\beta}\right) \right] \right], \quad (15) \end{aligned}$$

式中 $\beta = p(1 + 4ap)$. 利用(15)式可计算远场任意空间位置脉冲的中心频率. 由(15)式令 $a = 0$ 可得轴上的中心频率, 由(15)式看出, 等束宽超短高斯脉冲光束的轴上中心频率仅与载波频率及脉冲参数有关.

由(14)式得等束宽超短高斯脉冲光束的功率谱为

$$\begin{aligned} |\hat{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2 &= \frac{w_0^4 \cos^2 \theta}{8c^2 r^2 p} \omega^2 \left[\exp\left(-\frac{(\omega - \omega_c)^2}{4p}\right) \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(-\frac{(\omega + \omega_c)^2}{4p}\right) \right]^2 \\ &\quad \times \exp(-2a\omega^2). \end{aligned} \quad (16)$$

对(16)式求角频率 ω 的偏导数,并令其为零得

$$\begin{aligned} 2p(2a\omega^2 - 1) \left[1 + \exp\left(\frac{\omega\omega_c}{p}\right) \right] \\ + \omega^2 \left[1 + \exp\left(\frac{\omega\omega_c}{p}\right) \right] \\ + \omega\omega_c \left[1 - \exp\left(\frac{\omega\omega_c}{p}\right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

由于 $\exp(\omega\omega_c/p) \gg 1$,轴上功率谱取极大值时角频率 ω 近似满足

$$\omega \approx (\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 8p})/2. \quad (18)$$

(18)式说明在轴上不同光周期数的等束宽超短高斯脉冲光束的频率移动分别趋于一渐近值,随着光周期数增加,频率移动减少直至消失.由(18)式可得轴上的蓝移为 $\Delta\omega \approx ((\omega_c^2 + 8p)^{1/2} - \omega_c)/2$,即对于一定光周期数的等束宽超短高斯脉冲光束在轴上光谱蓝移为一常数值.

由(14)式,根据巴塞伐定理得等束宽超短高斯脉冲光束的空间光强分布^[9]

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}) &= \frac{\sqrt{2\pi} w_0^4 p^2 \cos^2 \theta}{4c^2 r^2 \beta^{5/2}} \exp\left(-\frac{\omega_c^2}{2p}\right) \\ &\quad \times \left[\beta + (\beta + \omega_c^2) \exp\left(\frac{\omega_c^2}{2\beta}\right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

由(19)式看出,等束宽超短高斯脉冲光束的空间光强分布与脉冲参数及束腰宽度有关.

3. 等束宽超短高斯脉冲光束的远场特性

为了说明等束宽超短高斯脉冲光束在远场的特性,利用(13),(15)–(19)式进行数值计算,计算参数为 $\omega_c = 2.36 \text{ fs}^{-1}$, $T_c = 2.66 \text{ fs}$, $w_0 = 0.05 \text{ mm}$.

图1为不同衍射角单周期等束宽超短高斯脉冲光束的归一化功率谱 $|E(\mathbf{r}, \omega)|^2 / |E(\mathbf{r}, \omega)|_{\max}^2$, $r = 500 \text{ mm}$, $|E(\mathbf{r}, \omega)|^2$ 由(16)式给出.从图1可以看出,衍射角 θ 不为零时光谱红移,并且随着衍射角的增大光谱红移增加,光谱变窄.

图2给出了采用(17)和(15)式计算单周期等束

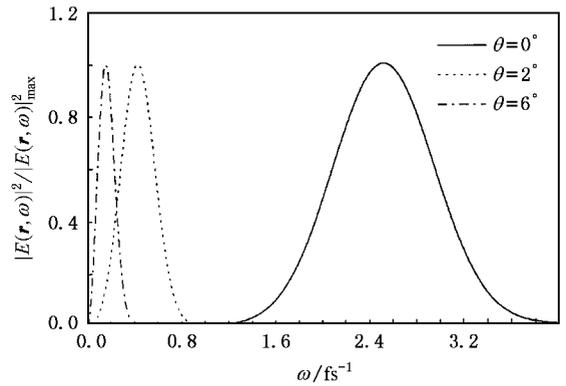


图1 不同衍射角单周期等束宽超短高斯脉冲光束的归一化功率谱 $r = 500 \text{ mm}$

宽超短高斯脉冲光束的功率谱取极大值时的角频率 ω 和中心频率 ω_0 随衍射角的变化曲线.由图2可看出,功率谱取极大值时的角频率和中心频率随衍射角的增大迅速减小并趋近于零,在一定衍射角位置,功率谱取极大值的角频率略大于相应的中心频率.轴上功率谱取极大值时的角频率大于载波频率,即轴上光谱出现了蓝移,蓝移大小与光周期数 m 、脉冲参数有关,与束腰宽度 w_0 无关.表1给出分别采用(17)和(18)式计算所得的轴上功率谱蓝移值 $\Delta\omega$ 和 $\Delta\omega_a = \omega_0 - \omega_c$.由表1可知,二者的计算结果一致,即随着光周期数的增加蓝移迅速减小,当光周期数为5时蓝移几乎为零.

