

# 弱电离子体对电磁波吸收的物理模型和数值求解

宋法伦 曹金祥<sup>†</sup> 王 舸

(中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230027)  
(2003 年 10 月 30 日收到, 2004 年 2 月 16 日收到修改稿)

从物理基本方程、理论证明和数值分析三方面说明了在一维平板模型中, 含时波动方程和亥姆霍兹方程是等价的, 即使电磁波波长小于等离子体的尺度, 电磁波的全波解也具有简谐形式. 对电磁波在弱电离子体中的传播特性进行了数值研究, 结果表明, 弱电离子体对电磁波具有很强的吸收特性.

关键词: 电磁波, 弱电离子体, 过阻尼

PACC: 5240D, 5225, 5235H, 5265

## 1. 引言

上世纪五六十年代, 人们对电磁波在电离层等离子体中的传播特性进行了细致研究<sup>[1]</sup>. 近年来, 理论<sup>[2]</sup>和实验<sup>[3]</sup>证明等离子体对电磁波在宽频范围内有很强的吸收特性, 具有广泛的应用前景. 作为一种有效的电磁波反射和吸收器, 等离子体对电磁波的吸收和反射特性又重新引起了人们的普遍关注<sup>[4-7]</sup>. 通常, 对电磁波在等离子体中的传播特性的理论研究有三种方法: 几何光学近似<sup>[8-10]</sup>, 波恩近似<sup>[11, 12]</sup>以及全波解<sup>[13, 14]</sup>. 本文给出了一维平板形弱电离子体对电磁波吸收的物理模型, 从物理基本方程、理论证明和数值求解三方面进行了分析, 并对电磁波在弱电离子体中的传播特性进行了数值研究.

## 2. 物理模型

本文所研究的电磁波强度都是很弱的, 不至于在等离子体中引发非线性效应. 在线性模型中, 一般认为弱电离子体对电磁波吸收的机理就是碰撞吸收和共振吸收. 本文只讨论碰撞吸收. 弱电离子体对电磁波的经典碰撞吸收机理为电子在入射电磁波电场的驱动下会高速振荡, 电子的振动动能通过电子-中性粒子的不断碰撞转变成电子和中

性粒子的热能, 从而不可逆地吸收了入射电磁波的能量. 在此过程中, 等离子体对电磁波的吸收分为两个物理过程: 1) 电磁波能量通过耦合转变成电子的振动动能; 2) 电子的振动动能通过碰撞, 发生热耗散. 对于弱电离子体, 在  $\nu/\omega \gg 1$  的条件下, 物理过程 1) 和物理过程 2) 相互制约, 即使在介质的厚度与电磁波的波长可比较的范围内, 电磁波波形随时间和空间的变化仍然具有简谐形状, 并不会因为加强碰撞, 增加热耗散, 波就会发生过阻尼. 若波发生过阻尼, 电子的振动也要发生过阻尼. 基于此种物理模型, 我们认为波的过阻尼现象在弱电离子体中是不会发生的.

### 2.1. 基本方程

简单的物理分析认为离子不动, 由电子的运动方程出发

$$\frac{dv_e}{dt} + \nu v_e = \frac{eE}{m_e} \quad (e < 0), \quad (1)$$

过阻尼波的电场为

$$E = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} \quad (\alpha, \beta > 0), \quad (2)$$

其中  $v_e$  为电子的运动速度,  $\nu$  为电子中性粒子等离子体的碰撞频率,  $e, m_e$  分别为电子的电量和质量.  $A, B$  为待定常量系数,  $\alpha, \beta$  为阻尼系数. 假定初始条件  $t=0$ , 电磁波刚刚入射到电子上, 电子速度为  $v_e=0$ , 由方程 (1)(2) 可以得到

$$v_e = \frac{eA}{(\nu - \alpha)m_e} (e^{-\alpha t} - e^{-\nu t})$$

<sup>†</sup>E-mail: jxcao@ustc.edu.cn

$$+ \frac{eB}{(\nu - \beta)m_e} (e^{-\beta t} - e^{-\nu t}), \quad (3)$$

当  $\nu \gg \omega, \alpha, \beta$  时 (3) 式可以近似简化为

$$v_e = \frac{e}{\nu m_e} (Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}). \quad (4)$$

可以看出电子的阻尼和波的阻尼具有相同的衰减因子, 如果波发生过阻尼, 电子的振动也要发生过阻尼, 此时电子没有很好耦合电磁波的能量就发生了过阻尼. 也就是说, 由于电子的运动发生了过阻尼, 电磁波被吸收的能量减小, 从而使得波的过阻尼现象在经典碰撞机理下不会发生.

