第 54 卷 第 3 期 2005 年 3 月
1000-3290/2005/54(03)/1009-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.3, March, 2005

事件空间中完整系统的 Hojman 守恒量*

许学军[1)2)†] 梅凤翔[1)] 秦茂昌[1)]

[1)] (北京理工大学理学院，北京 100081)

[2)] (浙江师范大学物理系，金华 321004)

(2004 年 5 月 11 日收到；2004 年 8 月 4 日收到修改稿)

研究事件空间中完整力学系统由特殊 Lie 对称性、Noether 对称性和形式不变性导致的 Hojman 守恒量. 列出系统的运动微分方程. 给出 Lie 对称性、Noether 对称性和形式不变性的判据，以及三种对称性之间的关系. 将 Hojman 定理推广并应用于事件空间完整系统，得到非 Noether 守恒量. 举例说明结果的应用.

关键词：分析力学，完整系统，事件空间，对称性，Hojman 守恒量

PACC：0320

1. 引　　言

对称性与守恒量的研究具有重要理论和实际意义[1—20]. 对事件空间完整力学系统，由 Noether 对称性利用 Noether 定理，可求得 Noether 守恒量，由 Lie 对称性通过 Noether 对称性，可找到 Noether 守恒量[21]，由形式不变性通过 Noether 对称性，也可找到 Noether 守恒量[22]. 1992 年，Hojman 利用特殊的 Lie 对称性在位形空间中找到一类新的守恒量[23]. Zhang 将 Hojman 方法推广至广义经典力学系统[24]. Luo 等人给出了非完整力学系统的 Hojman 守恒量[25]. 本文在事件空间中研究完整力学系统由特殊的 Lie 对称性、Noether 对称性和形式不变性导致的 Hojman 守恒量.

2. 事件空间中完整系统的运动微分方程

事件空间中完整系统的运动微分方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}-\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}=P_\alpha \qquad (\alpha=1,2,\cdots,n+1), \tag{1}$$

式中 $x_1=t$，$x_{s+1}=q_s\ (s=1,2,\cdots,n)$，$x'_\alpha=\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}$，而 $\Lambda=\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)$ 为事件空间中的 Lagrange 函数，它与位形空间中的 Lagrange 函数 L 有关系

$$\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)=x'_1 L\left(x_\alpha,\frac{x'_2}{x'_1},\cdots,\frac{x'_{n+1}}{x'_1}\right), \tag{2}$$

P_α 为事件空间中的非势广义力，它与位形空间中的非势广义力 Q_s 有关系

$$P_1=-Q_s x'_{s+1},$$
$$P_{s+1}=x'_1 Q_s\left(x_\alpha,\frac{x'_2}{x'_1},\cdots,\frac{x'_{n+1}}{x'_1}\right)$$
$$(s=1,2,\cdots,n), \tag{3}$$

式中采用 Einstein 求和约定，全文下同. 注意到，(1)式的 $(n+1)$ 条方程不是彼此独立. 假设可由(1)式解出后面 n 个 x''_{s+1}，记作

$$x''_{s+1}=h_{s+1}(x_\alpha,x'_\alpha,x''_1) \qquad (s=1,2,\cdots,n). \tag{4}$$

3. 系统的 Lie 对称性、Noether 对称性和形式不变性

取特殊的、群的无限小变换

$$\tau^*=\tau,\quad x_1^*=x_1,$$
$$x^*_{s+1}=x_{s+1}+\varepsilon\xi_{s+1}(x_\alpha,x'_\alpha) \qquad (s=1,2,\cdots,n), \tag{5}$$

式中 ε 为无限小参数，ξ_{s+1} 为无限小生成元. 下面研究在变换(5)下，事件空间中完整系统 Lie 对称性、Noether 对称性和形式不变性的判据.

* 国家自然科学基金(批准号：10272021)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号：20040007022)资助的课题.