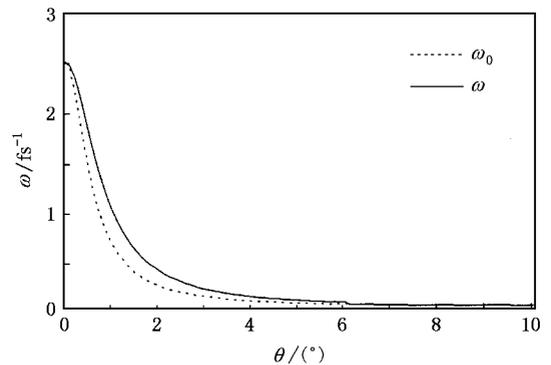


图2 单周期等束宽超短高斯脉冲光束功率谱取极大值时的角频率 ω 和中心频率 ω_0 与衍射角 θ 的关系

等衍射长度超短高斯脉冲光束在远场的傅里叶谱为^[7]

$$\begin{aligned} \hat{E}(\mathbf{r}, \omega) &= 2h(\omega) \frac{il \cos \theta}{r} f(\omega) \\ &\quad \times \exp(-ikr) \exp\left(-\frac{kl \sin^2 \theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

表 1 不同光周期数的等束宽超短高斯脉冲光束轴上的功率谱取极大值时的 $\Delta\omega$, $\Delta\omega_a$ 和 $\omega_0 - \omega$

m	1	2	3	4	5	6	8	10
$\Delta\omega/\text{fs}^{-1}$	0.158	0.041	0.018	0.010	0.007	0.005	0.003	0.002
$\Delta\omega_a/\text{fs}^{-1}$	0.158	0.041	0.018	0.010	0.007	0.005	0.003	0.002
$\omega_0 - \omega/\text{fs}^{-1}$	0.0046	0.0004	0.00007	0.00002	0.00001	0.00001	0.00000	0.00000

式中 l 为衍射长度,是与频率无关的常数.将 (11) 式代入 (20) 式,等衍射长度超短高斯脉冲光束在传输轴上的功率谱取极大值时的角频率满足下列关系:

$$\omega \left[\exp\left(\frac{\omega\omega_c}{p}\right) + 1 \right] = \omega_c \left[\exp\left(\frac{\omega\omega_c}{p}\right) - 1 \right]. \quad (21)$$

由于 $\exp(\omega\omega_c/p) \gg 1$, 因此由 (21) 式得 $\omega = \omega_c$, 即等衍射长度超短高斯脉冲光束在传输轴上的光谱既不存在蓝移,也不存在红移,功率谱在其载波频率处取极大值.

比较 (15) 和 (18) 式可知,虽然轴上的中心频率和功率谱取极大值时角频率的解析表达式不一样,但它们的计算结果仅在单周期时不同,光周期数大于或等于 2 时它们的差异几乎为零,如表 1 所示.而等衍射长度超短高斯脉冲光束在轴上的中心频率 ω_0^l 由 (20) 式可得

$$\omega_0^l = \frac{4p \exp(-\omega_c^2/2p) + \sqrt{2\pi p} \omega_c \text{erf}(\omega_c/\sqrt{2p})}{\sqrt{2\pi p} [1 + \exp(-\omega_c^2/2p)]}. \quad (22)$$

由于 $\exp(-\omega_c^2/2p) \ll 1$ 以及 $\text{erf}(\omega_c/\sqrt{2p}) \approx 1$, 所以 $\omega_0^l \approx \omega_c$, 即等衍射长度超短高斯脉冲光束在轴上的中心频率等于其载波频率.

