

混沌时序相空间重构参数确定的信息论方法^{*}

肖方红^{1)†} 阎桂荣¹⁾ 韩宇航²⁾

¹⁾ 西安交通大学建筑工程与力学学院, 西安 710049)

²⁾ 中国工程物理研究院, 绵阳 610003)

(2004 年 5 月 17 日收到)

根据信息论基本原理, 研究了混沌时间序列相空间重构参数延迟时间和嵌入维数的选取. 提出了用符号分析的方法计算互信息函数, 确定出延迟时间. 在此基础上, 提出了一种估计嵌入维数的信息论方法, 即根据重构向量条件熵随向量维数的变化关系来确定嵌入维数. 通过对几种典型混沌动力学系统的数值验证, 结果表明该方法能够确定出合适的相空间重构嵌入维数.

关键词: 混沌, 相空间重构, 互信息, 条件熵, 符号分析

PACC: 0545, 0250

1. 引 言

相空间重构在混沌时间序列分析中有着重要意义^[1-17]. 这一方法是由 Takens^[18] 提出的, 其主要目的是通过用单一的系统输出时间序列来构造一组表征原系统动力学特性的坐标分量, 从而近似恢复系统的混沌吸引子. 相空间的重构通常是用系统某一状态变量 $x(n)$ 的延迟变量 $x(n + \tau)$ 来构造一个 m 维的状态向量, 即

$$X(n) = [x(n), x(n + \tau), x(n + 2\tau), \dots, x(n + (m - 1)\tau)]. \quad (1)$$

理论上, 对于一个无限长的无噪的时间序列, 延迟时间的选取可以是任意的, 但实际上这样的序列是不可得到的, 实际应用中延迟时间的选取对相空间的重构质量有着重大的影响, 因此适当地选取延迟时间具有重要意义. 另一方面, Takens^[18] 已经证明, 对于一个维数为 d 的吸引子, 当嵌入维数 $m \geq 2d + 1$ 时, 重构的吸引子能保持原来吸引子的拓扑特性. 但实际上由于一个未知的动力学系统的吸引子维数 d 是不知道的, 因此这一条件在应用中没有实际意义, 而嵌入维数高于实际维数时, 在混沌时间序列分析和动力学不变量的计算中又带来多余的计算和噪

声. 因此, 嵌入维数的确定也是混沌时间序列分析的一个重要内容, 有着重要意义.

对于延迟时间, 若 τ 太小, 则使得重构的坐标之间不可分辨, 携带大量的多余信息, 构造出的吸引子挤到相空间的对角线附近. 反之, 若 τ 太大, 则使得重构的坐标之间丧失实质上的因果联系. 因此延迟时间的选取要求平衡两种极端情况, 使得重构的坐标之间最大限度地相互独立, 同时又保持各坐标之间的动力学关系. 在延迟时间的选取中, 应用最为广泛的方法是互信息法^[19]. 对于嵌入维数 m , 则应选取一个能充分展开吸引子的最小嵌入维数. 本文基于信息论基本原理, 提出用符号分析的方法计算互信息函数, 确定延迟时间, 在此基础上, 提出一种用重构向量条件熵确定嵌入维数的信息论方法, 并通过对几种典型的非线性动力学系统的数值计算验证方法的可行性.

2. 用互信息确定延迟时间

互信息函数法是由 Fraser 和 Swinney 给出的^[19], 即选取表示一个时间序列相继点之间一般依赖关系的互信息函数的第一个局部极小值点所对应的时间作为延迟时间.

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10276032)与中国工程物理研究院联合基金(NSAF)资助的课题.

[†] E-mail: xiaofh. xjtu@163.com

对于一个含有 N 个元素的变量 $s(n)$, 记 $P_s(s_i)$ 为变量 s 处于状态 s_i 的概率, 则变量 s 的信息熵定义为

$$H(s) = - \sum_{i=1}^N P_s(s_i) \log_2 P_s(s_i). \quad (2)$$

变量 $s(n)$ 的延迟 $q(n) = s(n + \tau)$ 对于 $s(n)$ 的条件熵定义为

$$\begin{aligned} H(q|s) &= - \sum_{i,j} P_{sq}(s_i, q_j) \log_2 [P_{sq}(s_i, q_j) / P_s(s_i)] \\ &= H(s, q) - H(s), \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $P_{sq}(s_i, q_j)$ 是变量 s 和 q 分别取状态 s_i 和 q_j 时的联合概率, $H(s, q)$ 是变量 s 和 q 的联合熵

$$H(s, q) = - \sum_{i,j} P_{sq}(s_i, q_j) \log_2 [P_{sq}(s_i, q_j)]. \quad (4)$$

变量 s 和 q 之间的互信息定义为

$$\begin{aligned} I(q; s) &= H(q) - H(q|s) \\ &= H(q) + H(s) - H(s, q) \\ &= I(s; q). \end{aligned} \quad (5)$$