† E-mail：xxj@bit.edu.cn

3.1. Lie 对称性的判据

(1)式在变换(5)下的 Lie 对称性的确定方程为

$$X^{(2)}[E_\alpha(\Lambda)] = X^{(1)}(P_\alpha) \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,n+1), \tag{6}$$

式中

$$E_\alpha = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,n+1),$$

$$X^{(1)} = \xi_{s+1}\frac{\partial}{\partial x_{s+1}} + \frac{d\xi_{s+1}}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}},$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \frac{d^2\xi_{s+1}}{d\tau^2}\frac{\partial}{\partial x''_{s+1}}. \tag{7}$$

由于(6)式的$(n+1)$个方程不是彼此独立,有如下关系:

$$\{X^{(2)}[E_\alpha(\Lambda)] - X^{(1)}(P_\alpha)\}x'_\alpha = 0, \tag{8}$$

因此,可取(6)式的后 n 个方程

$$X^{(2)}[E_{s+1}(\Lambda)] = X^{(1)}(P_{s+1}) \qquad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

作为 Lie 对称性的确定方程,即判据.

设

$$\frac{\bar{d}}{d\tau} = x'_{s+1}\frac{\partial}{\partial x_{s+1}} + h_{s+1}\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}, \tag{10}$$

注意到,在计算(9)式时,最后需将(4)式代入,其结果与将算子 $X^{(1)}$ 与 $X^{(2)}$ 中的$\frac{d}{d\tau}$换成$\frac{\bar{d}}{d\tau}$的结果一样.这样,(4)式在变换(5)下的 Lie 对称性的确定方程可直接写成

$$\frac{\bar{d}}{d\tau}\frac{\bar{d}}{d\tau}\xi_{s+1} = \frac{\partial h_{s+1}}{\partial x_{k+1}}\xi_{k+1} + \frac{\partial h_{s+1}}{\partial x'_{k+1}}\frac{\bar{d}\xi_{k+1}}{d\tau} \qquad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{11}$$

它是 Lie 对称性的另一判据.

3.2. Noether 对称性的判据

(1)式在变换(5)下的 Noether 等式为

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_{s+1}}\xi_{s+1} + \frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{s+1}}\xi'_{s+1} + P_{s+1}\xi_{s+1} + G'_N = 0, \tag{12}$$

式中 $G_N = G_N(x_\alpha, x'_\alpha)$为规范函数.与(12)式相应的 Killing 方程为

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_{s+1}}\xi_{s+1} + \frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{s+1}}\frac{\partial\xi_{s+1}}{\partial x_{k+1}}x'_{k+1} + P_{s+1}\xi_{s+1} = -\frac{\partial G_N}{\partial x_{s+1}}x'_{s+1},$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{s+1}}\frac{\partial\xi_{s+1}}{\partial x'_{k+1}} = -\frac{\partial G_N}{\partial x'_{k+1}} \qquad (k = 1,2,\cdots,n). \tag{13}$$

(12)或(13)式为 Noether 对称性的判据.

3.3. 形式不变性的判据

(1)式在变换(5)下的形式不变性的判据方程为

$$E_{s+1}[X^{(1)}(\Lambda)] = X^{(1)}(P_{s+1}) \qquad (s = 1,2,\cdots,n). \tag{14}$$

4. 三种对称性之间的关系

4.1. Noether 对称性为 Lie 对称性的条件

可以证明

$$E_{s+1}[X^{(1)}(\Lambda)] - \frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{k+1}}\frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\right) + E_{s+1}(\xi_{k+1})E_{k+1}(\Lambda) + \frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\frac{d}{d\tau}E_{k+1}(\Lambda)$$
$$= X^{(2)}[E_{s+1}(\Lambda)] \qquad (s = 1,2,\cdots,n). \tag{15}$$

注意到

$$E_{s+1}(G'_N) = \frac{d^2}{d\tau^2}\frac{\partial G_N}{\partial x'_{s+1}} \qquad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{16}$$