## 2.2. 理论证明

严格的理论证明必须运用 Maxwell 方程组和电子运动方程, 电磁波的波动方程为

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

对于冷等离子体, 电子流体运动方程为

$$\frac{\partial j}{\partial t} + \nu j = \frac{e^2 n_e E}{m_e}, \quad (6)$$

其中,  $c$  为真空中的光速,  $n_e$  为电子密度. 对 (6) 式求解后代入 (5) 式得到一维含时全波波动方程

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\omega_{pe}^2 E}{c^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{c^2} \int_0^t E(s) e^{-(s-t)} ds = 0, \quad (7)$$

$\omega_p$  为等离子体频率,  $\omega_p = \left( \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e} \right)^{1/2}$ . 对方程 (7)

进行归一化, 得到

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{t}^2} - \bar{\omega}_{pe}^2 \bar{E} + \bar{\omega}_{pe}^2 \bar{\nu} \int_0^{\bar{t}} \bar{E}(\bar{s}) e^{\bar{\nu}(\bar{s}-\bar{t})} d\bar{s} = 0, \quad (8)$$

这里,  $x = L\bar{x}$ ,  $t = \frac{L}{c}\bar{t}$ ,  $\omega_{pe} = \frac{c}{L}\bar{\omega}_{pe}$ ,  $\nu = \frac{c}{L}\bar{\nu}$ ,  $E = E_0 \bar{E}$ .

下面证明这样的数学命题:

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{t}^2} - \bar{\omega}_{pe}^2 \bar{E} + \bar{\omega}_{pe}^2 \bar{\nu} \int_0^{\bar{t}} \bar{E}(\bar{s}) e^{\bar{\nu}(\bar{s}-\bar{t})} d\bar{s} = 0,$$

当  $\bar{t} \geq T_0$ ,  $\bar{x} \geq X_0$  时, 不存在形如  $A(\bar{x})e^{-\alpha \bar{t}} + B(\bar{x})e^{-\beta \bar{t}}$  ( $\alpha, \beta > 0$ ) 的解.

证明 由于  $0 \leq \bar{t} < T_0$ , 电磁波尚没有到达  $\bar{x} \geq X_0$ ,  $E(\bar{x} \geq X_0, 0 \leq \bar{t} < T_0) = 0$ .

所以

$$\int_0^{\bar{t}} \bar{E}(\bar{s}) e^{\bar{\nu}(\bar{s}-\bar{t})} d\bar{s} = \int_{T_0}^{\bar{t}} \bar{E}(\bar{s}) e^{\bar{\nu}(\bar{s}-\bar{t})} d\bar{s},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{t}^2} - \bar{\omega}_{pe}^2 \bar{E} + \bar{\omega}_{pe}^2 \bar{\nu} \int_{T_0}^{\bar{t}} \bar{E}(\bar{s}) e^{\bar{\nu}(\bar{s}-\bar{t})} d\bar{s} = 0. \quad (9)$$

将  $\bar{E}(\bar{x}, \bar{t}) = A(\bar{x})e^{-\alpha \bar{t}} + B(\bar{x})e^{-\beta \bar{t}}$  代入上式中, 得到

$$1) \alpha \neq \beta \neq \bar{\nu}, \text{ 则对于 } \forall \bar{t}, \frac{\partial^2 A(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} - \left( \alpha^2 + \bar{\omega}_{pe}^2 - \frac{\nu \bar{\omega}_{pe}^2}{\bar{\nu} - \alpha} \right) A(\bar{x}) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 B(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} - \left( \beta^2 + \bar{\omega}_{pe}^2 - \frac{\nu \bar{\omega}_{pe}^2}{\bar{\nu} - \beta} \right) B(\bar{x}) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{e^{-\alpha T_0}}{\bar{\nu} - \alpha} A(\bar{x}) + \frac{e^{-\beta T_0}}{\bar{\nu} - \beta} B(\bar{x}) = 0. \quad (12)$$