对于互信息的计算, Fraser 等给出了一种等概率划分空间格子的方法^[19], 这种方法原理上不易掌握, 计算繁琐, 不便于应用. 另一种常用的方法是等间距划分空间格子的方法^[20-21], 这种方法虽然简便, 但有时不能精确确定局部极小值点, 又为确定延迟时间带来较大的误差, 带有一定的随意性, 同时这种方法的计算很繁重. 本文考虑用符号分析的方法^[22-27]来计算互信息, 这种方法能更精确地确定延迟时间, 且计算简便, 是一种较好的计算互信息的方法.

给定一个由 m 个符号组成的符号集 $\{S_0, S_1, \dots, S_{m-1}\}$ 和一个 $m+1$ 个临界点组成的集合 $\{x_{c_0}, x_{c_1}, \dots, x_{c_m}\}$, 由下面的粗粒化符号规则,

$$\text{若 } x_{c_k} \leq x(j) < x_{c_{k+1}} \text{ 则 } s(j) \equiv S_k, \quad (6)$$

将给定的时间序列 $x(n)$ 转换成一个符号序列 $s(n)$, $n=0, 1, 2, \dots$. 将所得符号序列进一步依次分割成长度为 L 的短序列, 并通过下式来标记和辨识这些短序列^[22-27]:

$$l_x(L, i) = \sum_{k=1}^L m^{L-k} s(k+i), \quad (7)$$

其中 i 表示短序列沿着符号序列 $s(n)$ 从第 i 个符号开始. 将符号 S_k 用相应的整数 k 代替, 这样每一个短序列都可以方便地用整数集 $\{0, 1, 2, \dots, m^L - 1\}$ 中的一个整数唯一地进行标记和辨别, 时间序列 $x(n)$ 可进一步转换成由将这些短序列为元素依次

组成的符号序列 $l_x(n)$. 用 P_{l_x} 表示特定短序列 l_x 出现的概率, 它可以用短序列 l_x 在序列 $l_x(n)$ 中出现的次数除以所有短序列的总数来计算. 时间序列 $x(n)$ 包含在符号序列 $l_x(n)$ 中的信息量可以用下式所示的信息熵来定量表示:

$$H(x) = - \frac{1}{L} \sum_{l_x} P_{l_x} \log_2 P_{l_x}. \quad (8)$$

由规则(6)定义的符号语言对混沌序列的信息编码能力与分割临界点 x_{c_i} 的数目及取值相关, 一般地, 可以通过使熵 H 最大化来寻找出最优临界点的数目和取值. 本文为了方便起见, 将一个混沌序列的取值范围分为 10 等分, 取 10 个符号, 短序列长度取为 2.

同样, 对于 $x(n)$ 的延时序列 $x(n + \tau)$, 可以用同样的粗粒化符号规则转换成符号序列 $l_{x_\tau}(n)$, 计算出其信息熵

$$H(x_\tau) = - \frac{1}{L} \sum_{l_{x_\tau}} P_{l_{x_\tau}} \log_2 P_{l_{x_\tau}}. \quad (9)$$

对于时间序列 $x(n)$ 及其延时序列 $x(n + \tau)$, $n=0, 1, 2, \dots$, 其联合熵定义为

$$H(x, x_\tau) = - \frac{1}{L} \sum_{l_x} \sum_{l_{x_\tau}} P(l_x, l_{x_\tau}) \log_2 P(l_x, l_{x_\tau}), \quad (10)$$