将(16)式代入(15)式,并加减 $X^{(1)}(P_{s+1})$和 $E_{s+1}(P_{k+1}\xi_{k+1})$,再利用(1)式,简化得

$$\begin{aligned} &X^{(2)}[E_{s+1}(\Lambda) - P_{s+1}] \\ &= E_{s+1}[X^{(1)}(\Lambda) + P_{k+1}\xi_{k+1} + G'_N] \\ &\quad - \frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{k+1}}\frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x'_{s+1}} + \frac{\partial G_N}{\partial x'_{s+1}}\right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial P_{s+1}}{\partial x'_{k+1}} + \frac{\partial P_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\right)\xi'_{k+1} \\ &\quad + \left(\frac{\partial P_{k+1}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial P_{s+1}}{\partial x_{k+1}} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial P_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\right)\xi_{k+1} \\ &\quad (s = 1,2,\cdots,n), \end{aligned} \tag{17}$$

于是有如下结果.

命题 1 对事件空间中完整力学系统,在变换(5)下,如果生成元 ξ_{s+1}是 Noether 对称性的,且 ξ_{s+1}和 P_{s+1}满足

$$\left(\frac{\partial P_{k+1}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial P_{s+1}}{\partial x_{k+1}} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial P_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\right)\xi_{k+1} - \left(\frac{\partial P_{s+1}}{\partial x'_{k+1}} + \frac{\partial P_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\right)\xi'_{k+1} = 0 \qquad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{18}$$

则生成元必是 Lie 对称性的.反之,不一定.

证明 如果 ξ_{s+1}是 Noether 对称性的生成元,则(12)和(13)式成立.将(12),(13)和(18)式代入(17)

式，得

$$X^{(2)}[E_{s+1}(\Lambda)]-X^{(1)}(P_{s+1})$$
$$=X^{(2)}[E_{s+1}(\Lambda)-P_{s+1}]=0$$
$$(s=1,2,\cdots,n),$$

由(9)式知，ξ_{s+1} 也是 Lie 对称性的．证毕．

对事件空间中 Lagrange 系统，有 $P_{s+1}=0$，故(18)式自动成立．于是有

推论 对事件空间中 Lagrange 系统，Noether 对称性必是 Lie 对称性．

4.2. 形式不变性与 Lie 对称性的关系

可以证明关系

$$E_{s+1}[X^{(1)}(\Lambda)]-X^{(2)}[E_{s+1}(\Lambda)]$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_{k+1}}\right)-\frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x_{s+1}}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_{k+1}}$$
$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\xi'_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{k+1}}\right)-\frac{\partial\xi'_{k+1}}{\partial x_{s+1}}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{k+1}}$$
$$(s=1,2,\cdots,n),\tag{19}$$

于是有

命题 2 对事件空间中完整系统，在变换(5)下，形式不变性为 Lie 对称性的充分必要条件是无限小生成元 ξ_{s+1} 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_{k+1}}\right)-\frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x_{s+1}}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_{k+1}}$$
$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\xi'_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{k+1}}\right)-\frac{\partial\xi'_{k+1}}{\partial x_{s+1}}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_{k+1}}=0$$
$$(s=1,2,\cdots,n).\tag{20}$$

证明 如果形式不变性是 Lie 对称性的，则有

$$E_{s+1}[X^{(1)}(\Lambda)]-X^{(1)}(P_{s+1})$$
$$=X^{(2)}[E_{s+1}(\Lambda)]-X^{(1)}(P_{s+1})$$
$$=0\quad(s=1,2,\cdots,n),\tag{21}$$

故有

$$X^{(2)}[E_{s+1}(\Lambda)]-E_{s+1}[X^{(1)}(\Lambda)]=0$$
$$(s=1,2,\cdots,n).\tag{22}$$

将(22)式代入(19)式，便得(20)式．反之，若(20)式成立，由(19)式知，(22)和(21)式亦成立．证毕．

考虑到在计算(14)式时，需将算子 $X^{(1)}$ 与 E_s 中的 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$ 换成 $\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}$，则(20)式中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$ 可表为 $\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}$，$\xi'_{s+1}$ 可表为 $\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}$．另外，命题 2 也是 Lie 对称性为形式不变性的充分必要条件．