由 (12) 式得  $A(\bar{x}) = -\frac{\bar{\nu} - \alpha}{\bar{\nu} - \beta} e^{(\alpha - \beta)T_0} B(\bar{x})$ , 再代入

(11) 式得到

$$\frac{\partial^2 A(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} - \left( \beta^2 + \bar{\omega}_{pe}^2 - \frac{\nu \bar{\omega}_{pe}^2}{\bar{\nu} - \beta} \right) A(\bar{x}) = 0. \quad (13)$$

将 (13) 和 (10) 式对比, 得  $\alpha = \beta$ . 所以  $A(\bar{x}) = -B(\bar{x})$ ,  $\bar{E}(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ .

$$2) \alpha \neq \beta = \bar{\nu}, \text{ 则对于 } \forall \bar{t}, \frac{\partial^2 A(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} - \left( \alpha^2 + \bar{\omega}_{pe}^2 - \frac{\nu \bar{\omega}_{pe}^2}{\bar{\nu} - \alpha} \right) A(\bar{x}) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 B(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} - \left( \beta^2 + \bar{\omega}_{pe}^2 \right) B(\bar{x}) - \frac{\nu \bar{\omega}_{pe}^2}{\bar{\nu} - \alpha} \times e^{(\bar{\nu} - \alpha)T_0} A(\bar{x}) + \bar{\nu} \bar{\omega}_{pe}^2 B(\bar{x}) \chi(\bar{t} - T_0) = 0 \quad (15)$$

可得  $A(\bar{x}) = B(\bar{x}) = 0$ , 所以  $\bar{E}(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ .

$$3) \alpha = \beta = \bar{\nu}, \text{ 则对于 } \forall \bar{t}, \frac{\partial^2 (A(\bar{x}) + B(\bar{x}))}{\partial \bar{x}^2} - (\alpha^2 + \bar{\omega}_{pe}^2) (A(\bar{x}) + B(\bar{x})) + \bar{\nu} \bar{\omega}_{pe}^2 (\bar{t} - T_0) (A(\bar{x}) + B(\bar{x})) = 0, \quad (16)$$

可得  $A(\bar{x}) + B(\bar{x}) = 0$ , 所以  $\bar{E}(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ .

证毕.

## 3. 数值分析

将 (5) (6) 式归一化, 然后再将两式分别离散化可得

$$\bar{E}_i^{n+1} = \left( \frac{\Delta \bar{t}}{\Delta \bar{x}} \right)^2 (\bar{E}_{i+1}^n - 2\bar{E}_i^n + \bar{E}_{i-1}^n) + 2\bar{E}_i^n - \bar{E}_i^{n-1} - \Delta \bar{t} (\bar{j}_i^{n+1} - \bar{j}_i^n), \quad (17)$$

$$\bar{j}_i^{n+1} = \bar{\omega}_{pe}^2 \Delta \bar{t} \bar{E}_i^n + (1 - \bar{\nu} \Delta \bar{t}) \bar{j}_i^n \quad (18)$$

初始条件  $\bar{E}_1^n = e^{-j(\bar{\omega} \bar{r} + \frac{\pi}{2})}$ ,  $\bar{E}_i^1 = \bar{E}_i^2 = \alpha (i \neq 1)$ ,  $\bar{j}_1^n = 0$ ,  $\bar{j}_i^1 = \bar{j}_i^2 = \alpha (i \neq 1)$ . 拉长入射距离,使得反射波还没有到达入射点,取时间步长等于 0.2 倍的空间步长. 本文均取计算时间终止时刻的空间电场分布.

对时间取傅里叶变换后的归一化亥姆霍兹方程为

$$\frac{d^2}{dx^2} \bar{E}(\bar{x}) + \bar{k}^2 \bar{E}(\bar{x}) = 0, \quad (19)$$

其中

$$\bar{k} = \bar{\omega} \left( 1 - \frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}(\bar{\omega} + j\bar{\nu})} \right)^{1/2}. \quad (20)$$

将含时波动方程的数值解和对时间取傅里叶变换后得到的亥姆霍兹方程的数值解相比较,取两种典型的等离子体密度分布剖面,均匀分布和抛物线分布,如图 1,2 所示. 图中设定参数为  $\nu = 300\text{GHz}$ ,  $f = 1\text{GHz}$  和  $f = 10\text{GHz}$ ,满足  $\nu/\omega \gg 1$ ,等离子体厚度为  $10\text{cm}$  ( $0.6 \leq x \leq 0.7$ ). 由图可以看出,含时波动方程的电场解和亥姆霍兹方程的电场解完全符合. 这说明在  $\nu/\omega \gg 1$  的条件下,电磁波在等离子体介质中传播,其波形随时间或空间的变化仍具有简谐形式,在经典碰撞机理下,电磁波在等离子体中不会发生过阻尼现象.