其中 $P(l_x, l_{x_\tau})$ 是变量 x 处于状态 l_x 而变量 x_τ 处于状态 l_{x_τ} 的联合概率, 它可以用变量 x 处于状态 l_x 而变量 x_τ 处于状态 l_{x_τ} 的联合序列数除以符号序列 $l_x(n)$ 和 $l_{x_\tau}(n)$ 的联合序列的总数来计算. 因此时间序列 $x(n)$ 与其延时序列 $x(n + \tau)$ 之间的互信息可表示为

$$\begin{aligned} I(\tau) &= H(x) + H(x_\tau) - H(x, x_\tau) \\ &= - \frac{1}{L} \sum_{l_x} P_{l_x} \log_2 P_{l_x} - \frac{1}{L} \sum_{l_{x_\tau}} P_{l_{x_\tau}} \log_2 P_{l_{x_\tau}} \\ &\quad + \frac{1}{L} \sum_{l_x} \sum_{l_{x_\tau}} P(l_x, l_{x_\tau}) \log_2 P(l_x, l_{x_\tau}). \end{aligned} \quad (11)$$

计算出互信息函数 $I(\tau)$ 在不同延时 τ 下的值, 取 $I(\tau)$ 的第一个局部极小值点对应的时间 τ 为延迟时间, 即可确定出一个合适的相空间重构延迟时间.

3. 用条件熵确定嵌入维数

对于一个非线性动力学系统来说, 各变量是相

互作用、相互关联的,系统任一变量的演化都包含着各变量之间相互作用的信息,从而也包含着其他变量的演化信息. 延时坐标相空间重构就是一种从某一变量的一批时间数据中提取和恢复出系统原来规律的方法. Takens^[18]已经证明,可以找到一个合适嵌入维数的空间把有规律的吸引子恢复出来. 基于这一观点,本文提出用重构向量的条件熵来确定嵌入维数.

记重构的相空间向量

$$X = [x(n), x(n + \tau), x(n + 2\tau), \dots, x(n + (m - 1)\tau)]$$

的各分量为 $X_1 = x(n), X_2 = x(n + \tau), \dots, X_m = x(n + (m - 1)\tau)$ 相空间重构也就是用重构分量 X_1, X_2, \dots, X_m 来近似表征原系统的各变量,因此原系统表现出来的混沌吸引子特征,也将在重构分量 X_1, X_2, \dots, X_m 的重构相空间中表现出来. 这样随着重构分量逐渐增多,重构向量就能越来越完整地表征原系统的动力学特征,当重构的分量个数增加到一定值时,这时重构的向量已包含了原系统充分多的动力学信息,进一步增加重构分量不会增加原系统的动力学信息,只会携带多余的信息. 因此可以设想分量 X_1 的熵 $H(X_1)$ 和各分量之间的条件熵 $H(X_2|X_1), H(X_3|X_1X_2), \dots, H(X_m|X_1X_2 \dots X_{m-1})$ 的值将随着重构分量个数的增加由大到小逐渐减小,直至条件熵中包含有充分多的原系统的动力学信息,进一步增加重构分量个数,这时条件熵将出现一个较明显的转折点,随后的条件熵将趋于平稳,这时的条件熵表征的应是多余的信息. 如果取条件熵出现较明显的转折且趋于平稳处的重构分量个数为嵌入维数 m ,可以看出这时的重构向量已包含了原系统充分多的动力学信息,因此应是一个合适的嵌入维数.

对于条件熵,本文将其化为联合熵来计算,即

$$H(X_k | X_1 X_2 \dots X_{k-1}) = H(X_1, X_2, \dots, X_k) - H(X_1, X_2, \dots, X_{k-1}), \quad (12)$$

其中 $k = 2, 3, \dots$, 各重构分量可用粗粒化方法分别转换成符号序列 $l_{X_1}(n), l_{X_2}(n), \dots, l_{X_k}(n)$. 为了计算联合熵,本文提出一种矩阵标识法,将各重构分量看成一个 $n \times k$ 矩阵的一列,则可以得到一个由各重构分量组成的 $n \times k$ 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} l_{X_1}(1) & l_{X_2}(1) & \dots & l_{X_k}(1) \\ l_{X_1}(2) & l_{X_2}(2) & \dots & l_{X_k}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{X_1}(n) & l_{X_2}(n) & \dots & l_{X_k}(n) \end{bmatrix}_{n \times k}. \quad (13)$$

显然矩阵 A 的一行对应重构向量的一个符号序列对 $(l_{X_1}(i), l_{X_2}(i), \dots, l_{X_k}(i))$, 矩阵 A 中各列对应元素相同的行对应的是同一个特定符号序列对 $(l_{X_1}, l_{X_2}, \dots, l_{X_k})$, 其概率可以用矩阵 A 中各列对应元素相同行的行数除以矩阵的总行数来计算.