5. Hojman 定理的推广与应用

在事件空间中，完整系统的特殊的 Lie 对称性、特殊的 Noether 对称性和特殊的形式不变性都能导致 Hojman 守恒量，分别由命题 3，4，5 表出．

命题 3 如果在变换(5)下生成元 ξ_{s+1} 满足(11)式，且存在某函数 $\mu=\mu(x_\alpha,x'_\alpha)$，使得

$$\frac{\partial h_{s+1}}{\partial x'_{s+1}}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\ln\mu=0,\tag{23}$$

则事件空间中的 Lie 对称性导致 Hojman 守恒量

$$I_{\mathrm{H}}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{s+1}}(\mu\xi_{s+1})+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}\right)=\mathrm{const.}\tag{24}$$

证明 将(24)式按(10)式求对 τ 的导数，得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}I_{\mathrm{H}}=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_{s+1}}\xi_{s+1}\right)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\xi_{s+1}}{\partial x_{s+1}}$$
$$+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x'_{s+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}+\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}\right).\tag{25}$$

容易证明下列运算：

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}=\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}-\frac{\partial}{\partial x_{s+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}$$
$$-\frac{\partial h_{k+1}}{\partial x'_{s+1}}\frac{\partial}{\partial x'_{k+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1},$$
$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\xi_{s+1}}{\partial x_{s+1}}=\frac{\partial}{\partial x_{s+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}-\frac{\partial h_{k+1}}{\partial x_{s+1}}\frac{\partial\xi_{s+1}}{\partial x'_{k+1}}.\tag{26}$$

将(11)式对 x'_{s+1} 求偏导数，并对 s 求和，得

$$\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}=\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}\left(\frac{\partial h_{s+1}}{\partial x_{k+1}}\xi_{k+1}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}\left(\frac{\partial h_{s+1}}{\partial x'_{k+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{k+1}\right).\tag{27}$$

将(26)和(27)式代入(25)式，再利用(23)和(11)式，得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}I_{\mathrm{H}}=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_{s+1}}\xi_{s+1}\right)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x'_{s+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}\right)$$
$$+\frac{\partial^2h_{s+1}}{\partial x'_{s+1}\partial x_{k+1}}\xi_{k+1}+\frac{\partial^2h_{s+1}}{\partial x'_{s+1}\partial x'_{k+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{k+1}$$
$$=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x'_{s+1}}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{s+1}-\frac{\partial h_{s+1}}{\partial x_{k+1}}\xi_{k+1}\right.$$
$$\left.-\frac{\partial h_{s+1}}{\partial x'_{k+1}}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_{k+1}\right)=0.$$

证毕．

利用命题 3，可由系统的 Lie 对称性直接地求得

Hojman 守恒量.

命题 4 若在变换(5)下系统 Noether 对称性的生成元 ξ_{s+1} 和 P_{s+1} 满足(18)式,且存在某函数 $\mu=\mu(x_\alpha,x'_\alpha)$,使得(23)式成立,则 Noether 对称性导致 Hojman 守恒量(24)式.

证明 由命题 1 和命题 3 可证得命题 4.

利用命题 4,可由系统的 Noether 对称性通过 Lie 对称性间接地求得 Hojman 守恒量.

命题 5 若在变换(5)下系统形式不变性的生成元 ξ_{s+1} 满足(20)式,且存在某函数 $\mu=\mu(x_\alpha,x'_\alpha)$,使得(23)式成立,则形式不变性导致 Hojman 守恒量(24)式.

证明 由命题 2 和命题 3 可证得命题 5.

利用命题 5,可由系统的形式不变性通过 Lie 对称性间接地导出 Hojman 守恒量.

6. 算 例

例 1 位形空间中单自由度 Lagrange 系统为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2\exp(-\gamma t)\qquad(\gamma=\mathrm{const.}),\tag{28}$$

试研究系统在事件空间中由 Lie 对称性、Noether 对称性和形式不变性导致的 Hojman 守恒量.