采用 (13) 式计算的归一化单周期等束宽超短高斯脉冲光束的时间波形 $|E(\mathbf{r}, t)|^2 / |E(\mathbf{r}, t)|_{\text{max}}^2$ 示于图 3. 由图 3 可以看出,随着衍射角的增大脉冲的时间波形展宽.脉冲的展宽用展宽因子 η 来描述, η

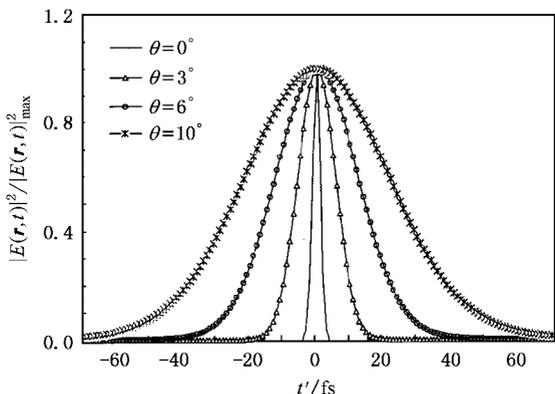


图 3 单周期等束宽超短高斯脉冲光束的归一化时间波形

定义为输出脉冲宽度(半高全宽)与输入脉冲宽度(半高全宽)的比值.

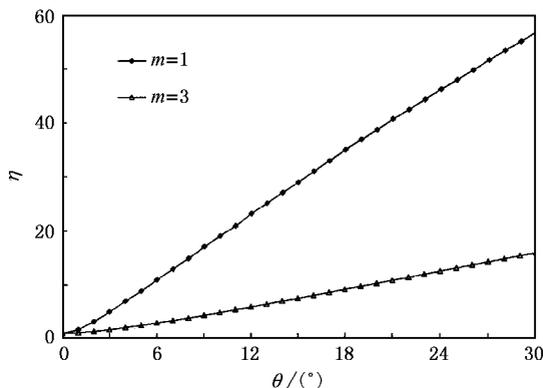


图 4 不同光周期数的等束宽超短高斯脉冲光束的展宽因子 η 与衍射角 θ 的关系

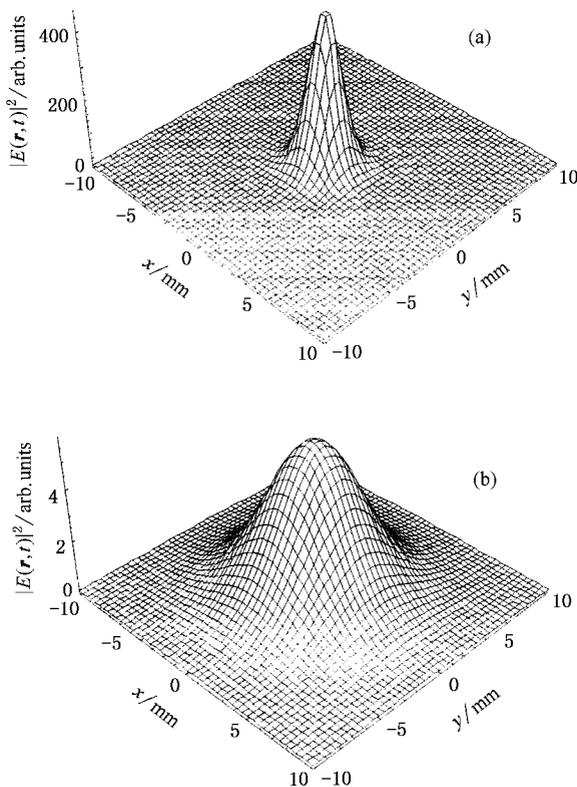


图 5 不同束腰宽度的单周期等束宽超短高斯脉冲光束的二维光强分布 $z = 500 \text{ mm}$. (a) $w_0 = 0.05 \text{ mm}$, (b) $w_0 = 0.01 \text{ mm}$

图 4 给出了等束宽超短高斯脉冲光束的光周期数 m 分别为 1 和 3 的脉冲展宽因子与衍射角的变化关系. 由图 4 可以看出, 随着衍射角的增大脉冲展宽因子逐渐增大. 由图 4 还可以看出, 光周期数越大, 展宽因子增加相对要缓慢, 这是由于光周期数的增加, 它们的时空耦合效应减弱.