4. 数值验证

考虑 Lorenz 方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (14)$$

取 $\sigma = 10.0, b = 8/3, r = 28.0$, 用 Runge-Kutta 方法求解方程(14), 步长 $h = 0.01$, 去除暂态过程, 得变量 x 的一个 50000 个点数值解. 图 1(a) 是用符号分析计算出的互信息函数对延迟时间的关系图, 可得延迟时间为 $\tau = 19$. 图 1(b) 是取延迟时间 $\tau = 19$ 时, 通过符号分析求出的条件熵对嵌入维数的关系图, 为使结果看起来更为明显, 纵坐标采用了条件熵的指数函数 $10^{(k-m)}$, 图中一个明显的转折处出现在 $m = 3$ 处, 因此可得嵌入维数 $m = 3$, 这与方程(14)相符合. 图 1(c) 是吸引子在 xy 平面上的投影图, (d) 是延迟时间 $\tau = 19$ 时变量 x 的重构吸引子.

再考虑 Rössler 系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -z - y, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + c(x - c). \end{aligned} \quad (15)$$

取 $a = 0.2, b = 0.2, c = 10.0$, 用 Runge-Kutta 方法求解方程(15), 步长 $h = \pi/100$, 去除暂态过程, 得变量 x 的一个 50000 个点数值解. 图 2(a) 是互信息函数对延迟时间的关系图, 可得延迟时间为 $\tau = 50$. 图 2(b) 是取延迟时间 $\tau = 50$ 时, 条件熵指数函数 $10^{(k-m)}$ 对嵌入维数的关系图, 图中一个明显的转折处出现在 $m = 3$ 处, 因此可得嵌入维数 $m = 3$, 这与方程(15)相符合. 图 2(c) 是吸引子在 xy 平面上的投影图, 图 2(d) 是延迟时间 $\tau = 50$ 时变量 x 的重构吸引子.

