第 54 卷 第 2 期 2005 年 2 月
1000-3290/2005/54(02)/0500-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.2,February,2005

相空间中力学系统的两类 Mei 对称性及守恒量

方建会[1)]　廖永潘[2)]　彭　勇[2)]

[1)]（石油大学（华东）物理科学与技术学院，东营　257061）

[2)]（河西学院物理系，张掖　734000）

（2004 年 5 月 26 日收到；2004 年 6 月 25 日收到修改稿）

研究相空间中力学系统的两类 Mei 对称性及守恒量，给出相空间中力学系统的两类 Mei 对称性的定义，得到其确定方程及守恒量，并举例说明结果的应用.

关键词：相空间，力学系统，Mei 对称性，守恒量

PACC：0320，1130

1. 引　　言

力学系统的对称性与守恒量之间有着密切联系，用对称性理论研究力学系统的守恒量是数理学科的一个近代发展方向，主要有 Noether 对称性[1—3]、Lie 对称性[2—4]和 Mei 对称性（也称形式不变性）[5,6]. Noether 对称性是 Hamilton 作用量在无限小变换下的一种不变性. Lie 对称性是微分方程在无限小变换下的一种不变性. Mei 对称性是梅凤翔教授提出的不同于 Noether 对称性和 Lie 对称性的一种新的对称性，它有两种表述：1) Mei 对称性是指系统运动微分方程中的动力学函数经历无限小变换后仍满足原来方程的一种不变性[7,8]. 2) Mei 对称性是指力学系统运动微分方程的形式在无限小变换下保持不变[9,10]. 关于 Mei 对称性的研究已取得一些重要成果[5—22]. 本文研究相空间中力学系统的两类 Mei 对称性及守恒量，给出相空间中力学系统的两类 Mei 对称性的定义，得到其确定方程及守恒量，并举例说明结果的应用.

2. Mei 对称性的定义

相空间中力学系统的运动微分方程为

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + Q_s, \tag{1}$$

其中 $H = H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 是 Hamilton 函数，$Q_s = Q_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 是非势广义力.

引入无限小变换

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \\ q_s^*(t^*) &= q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \\ p_s^*(t^*) &= p_s(t) + \varepsilon\eta_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \end{aligned} \tag{2}$$

在无限小变换（2）下，$H = H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 和 $Q_s = Q_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 变成 $H^* = H(t^*, \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)$ 和 $Q_s^* = Q_s(t^*, \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)$.

按 Mei 对称性的两种表述，可给出如下定义.

定义 1　在无限小变换（2）下，如果力学系统（1）的动力学函数仍满足原来方程，即

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H^*}{\partial p_s}, \qquad \dot{p}_s = -\frac{\partial H^*}{\partial q_s} + Q_s^*, \tag{3}$$

则称这种不变性为力学系统（1）的第一类 Mei 对称性.

定义 2　在无限小变换（2）下，如果力学系统（1）的运动微分方程的形式保持不变，即

$$\dot{q}_s^* = \frac{\partial H^*}{\partial p_s}, \qquad \dot{p}_s^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q_s} + Q_s^*, \tag{4}$$

则称这种不变性为力学系统（1）的第二类 Mei 对称性.

3. Mei 对称性的确定方程

引入无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \sum_{s=1}^{n}\eta_s\frac{\partial}{\partial p_s}, \tag{5}$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \sum_{s=1}^{n}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{s=1}^{n}(\dot{\eta}_s - \dot{p}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{p}_s}. \tag{6}$$

关于相空间中力学系统的第一类 Mei 对称性和第二类 Mei 对称性的判定，有如下的定理 1 和定

理 2.

定理 1　对力学系统(1),如果无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足

$$\frac{\partial}{\partial p_s}(X^{(0)}(H))=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial q_s}(X^{(0)}(H))-X^{(0)}(Q_s)=0, \tag{7}$$

则系统(1)具有第一类 Mei 对称性.

方程(7)称为相空间中力学系统(1)的第一类 Mei 对称性的确定方程.