图 5 给出了采用(19)式计算得到的单周期等束

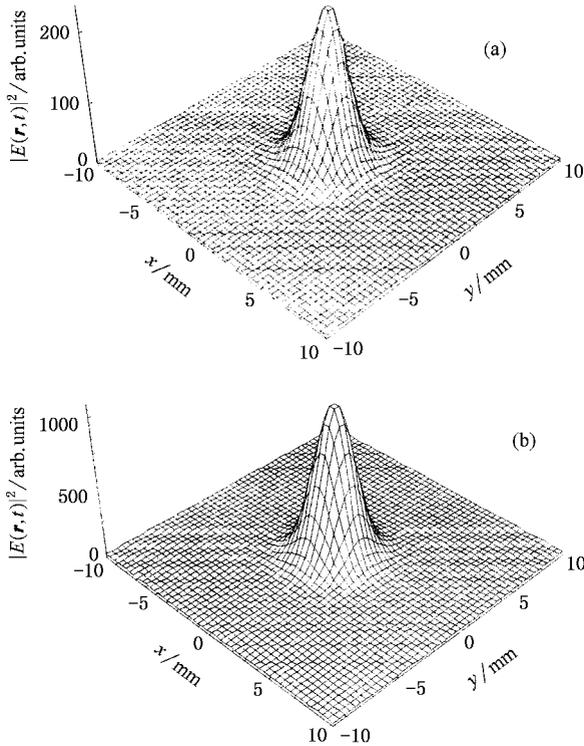


图 6 不同光周期数的等束宽超短高斯脉冲光束的二维光强分布 $z = 500$ mm. (a) $m = 1$, (b) $m = 5$

宽超短高斯脉冲光束的二维光强分布. 由图 5 可以看出, 单周期等束宽超短高斯脉冲光束的二维光强分布随着束腰宽度的减小而展宽, 轴上光强减小. 这是由于超短脉冲在真空中传输的衍射效应的影响^[3], 束腰宽度越小衍射效应越明显, 光束扩展越显著.

图 6 给出了采用(19)式计算得到的不同光周期数的等束宽超短高斯脉冲光束的二维光强分布. 由图 6 可以看出, 光周期数的变化并不影响二维光强分布, 但影响二维光强的大小, 光周期数越大轴上中心光强就越大.

4. 结 论

本文采用角谱法和复解析信号法推导出了等束宽超短高斯脉冲光束在远场的传输公式及其傅里叶谱. 所得公式适用于夫琅禾费衍射区大衍射角范围, 是严格的解析结果, 与文献中已有结果比较具有应用较为广泛的优点. 以高斯脉冲为例对等束宽超短高斯脉冲光束在远场的时空特性作了研究, 并与等衍射长度超短高斯脉冲光束的结果作了对比. 研究表明, 随衍射角的增大, 它们的光谱红移、功率谱变窄、中心频率减小、脉冲波形展宽; 等束宽超短高斯脉冲光束在传输轴上存在光谱蓝移, 光谱蓝移大小随光周期数增加迅速减小, 等衍射长度超短高斯脉冲光束在轴上没有光谱蓝移; 束腰宽度和光周期数的大小影响等束宽超短高斯脉冲的二维光强分布. 本文所用的方法还可用于研究其他类型超短脉冲光束的传输特性, 有关结果将另文发表.

[1] Christov I P 1985 *Opt. Commun.* **53** 364
 [2] Ziolkowski R W, Judkins J B 1992 *J. Opt. Soc. Am. A* **9** 2021
 [3] Porras M A 2002 *Phys. Rev. E* **65** 026606
 [4] Wang Z, Zhang Z, Xu Z et al 1996 *Opt. Commun.* **123** 5
 [5] Porras M A 1998 *Phys. Rev. E* **58** 1086
 [6] Agrawal G P 1999 *Opt. Commun.* **167** 15
 [7] Liu Z, Li B 2002 *Opt. Commun.* **206** 13
 [8] Li B, Liu Z 2003 *J. Mod. Opt.* **50** 815

[9] Agrawal G P 1998 *Opt. Commun.* **157** 52
 [10] Mandel L, Wolf E *Optical Coherence and Quantum Optics* (New York: Cambridge University Press)
 [11] Liu Z, Li B 2003 *Chin. Phys.* **12** 879
 [12] Fu X Q, Guo H, Hu W et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1693 (in Chinese) [傅喜全、郭弘、胡巍等 2001 物理学报 **50** 1693]
 [13] Melamed T, Felsen L B 1998 *J. Opt. Soc. Am. A* **15** 1268

The far-field properties of ultrashort pulsed beams with constant waist width in free space

Zou Qi-Hui Lü Bai-Da

(*Institute of Laser Physics and Chemistry , Sichuan University , Chengdu 610064 , China*)

(Received 30 November 2004 ; revised manuscript received 8 July 2005)

Abstract

By using the angular spectrum and complex analytic signal representations , the analytic propagation expression and its Fourier spectrum for ultrashort Gaussian pulsed beams with constant waist width in the far field are derived. The far-field properties of few- and single-cycle ultrashort Gaussian pulsed beams with constant waist width are studied , and compared with those of ultrashort Gaussian pulsed beams with constant diffraction length. The properties of pulse broadening , spectrum narrowing , off-axis spectrum redshift and on-axis spectrum blueshift are found for ultrashort Gaussian pulsed beams with constant waist width in the far field.

Keywords : angular spectrum representation , complex analytical signal representation , ultrashort Gaussian pulsed beam with constant waist width

PACC : 4255B , 4280W