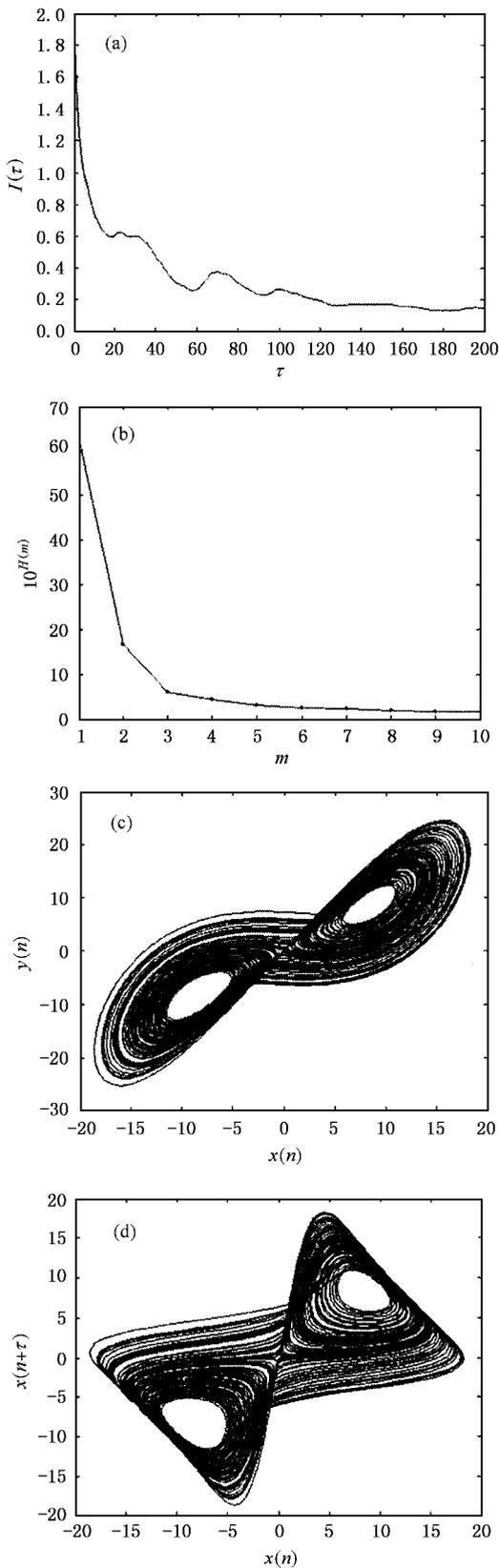


图1 参数 $\sigma=10.0$, $b=8/3$, $r=28.0$ 的 Lorenz 系统 (a) 互信息函数 $I(\tau)$ 对延迟时间 τ 的关系图 (b) 条件熵指数函数 $10^{H(m)}$ 对嵌入维数 m 关系图 (c) 吸引子在 xy 平面投影图 (d) 重构吸引子

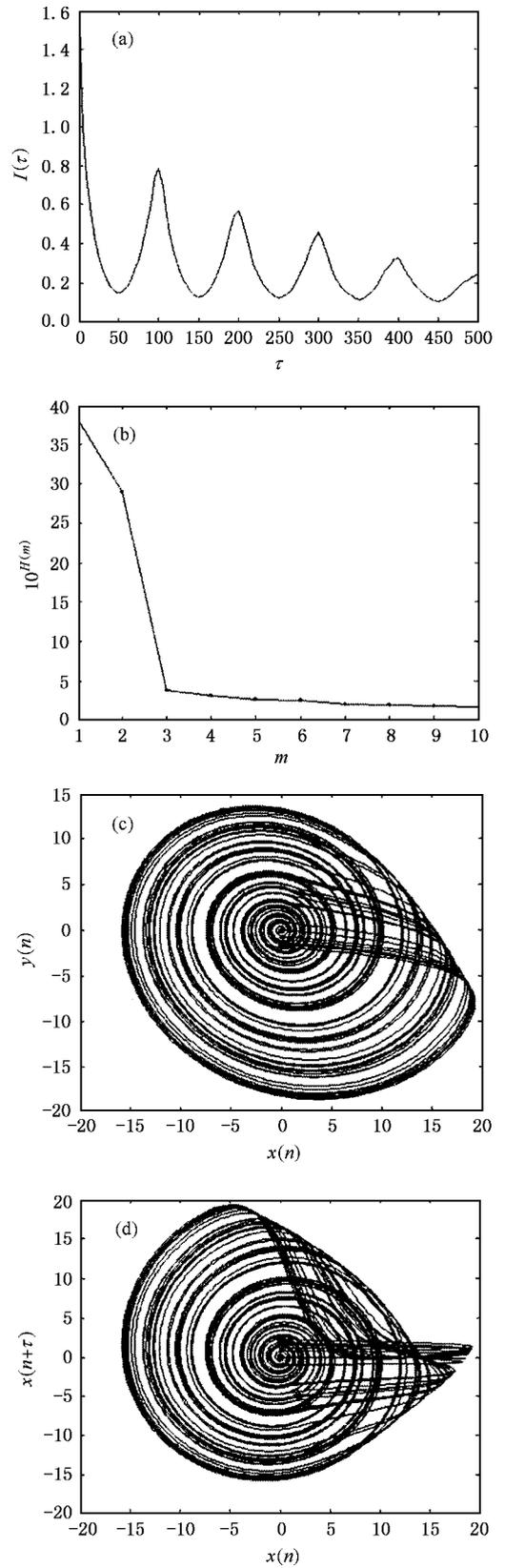


图2 参数 $a=0.2$, $b=0.2$, $c=10.0$ 的 Rössler 系统 (a) 互信息函数 $I(\tau)$ 对延迟时间 τ 的关系图 (b) 条件熵指数函数 $10^{H(m)}$ 对嵌入维数 m 关系图 (c) 吸引子在 xy 平面投影图 (d) 重构吸引子