令

$$x_1=t,\qquad x_2=q,\tag{29}$$

则有

$$\Lambda=\frac{1}{2}x'_1\left(\frac{x'_2}{x'_1}\right)^2\exp(-\gamma x_1).\tag{30}$$

(4)式给出

$$x''_2=\gamma x'_1x'_2+\frac{x'_2}{x'_1}x''_1.\tag{31}$$

(11)式给出

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_2=\gamma x'_1\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_2+\frac{x''_1}{x'_1}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_2,\tag{32}$$

它有解

$$\xi_2=1,\tag{33}$$

$$\xi_2=\left(\gamma x_2-\frac{x'_2}{x'_1}\right)^2.\tag{34}$$

(23)式给出

$$\gamma x'_1+\frac{x''_1}{x'_1}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\ln\mu=0,\tag{35}$$

它有解

$$\mu=(x'_1)^{-1}\exp(-\gamma x_1),\tag{36}$$

$$\mu=(x'_1)^{-1}\left(\gamma x_2-\frac{x'_2}{x'_1}\right)\exp(-\gamma x_1).\tag{37}$$

由(33)和(36)式,利用命题 3,找到 Lie 对称性导致的 Hojman 守恒量为

$$I_{\mathrm{H}}=0;\tag{38}$$

由(34)和(36)式,得

$$I_{\mathrm{H}}=2\gamma\left(\gamma x_2-\frac{x'_2}{x'_1}\right)=\mathrm{const.};\tag{39}$$

由(33)和(37)式,得

$$I_{\mathrm{H}}=\gamma\left(\gamma x_2-\frac{x'_2}{x'_1}\right)^{-1}=\mathrm{const.};\tag{40}$$

由(34)和(37)式,得

$$I_{\mathrm{H}}=3\gamma\left(\gamma x_2-\frac{x'_2}{x'_1}\right)=\mathrm{const.}\tag{41}$$

守恒量(38)式是平凡的,守恒量(39)—(41)式是非平凡的,它们都是由系统 Lie 对称性导出的 Hojman 守恒量.

对此问题,生成元(33)式显然是 Noether 对称性的.利用命题 1 的推论和命题 4,可由 Noether 对称性导出 Hojman 守恒量(40)式.因生成元(33)和(34)式满足(20)式,由命题 5 亦可得到系统形式不变性导致的 Hojman 守恒量(38)—(41)式.

注意到,这些 Hojman 守恒量(39)—(41)式都不是 Noether 定理给出的 Noether 守恒量.

例 2 事件空间中完整系统为

$$\Lambda=x'_1\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x'_2}{x'_1}\right)^2+\left(\frac{x'_3}{x'_1}\right)^2\right]-x_3\right\},$$

$$P_1=0,\quad P_2=-x'_3,\quad P_3=x'_2.\tag{42}$$

试由系统的 Lie 对称性、Noether 对称性和形式不变性导出 Hojman 守恒量.

(4)式给出

$$x''_2=-x'_3x'_1+\frac{x'_2}{x'_1}x''_1,$$

$$x''_3=(x'_2-x'_1)x'_1+\frac{x'_3}{x'_1}x''_1.\tag{43}$$

(11)式给出

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_2=-x'_1\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_3+\frac{x''_1}{x'_1}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_2,$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_3=x'_1\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_2+\frac{x''_1}{x'_1}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\xi_3,\tag{44}$$

它有解

$$\xi_2=1,\quad \xi_3=0,\tag{45}$$

$$\xi_2=0,\quad \xi_3=1,\tag{46}$$

$$\xi_2=\left(\frac{x'_3}{x'_1}-x_2+x_1\right)^2,\quad \xi_3=0.\tag{47}$$

(23)式给出

$$2\frac{x_1''}{x_1'} + \frac{\bar{d}}{d\tau}\ln\mu = 0, \tag{48}$$

它有解

$$\mu = (x_1')^{-2}, \tag{49}$$

$$\mu = (x_1')^{-2}\left(\frac{x_3'}{x_1'} - x_2 + x_1\right), \tag{50}$$

$$\mu = (x_1')^{-2}\left(\frac{x_2'}{x_1'} + x_3\right). \tag{51}$$

利用命题 3，由(47)和(49)式，求得 Lie 对称性导致的 Hojman 守恒量

$$I_H = -2\left(\frac{x_3'}{x_1'} - x_2 + x_1\right) = \text{const.}, \tag{52}$$

由(45)和(50)式，得

$$I_H = -\left(\frac{x_3'}{x_1'} - x_2 + x_1\right)^{-1} = \text{const.}, \tag{53}$$

由(46)和(51)式，得

$$I_H = \left(\frac{x_2'}{x_1'} + x_3\right)^{-1} = \text{const.} \tag{54}$$

守恒量(52)—(54)式是系统 Lie 对称性导致的 Hojman 守恒量.