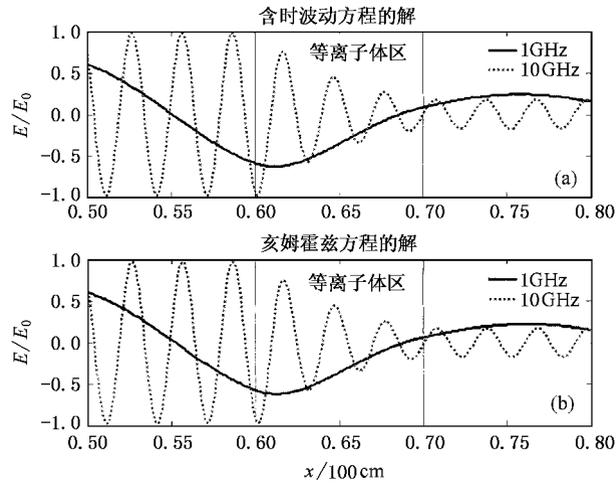


图 1 含时波动方程的数值解和亥姆霍兹方程数值解的比较,等离子体取均匀分布  $n_e = 1 \times 10^{12} \text{cm}^{-3}$  ( $0.6 \leq x \leq 0.7$ ),  $f = 1, 10\text{GHz}$ ,  $\nu = 300\text{GHz}$

图 3 给出了在计算时间终止时刻,对于不同碰撞频率的等离子体,电磁波电场在自由空间和等离

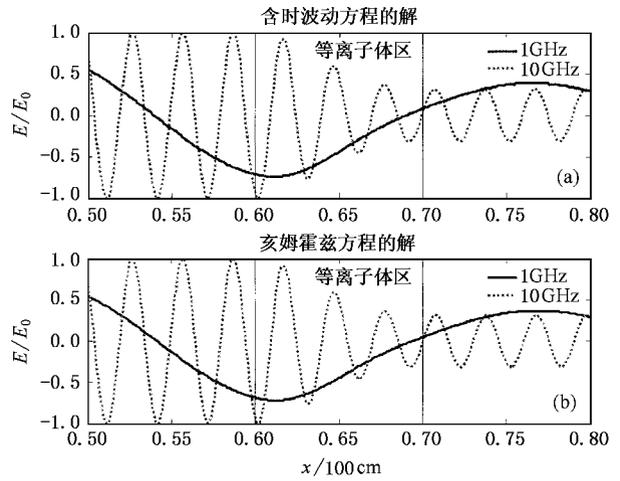


图 2 含时波动方程的数值解和亥姆霍兹方程数值解的比较,等离子体取抛物线分布  $n_e = 1 \times 10^{12} \times \left( 1 - \left( \frac{x-0.65}{0.05} \right)^2 \right) \text{cm}^{-3}$ , ( $0.6 \leq x \leq 0.7$ ),  $f = 1, 10\text{GHz}$ ,  $\nu = 300\text{GHz}$

子体中的分布状态. 图中设定入射电磁波频率  $f = 10\text{GHz}$ ,碰撞频率  $\nu$  为  $10\text{GHz}, 50\text{GHz}, 100\text{GHz}$  和  $300\text{GHz}$ ,密度轮廓为抛物线分布. 可以看出,电磁波电场在等离子体中的衰减随着碰撞频率的增加先增大后减小,可以判断,存在一个最佳碰撞频率使衰减最大. 在上述条件下,最佳碰撞频率在  $40\text{GHz}$  左右,而在  $30-80\text{GHz}$  范围内,衰减率近似相同. 进一步的数值计算表明,选取合适的  $\nu$ ,电场的衰减会很大,这说明强碰撞等离子体对电磁波具有很强的吸收特性.