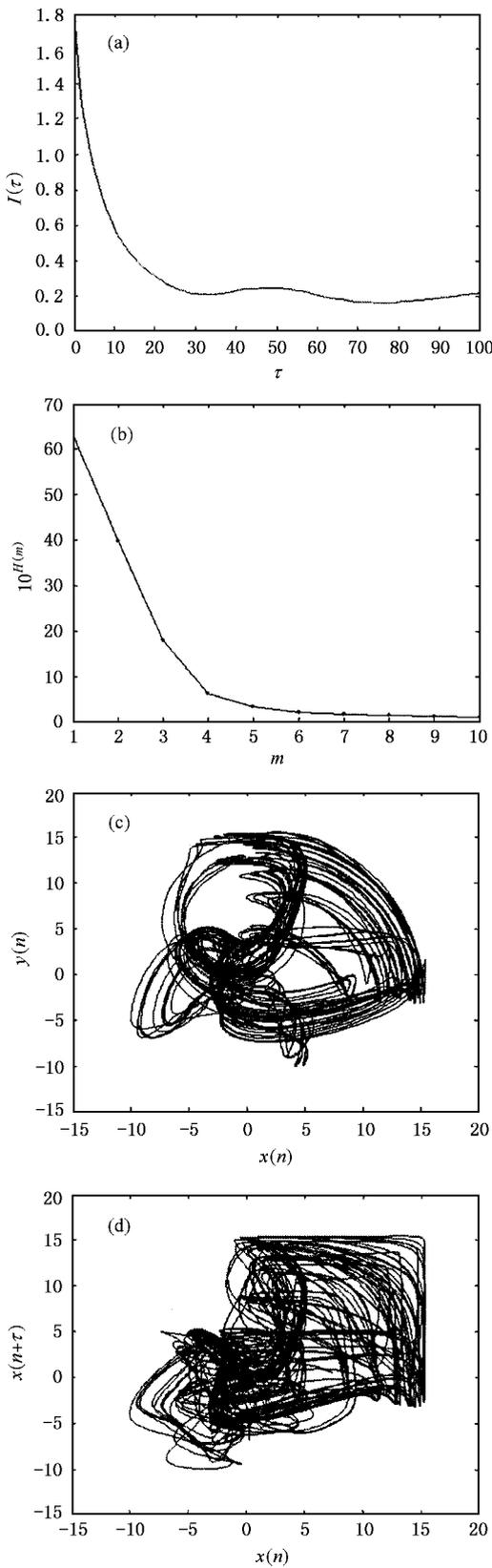


图 3 4 维 Lorenz 型动力学系统 (16) 其中参数 $F = 15$ 。(a) 互信息函数 $I(\tau)$ 对延迟时间 τ 的关系图 (b) 条件熵指数函数 $10^{H(m)}$ 对嵌入维数 m 关系图 (c) 吸引子在 xy 平面投影图 (d) 重构吸引子