证明　展开 H^* 和 Q_s^*,有

$$\begin{aligned}H^* &= H(t^*,\boldsymbol{q}^*,\boldsymbol{p}^*)\\ &= H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})+\varepsilon X^{(1)}(H)+O(\varepsilon^2)\\ &= H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})+\varepsilon X^{(0)}(H)+O(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}Q_s^* &= Q_s(t^*,\boldsymbol{q}^*,\boldsymbol{p}^*)\\ &= Q_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})+\varepsilon X^{(1)}(Q_s)+O(\varepsilon^2)\\ &= Q_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})+\varepsilon X^{(0)}(Q_s)+O(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{9}$$

将(8)式和(9)式代入方程(3),并利用方程(1),忽略 ε^2 及以上高阶小项,便得(7)式.

定理 2　对力学系统(1),如果无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足

$$\dot{\xi}_s-\frac{\partial}{\partial p_s}(X^{(0)}(H))=0,$$
$$\dot{\eta}_s+\frac{\partial}{\partial q_s}(X^{(0)}(H))-X^{(0)}(Q_s)=0, \tag{10}$$

则系统具有第二类 Mei 对称性.

方程(10)称为相空间中力学系统(1)的第二类 Mei 对称性的确定方程.

证明　将 q_s^* 和 p_s^* 对 t 求导,得

$$\dot{q}_s^*=\dot{q}_s+\varepsilon\dot{\xi}_s,$$
$$\dot{p}_s^*=\dot{p}_s+\varepsilon\dot{\eta}_s, \tag{11}$$

将(8),(9)和(11)式代入方程(4),并利用方程(1),忽略 ε^2 及以上高阶小项,便得(10)式.

4. Mei 对称性的守恒量

相空间中力学系统的 Mei 对称性在一定条件下可导致守恒量.

定理 3　在无限小变换(2)下,如果力学系统(1)具有第一类 Mei 对称性或第二类 Mei 对称性,且存在规范函数 $F_M=F_M(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 满足条件

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\eta_s+p_s\dot{\xi}_s\right)-H\dot{\xi}_0-X^{(0)}(H)+\sum_{s=1}^{n}Q_s\left(\xi_s-\frac{\partial H}{\partial p_s}\xi_0\right)=-\dot{F}_{\mathrm{M}}, \tag{12}$$

则系统有守恒量

$$I_{\mathrm{M}}=\sum_{s=1}^{n}p_s\xi_s-H\xi_0+F_M=\text{const}. \tag{13}$$

证明　(13)式对 t 求导,然后将(12)式代入,并利用方程(1)便可得证.

5. 算　例

力学系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-q_2, \tag{14}$$

非势广义力为零,试研究系统在相空间中的 Mei 对称性.

有

$$H=\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-L=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+q_2, \tag{15}$$

方程(7)给出

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial p_1}(\xi_2+\eta_1p_1+\eta_2p_2)=0,\\ &\frac{\partial}{\partial p_2}(\xi_2+\eta_1p_1+\eta_2p_2)=0,\\ &\frac{\partial}{\partial q_1}(\xi_2+\eta_1p_1+\eta_2p_2)=0,\\ &\frac{\partial}{\partial q_2}(\xi_2+\eta_1p_1+\eta_2p_2)=0.\end{aligned} \tag{16}$$

方程(10)给出

$$\begin{aligned}&\dot{\xi}_1-\frac{\partial}{\partial p_1}(\xi_2+\eta_1p_1+\eta_2p_2)=0,\\ &\dot{\xi}_2-\frac{\partial}{\partial p_2}(\xi_2+\eta_1p_1+\eta_2p_2)=0,\\ &\dot{\eta}_1+\frac{\partial}{\partial q_1}(\xi_2+\eta_1p_1+\eta_2p_2)=0,\\ &\dot{\eta}_2+\frac{\partial}{\partial q_2}(\xi_2+\eta_1p_1+\eta_2p_2)=0.\end{aligned} \tag{17}$$

取

$$\xi_0=0,\xi_1=0,\xi_2=p_2,\eta_1=0,\eta_2=-1. \tag{18}$$

则(16)式满足,而(17)式不满足.因此对生成元(18),系统具有第一类 Mei 对称性,但不具有第二类 Mei 对称性.由(12)式可求得

$$F_M=q_2-\frac{1}{2}p_2^2. \tag{19}$$

由(13)式可得系统的第一类 Mei 对称性导致的守恒量为

$$I = q_2 + \frac{1}{2}p_2^2 = \text{const.} \tag{20}$$

若取

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = t, \xi_2 = 1, \eta_1 = 1, \eta_2 = 0. \tag{21}$$