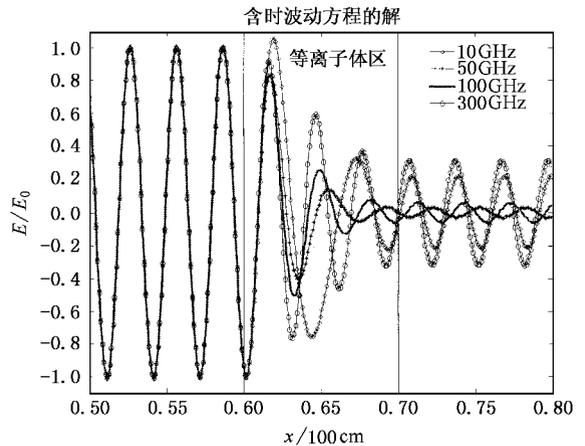


图 3 电磁波电场在自由空间和等离子体中的分布状态,等离子体取抛物线分布  $n_e = 1 \times 10^{12} \times \left( 1 - \left( \frac{x-0.65}{0.05} \right)^2 \right) \text{cm}^{-3}$  ( $0.6 \leq x \leq 0.7$ ),碰撞频率分别为  $10\text{GHz}, 50\text{GHz}, 100\text{GHz}$  和  $300\text{GHz}$ ,  $f = 10\text{GHz}$

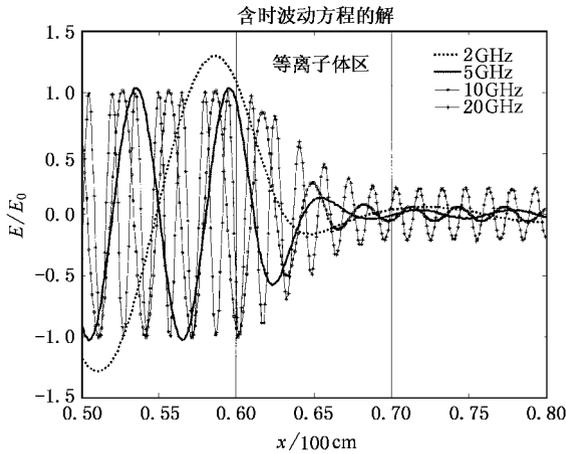


图 4 电磁波电场在自由空间和等离子体中的分布状态, 等离子体取抛物线分布  $n_e = 1 \times 10^{12} \times \left( 1 - \left( \frac{x-0.65}{0.05} \right)^2 \right) \text{ cm}^{-3}$  ( $0.6 \leq x \leq 0.7$ ) 电磁波频率分布为 2GHz, 5GHz, 10GHz 和 20GHz,  $\nu = 100\text{GHz}$

图 4 给出了在计算时间终止时刻, 对于不同的入射波频率, 电磁波电场在自由空间和等离子体中的分布状态. 设定碰撞频率  $\nu$  为 100GHz, 入射电磁波频率分别为 2GHz, 5GHz, 10GHz 和 20GHz, 密度轮廓为抛物线分布. 可以看出, 电磁波频率很低时, 即电磁波频率小于中心等离子体频率时(本文中等离子体中心频率约为 5.6GHz)电磁波反射量很大, 入射波电场和反射场叠加, 从而使得总电场幅值大于 1, 而传入等离子体的小部分电场很快被衰减. 随着电磁波频率的增加, 电磁波的反射率减小, 而相对被等离子体吸收率增加, 当电磁波频率远大于等离子体频率时, 电磁波的透射率增加, 吸收率减小. 可以判断, 在给定的条件下, 存在一个位于等离子体中心频率附近的电磁波频率, 此时等离子体对电磁波的衰减最佳. 在上述条件下, 数值计算表明, 电磁波频率在 5—8GHz 时, 电磁波存在近似相同的衰减, 这说明等离子体对电磁波存在宽频带吸收.