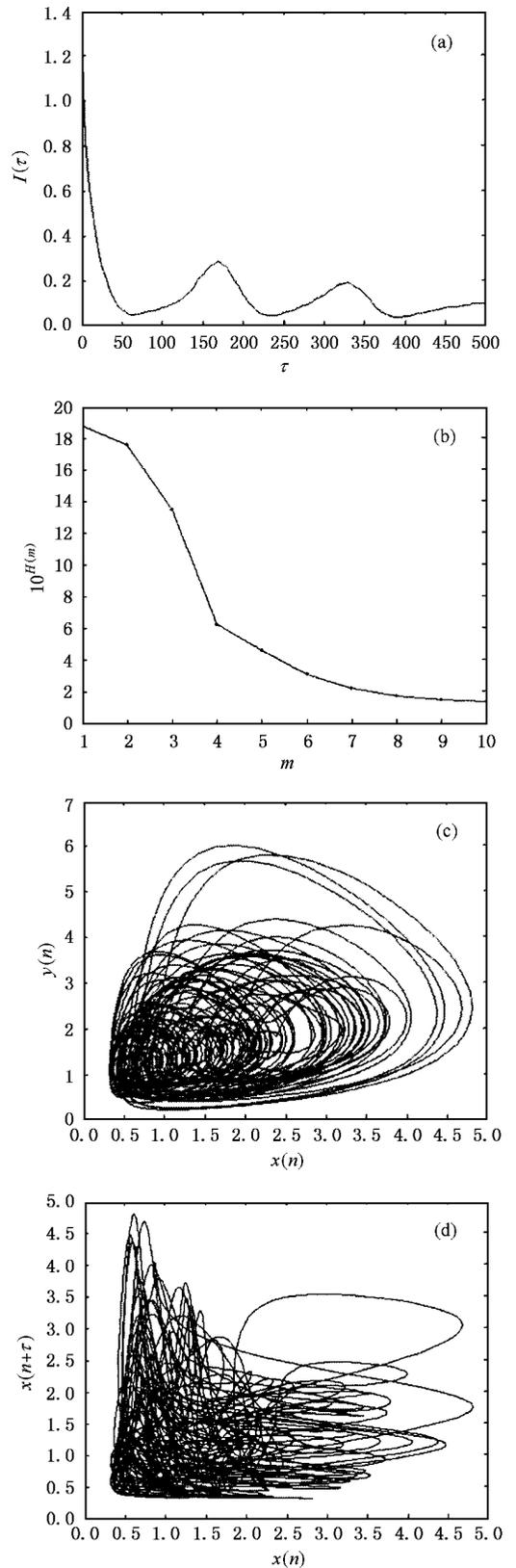


图 4 5 维 Rössler 型动力学系统 (17) 其中 $a = 0.3, b = 10, d = 2.4, \varepsilon = 0.01$ 。(a) 互信息函数 $I(\tau)$ 对延迟时间 τ 的关系图 (b) 条件熵指数函数 $10^{H(m)}$ 对嵌入维数 m 关系图 (c) 吸引子在 xy 平面投影图 (d) 重构吸引子

再考虑 4 维 Lorenz 型动力系统^[24]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -zw + wy - x + F, \\ \dot{y} &= -wx + xz - y + F, \\ \dot{z} &= -xy + yw - z + F, \\ \dot{w} &= -yz + zx - w + F.\end{aligned}\quad (16)$$

取 $F = 15$, 用 Runge-Kutta 方法求解方程 (16), 步长 $h = 0.01$, 去除暂态过程, 得变量 x 的一个 50000 个点数值解. 图 3(a) 是互信息函数对延迟时间的关系图, 可得延迟时间 $\tau = 33$. 图 3(b) 是取延迟时间 $\tau = 33$ 时, 条件熵指数函数 $10^{(K_m)}$ 对嵌入维数的关系图, 图中一个明显的转折处出现在 $m = 4$ 处, 因此可得嵌入维数 $m = 4$, 这与方程 (16) 相符合. 图 3(c) 是吸引子在 xy 平面上的投影图, (d) 是延迟时间 $\tau = 33$ 时变量 x 的重构吸引子.

最后考虑表现出超混沌行为的 5 维 Rössler 型动力系统^[28]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - xy + ax^2, \\ \dot{y} &= xy - yz, \\ \dot{z} &= yz - zw, \\ \dot{w} &= zw - w - buw, \\ \dot{u} &= \varepsilon + bu(w - d).\end{aligned}\quad (17)$$

取 $a = 0.3$, $b = 10$, $d = 2.4$, $\varepsilon = 0.01$, 用 Runge-

Kutta 方法求解方程 (17), 步长 $h = \pi/100$, 去除暂态过程, 产生变量 x 的一个 50000 个点数值解. 图 4(a) 是互信息函数对延迟时间的关系图, 可得延迟时间 $\tau = 60$. 图 4(b) 是取延迟时间 $\tau = 60$ 时, 条件熵指数函数 $10^{(K_m)}$ 对嵌入维数的关系图, 图中一个明显的转折处出现在 $m = 4$ 处, 但条件熵从 $m = 7$ 处开始趋于平稳, 因此可取嵌入维数 $m = 7$, 这与方程 (17) 基本相符. 图 4(c) 是吸引子在 xy 平面上的投影图, (d) 是延迟时间 $\tau = 60$ 时变量 x 的重构吸引子.

5. 结 论

本文根据信息论基本原理, 研究了混沌时序相空间重构参数延迟时间和嵌入维数的选取问题. 用互信息函数的第一个局部极小值确定延迟时间是一种应用最为广泛的确定延迟时间的方法, 本文提出了用符号分析的方法计算互信息函数, 确定延迟时间, 这一方法能较精确地计算出互信息函数, 确定出一个合适的延迟时间. 在此基础上, 提出了一种用重构向量条件熵确定嵌入维数的信息论方法, 通过对 Lorenz 动力系统、4 维 Lorenz 型动力系统、Rössler 动力系统和 5 维 Rössler 型动力系统的数值计算, 结果表明, 该方法能够确定出合适的相空间重构嵌入维数.