则(16)式不满足,而(17)式满足.因此对生成元(21),系统具有第二类 Mei 对称性,但不具有第一类 Mei 对称性.由(12)式可求得

$$F_M = t - q_1. \tag{22}$$

由(13)式可得系统的第二类 Mei 对称性导致的守恒量为

$$I = q_1 + p_2 + (p_1 + 1)t = \text{const.} \tag{23}$$

6. 结 论

在相空间中 Mei 对称性的两种表述不等价,Mei 对称性的第一种表述给出的对称性是第一类 Mei 对称性,Mei 对称性的第二种表述给出的对称性是第二类 Mei 对称性.从(7)和(10)式可知,相空间中的力学系统具有第一类 Mei 对称性时,不一定具有第二类 Mei 对称性,反之亦然.当然相空间中力学系统的两类 Mei 对称性导致的守恒量具有相同的表达形式.

[1] Noether A E 1918 *Math*. *Phys*. **K** Ⅰ Ⅱ 235

[2] Li Z P 1993 *Classical and Quantum Constrained Systems and Their Symmetries* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chiense) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社)]

[3] Mei F X 1999 *Applications of Lies groups and Lie algebras to constrained mechanical systems* (Beijing: Science Press,) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京:科学出版社)]

[4] Lutzky M 1979 *J*. *Phys A*: *Math*. *Gen*. **12** 973

[5] Mei F X 2000 *J*. *Beijing Inst*. *Technol*. **9** 120

[6] Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 177

[7] Mei F X 2001 *J*. *Beijing Inst*. *Technol*. **22** 133 (in Chinese) [梅凤翔 2002 北京理工大学学报 **22** 133]

[8] Mei F X 2003 *Mech*. *Engin*. **25** 1 (in Chinese) [梅凤翔 2003 力学与实践 **25** 1]

[9] Mei F X 2001 *J*. *Beijing Inst*. *Technol*. **21** 535 (in Chinese) [梅凤翔 2001 北京理工大学学报 **21** 535]

[10] Wang S Y, Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 373

[11] Wang S Y, Mei F X 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 5

[12] Chan X W, Luo S K and Mei F X 2002 *Appl*. *Math*. *Mech*. **23** 47 (in Chinese) [陈向炜、罗绍凯、梅凤翔 2002 应用数学和力学 **23** 47]

[13] Li R J, Qiao Y F and Meng J 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1 (in Chinese) [李仁杰、乔永芬、孟 军 2002 物理学报 **51** 1]

[14] Ge W K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 939 (in Chinese) [葛伟宽 2002 物理学报 **51** 939]

[15] Fang J H, Xue Q Z and Zhao S Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2183 (in Chinese) [方建会、薛庆忠、赵嵩卿 2002 物理学报 **51** 2183]

[16] Luo S K 2002 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **19** 449

[17] Luo S K 2002 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **38** 257

[18] Qiao Y F, Zhang Y L and Han G C 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1051 (in Chinese) [乔永芬、张耀良、韩广才 2003 物理学报 **52** 1051]

[19] Chan P S and Fang J H 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1044 (in Chinese) [陈培胜、方建会 2003 物理学报 **52** 1044]

[20] Fang J H, Yan X H and Chan P S 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1561 (in Chinese) [方建会、闫向宏、陈培胜 2003 物理学报 **52** 1561]

[21] Fang J H 2003 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **40** 269

[22] Luo S K 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

Tow kinds of Mei symmeties and conserved quantities of a mechanical system in phase space

Fang Jian-Hui[1)] Liao Yong-Pan[2)] Peng Yong[2)]

[1)] (*College of Physics Science and Technology*, *University of Petroleum*, *Dongying* 257061, *China*)

[2)] (*Department of Physics*, *Hexi University*, *Zhangye* 734000, *China*)

(Received 26 May 2004; revised manuscript received 25 June 2004)

Abstract

Two kinds of Mei symmetries and conserved quantities of a mechanical system in phase space are studied. The definitions of the two kinds of Mei symmetries of mechanical system in phase space are given. The determining equations and conserved quantities are obtained. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: phase space, mechanical system, Mei symmetry, conserved quantiy

PACC: 0320, 1130