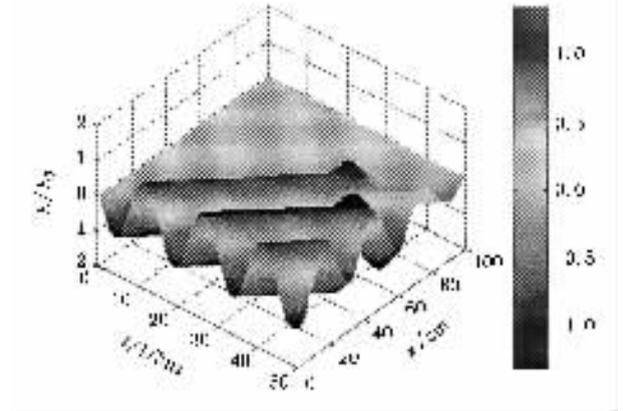


图 5 电磁波电场时空分布图, 等离子体取抛物线分布  $n_e = 1 \times 10^{12} \times \left( 1 - \left( \frac{x-0.65}{0.05} \right)^2 \right) \text{ cm}^{-3}$  ( $0.6 \leq x \leq 0.7$ ),  $f = 1\text{GHz}$ ,  $\nu = 300\text{GHz}$

图 5 为电场时空分布图, 图中电场分布突起的峰值进一步说明, 对于低频等离子体(低于等离子体中心频率), 电磁波大部分被反射. 图中设定入射电磁波频率  $f = 1\text{GHz}$ , 碰撞频率  $\nu = 300\text{GHz}$ , 等离子体密度轮廓为抛物线分布.

### 4. 结 论

本文给出了弱电离强碰撞等离子体对电磁波吸收的基本物理模型, 并且从物理基本方程、理论证明和数值分析三方面说明了在本文研究的一维平板模型中, 含时波动方程和亥姆霍兹方程是等价的. 即使在电磁波波长与等离子体空间尺度可以比较范围内, 电磁波随时间和空间仍具有简谐形式. 数值计算表明, 弱电离强碰撞等离子体对电磁波具有很强的吸收特性, 在给定的条件下, 选择适当的等离子体碰撞频率和入射电磁波频率, 可以使电磁波在等离子体中存在最佳的衰减. 这对以后的实验研究具有很好的参考价值.

[1] Ginzburg V L 1978 *The propagation of electromagnetic waves in plasma* (Beijing: Science Press) [in Chinese] [金兹堡 1978 电磁波在等离子体中的传播(北京: 科学出版社)]  
 [2] Vidmar R J 1990 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **18** 733  
 [3] Stalder N R et al 1992 *J. Appl. Phys.* **72** 5089  
 [4] Liu M H et al 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1317 (in Chinese) [刘明海等 2002 物理学报 **51** 1317]

[5] Santoru J et al 1990 *Phys. Soc.* **35** 2067  
 [6] Lontano M et al 1992 *J. Plasma Phys.* **48** 209  
 [7] Destler W W et al 1991 *J. Appl. Phys.* **69** 6313  
 [8] Wang G et al 2001 *Nuclear Fusion and Plasma Physics* **21** 160 (in Chinese) [王 舸等 2001 核聚变与等离子体物理 **21** 160]  
 [9] Song F L et al 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1110 (in Chinese) [宋法伦等 2004 物理学报 **53** 1110]

- [ 10 ] Laroussi M 1993 *IEEE Trans . Plasma Sci .* **21** 366
- [ 11 ] Hochstim A R 1969 *Electric Conductivity and Electromagnetic Wave Propagation Through Plasma* ( Polytechnic Press )
- [ 12 ] Wang G *et al* 2003 *Chin . Phys . Lett .* **20** 1785
- [ 13 ] William L K 1988 *The Physics of Laser Plasma Interaction* ( Addison-Wesley Publishing Company )
- [ 14 ] Hutchinson I H 1992 *Plasma Physics and Controlled Fusion* **34** 1225

## A model of the absorption of electromagnetic waves by weakly ionized plasma and the numerical calculation

Song Fa-Lun   Cao Jin-Xiang<sup>†</sup>   Wang Ge

( *Department of Modern Physics , University of Science and Technology of China , Hefei 230027 ,China* )

( Received 30 October 2003 ; revised manuscript received 16 February 2004 )

### Abstract

It is shown in three different ways that the wave equation varying with time and the Helmholtz equation are equally effective for analysing the transmission of electromagnetic waves from the weakly ionized plasma in the plane geometry. Even when the scale length of plasma approaches the waves length , the electromagnetic waves are still simple harmonic waves. The properties of transmission of electromagnetic waves from the weakly ionized and highly collisional plasma are studied numerically. The results show that the highly collisional plasma is a good microwave absorber.

**Keywords** : electromagnetic waves , weakly ionized plasma , overdamping

**PACC** : 5240D , 5225 , 5235H , 5265

---

<sup>†</sup>E-mail : jxcao@ustc.edu.cn