注意到，生成元(45)和(46)式是 Noether 对称性的，并且都满足(18)式，因此，利用命题 4 亦可得到 Noether 对称性导致的 Hojman 守恒量(53)和(54)式；生成元(45)，(46)和(47)式都是形式不变性的，并且都满足(20)式，因此，利用命题 5 亦可得到形式不变性导致的 Hojman 守恒量(52)—(54)式.

[1] Mei F X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1207 (in Chinese) [梅凤翔 2000 物理学报 **49** 1207]

[2] Mei F X and Shang M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1901 (in Chinese) [梅凤翔、尚　玫 2000 物理学报 **49** 1901]

[3] Qiao Y F and Zhao S H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1 (in Chinese) [乔永芬、赵淑红 2001 物理学报 **50** 1]

[4] Li Y C, Zhang Y, Liang J H and Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 376

[5] Wang S Y and Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5

[6] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张　毅 2002 物理学报 **51** 461]

[7] Ge W K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1156 (in Chinese) [葛伟宽 2002 物理学报 **51** 1156]

[8] Zhang H B 2002 *Chin. Phys.* **11** 765

[9] Xu Z X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2423 (in Chinese) [许志新 2002 物理学报 **51** 2423]

[10] Luo S K 2003 *Chin. Phys.* **12** 140

[11] Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1048 (in Chinese) [梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[12] Fu J L and Chen L Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 695

[13] Chen X W and Li Y M 2003 *Chin. Phys.* **12** 936

[14] Ge W K and Zhang Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2105 (in Chinese) [葛伟宽、张　毅 2003 物理学报 **52** 2105]

[15] Zhang Y and Mei F X 2003 *Chin. Phys.* **12** 1058

[16] Fu J L and Chen L Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2664 (in Chinese) [傅景礼、陈立群 2003 物理学报 **52** 2664]

[17] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[18] Fang J H, Chen P S, Zhang J and Li H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2945 (in Chinese) [方建会、陈培胜、张　军、李　红 2003 物理学报 **52** 2945]

[19] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]

[20] Zhang Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 331 (in Chinese) [张　毅 2004 物理学报 **53** 331]

[21] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京 科学出版社)]

[22] Mei F X 2003 *J. Jiangxi Normal Univ.* **27** 1 (in Chinese) [梅凤翔 2003 江西师范大学学报 **27** 1]

[23] Hojman S A 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L291

[24] Zhang Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1832 (in Chinese) [张　毅 2003 物理学报 **52** 1832]

[25] Luo S K and Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 666 (in Chinese) [罗绍凯、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 666]

Hojman conserved quantity for a holonomic system in the event space*

Xu Xue-Jun[1)2)†] Mei Feng-Xiang[1)] Qin Mao-Chang[1)]

[1)] (*School of Science*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

[2)] (*Department of Physics*, *Zhejiang Normal University*, *Jinhua* 321004, *China*)

(Received 11 May 2004; revised manuscript received 4 August 2004)

Abstract

A Hojman conserved quantity constructed by using the special Lie symmetry, or the Noether symmetry, or the form invariance for a holonomic system in the event space is studied. First, the differential equations of motion of the system are established. Second, the critera of three kinds of symmetries, such as the Lie symmetry, the Noether symmetry and the form invariance, and the relation among them are obtained. Third, the conservation law theorem gained by Hojman is generalized and applied to the system, and a non-Noether conserved quantity is obtained. Two examples are finally given to illustrate the application of the results.

Keywords: analytical mechanics, holonomic system, event space, symmetry, Hojman conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10272021), and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China (Grant No. 20040007022).

† E-mail: xxj@bit.edu.cn