- [1] Abarbanel H D I et al 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 1331
- [2] Tsonis A A 1992 *Chaos: from theory to application* (New York: Plenum Press)
- [3] Kantz H and Schreiber T 1997 *Nonlinear Time Series Analysis* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [4] Zhang S et al 2003 *Chin. Phys.* **12** 594
- [5] Liu W D et al 2003 *Chin. Phys.* **12** 1366
- [6] Gan J C and Xiao X C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1096 (in Chinese) [甘建超、肖先赐 2003 物理学报 **52** 1096]
- [7] Gan J C and Xiao X C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1102 (in Chinese) [甘建超、肖先赐 2003 物理学报 **52** 1102]
- [8] Xie Y et al 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 205 (in Chinese) [谢勇等 2002 物理学报 **51** 205]
- [9] Yang S Q and Jia C Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2452 (in Chinese) [杨绍清、贾传炎 2002 物理学报 **51** 2452]
- [10] Wang A L and Yang C X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2719 (in Chinese) [王安良、杨春信 2002 物理学报 **51** 2719]
- [11] Wei B L et al 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2205 (in Chinese) [韦伟林等 2002 物理学报 **51** 2205]
- [12] Wang F P, Wang Z J and Guo J B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 474 [汪芙平、王赞基、郭静波 2002 物理学报 **51** 474]
- [13] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 403 (in Chinese) [张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 403]
- [14] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2333 (in Chinese) [张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 2333]
- [15] Yang S Q, Zhang X H and Zhao C A 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 636 (in Chinese) [杨绍清、章新华、赵长安 2000 物理学报 **49** 636]
- [16] Tian Y C 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 44 (in Chinese) [田玉楚 1997 物理学报 **46** 44]
- [17] Yuan J and Xiao X C 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1290 (in Chinese) [袁坚、肖先赐 1997 物理学报 **46** 1290]
- [18] Takens F 1981 *Springer lecture notes in mathematics*, Vol 898 (Berlin: Springer) 366
- [19] Fraser A M and Swinney H L 1986 *Phys. Rev. A* **33** 1134
- [20] Yang Z A, Wang G R and Chen S G 1995 *Chinese Journal of Computational Physics* **12** 442 (in Chinese) [杨志安、王光瑞、陈式刚 1995 计算物理 **12** 442]
- [21] Nichols J M and Nichols J D 2001 *Mathematical Biosciences* **171** 21
- [22] Rechester A B and White R B 1991 *Phys. Lett. A* **156** 419
- [23] Rechester A B and White R B 1991 *Phys. Lett. A* **158** 51
- [24] Lehrman M and Rechester A B 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 54
- [25] Liu Z H and Chen S G 1997 *Phys. Rev. E* **56** 7297

- [26] Azad R K , Rao J S and Ramaswamy R 2002 *Chaos , Solitons and Fractals* **14** 633 (in Chinese) [肖方红、阎桂荣、韩宇航 2004 物理学报 **53** 2877]
- [27] Xiao F H , Yan G R and Han Y H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2877 [28] Baier G and Sahle S 1995 *Phys. Rev. E* **51** R2712

Information theory approach to determine embedding parameters for phase space reconstruction of chaotic time series^{*}

Xiao Fang-Hong¹⁾ Yan Gui-Rong¹⁾ Han Yu-Hang²⁾

¹⁾(School of Civil Engineering and Mechanics , Xi 'an Jiaotong University , Xi 'an 710049 , China)

²⁾(China Academy of Engineering Physics , Mianyang 610003 , China)

(Received 17 May 2004)

Abstract

We have studied the determination of delay time and embedding dimension for phase space reconstruction of chaotic time series using the information theory. We use the symbolic analysis method to compute mutual information for determining the delay time. Furthermore we also present an information theory approach to determine embedding dimension. That is , we determine the embedding dimension by considering the variation of the conditional entropy of the reconstructed vector with its dimension. Numerical simulations verify that the method is applicable for determining an appropriate embedding dimension.

Keywords : chaos , phase space reconstruction , mutual information , conditional entropy , symbolic analysis

PACC : 0545 , 0250

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No 10276032) and the Science Foundation of China Academy of Engineering Physics NSAF .