第 54 卷 第 3 期 2005 年 3 月
1000-3290/2005/54(03)/1156-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.54, No.3, March, 2005


# 囚禁离子与单模场的相互作用

曲照军† 柳盛典 杨传路

(烟台师范学院物理系,烟台 264000)

(2003 年 10 月 14 日收到;2004 年 11 月 10 日收到修改稿)

研究了囚禁离子与单模量子辐射场构成的相互作用系统在载波激发($\omega_L = \omega_0$)、红激发[$\omega_L = \omega_0 - j\nu$($j = 1, 2, 3$)]和蓝激发[$\omega_L = \omega_0 + j\nu$($j = 1, 2, 3$)]情形下的统计性质.讨论了系统的态函数随时间的演化关系、光子态和声子态交换的条件及相应的离子布居数,得到了光子数和声子数的平均值及其方差、光子场和声子场的二阶相干度等量值.

关键词:囚禁离子,单模量子辐射场,声子场,旋波近似

PACC:3280P,3280,4250V

## 1. 引 言

对囚禁离子与单模量子辐射场构成的相互作用系统[1],在旋波近似下,我们得到了 7 种重要的情形[$\omega_L = \omega_0 \pm j\nu$($j = 0, 1, 2, 3$)],而文献[1]仅做到了前 3 种情形(即 $\omega_L = \omega_0, \omega_0 \pm \nu$),且此处前 3 种情形的哈密顿量也与文献[1]不同,比文献[1]更有实质意义,含有声子数算符.讨论了各种相互作用情形下系统的态函数随时间的演化关系、光子态和声子态交换的条件及相应的离子布居数,研究了光子场和声子场的统计性质,如光子数和声子数的平均值及其方差、光子场和声子场的二阶相干度等量值.结果显示,光场始终具有亚泊松统计特性;当初始声子数 $m \geqslant 5$ 时,声子场也始终具有亚泊松统计特性.这些研究也为量子逻辑门的控制研究提供有益的参考.

## 2. 旋波近似下 7 种相互作用哈密顿量

考虑一个二能级的囚禁离子(限制在 Paul 势阱中心附近的囚禁离子,其质心的运动可视为量子谐振子)与单模量子辐射场(沿 $x$ 方向形成驻波场)构成的系统[1],忽略原子的衰变效应,采用 $\hbar = 1$ 的自然单位,该系统的哈密顿量[1]为

$$H = \omega_L a^+ a + \nu b^+ b + \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z + \frac{1}{2}\Omega(a^+ + a)(\sigma_+ + \sigma_-)\sin(\eta\hat{x} + \phi), \tag{1}$$

式中 $\omega_L$ 是单模辐射场的频率,$a^+$ 和 $a$ 是单模场的产生和湮没算符,$\nu$ 是囚禁离子质心振动的频率,$b^+$ 和 $b$ 是质心振动声子场的产生和湮没算符,$\omega_0$ 是内部电子态 $|2\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间的跃迁频率,$\eta = K\sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}}$ 是 Lamb-Dicke 参数($K$ 是波数)[2-5],$\hat{x} = b^+ + b$ 是离子质心的无量纲的位置算符,$\phi$ 是离子质心相对驻波的位置,耦合参数 $\Omega$ 正比于离子和辐射场相互作用的强度,$\sigma_+$,$\sigma_-$ 和 $\sigma_z$ 是赝自旋算符,即 $\sigma_+ = |2\rangle\langle 1|$,$\sigma_- = |1\rangle\langle 2|$,$\sigma_z = |2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|$.

因 $\eta$ 是一个小参数,故(1)式的哈密顿量可以展开成 $\eta$ 的幂级数,忽略 $O(\eta^4)$ 以上的项,得

$$\begin{aligned} H = {} & \omega_L a^+ a + \nu b^+ b + \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z \\ & + \frac{1}{2}\Omega\sin\phi(a^+ + a)(\sigma_+ + \sigma_-) \\ & + \frac{1}{2}\Omega\eta\cos\phi(a^+ + a)(\sigma_+ + \sigma_-)(b^+ + b) \\ & - \frac{1}{4}\Omega\eta^2\sin\phi(a^+ + a)(\sigma_+ + \sigma_-)(b^+ + b)^2 \\ & - \frac{1}{12}\Omega\eta^3\cos\phi(a^+ + a)(\sigma_+ + \sigma_-)(b^+ + b)^3. \end{aligned}$$

† 通讯联系人.E-mail:quzhaojun2004@163.com

记 $H = H_0 + H_{\rm int}$,式中 $H_0 = \omega_L a^+ a + \nu b^+ b + \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z$,$H_{\rm int}$是上式中的余下部分. 由公式 $H^{\rm I} = U_0^+ H_{\rm int} U_0$($U_0 = \exp(iH_0 t) = \exp(-i\omega_L a^+ at)\exp(-i\nu b^+ bt)\exp\left(-\frac{i}{2}\omega_0\sigma_z t\right)$是幺正变换算符),经过冗长的计算,得相互作用绘景中的有效哈密顿量为

$$
\begin{aligned}
H^{\rm I} = & \frac{1}{2}\Omega\sin\phi(a^+\sigma_-\exp[i(\omega_L-\omega_0)t] \\
& + a^+\sigma_+\exp[i(\omega_L+\omega_0)t] + {\rm H.c.}) \\
& + \frac{1}{2}\Omega\eta\cos\phi(a^+b^+\sigma_-\exp[i(\omega_L-\omega_0+\nu)t] \\
& + a^+b\sigma_-\exp[i(\omega_L-\omega_0-\nu)t] \\
& + a^+b^+\sigma_+\exp[i(\omega_L+\omega_0+\nu)t] \\
& + a^+b\sigma_+\exp[i(\omega_L+\omega_0-\nu)t] + {\rm H.c.}) \\
& - \frac{1}{4}\Omega\eta^2\sin\phi[a^+b^+b^+\sigma_+\exp[i(\omega_L+\omega_0+2\nu)t] \\
& + a^+b^+b^+\sigma_-\exp[i(\omega_L-\omega_0+2\nu)t] \\
& + a^+bb\sigma_-\exp[i(\omega_L-\omega_0-2\nu)t] \\
& + a^+bb\sigma_+\exp[i(\omega_L+\omega_0-2\nu)t] \\
& + a^+(2b^+b+1)\sigma_+\exp[i(\omega_L+\omega_0)t] \\
& + a^+(2b^+b+1)\sigma_-\exp[i(\omega_L-\omega_0)t] + {\rm H.c.}] \\
& - \frac{1}{12}\Omega\eta^3\cos\phi[a^+b^+b^+b^+\sigma_+ \\
& \times\exp[i(\omega_L+\omega_0+3\nu)t] \\
& + 3a^+b^+bb^+\sigma_+\exp[i(\omega_L+\omega_0+\nu)t] \\
& + 3a^+bb^+b\sigma_+\exp[i(\omega_L+\omega_0-\nu)t] \\
& + a^+bbb\sigma_+\exp[i(\omega_L+\omega_0-3\nu)t] \\
& + a^+b^+b^+b^+\sigma_-\exp[i(\omega_L-\omega_0+3\nu)t] \\
& + 3a^+b^+bb^+\sigma_-\exp[i(\omega_L-\omega_0+\nu)t] \\
& + 3a^+bb^+b\sigma_-\exp[i(\omega_L-\omega_0-\nu)t] \\
& + a^+bbb\sigma_-\exp[i(\omega_L-\omega_0-3\nu)t] + {\rm H.c.}].
\end{aligned}
$$

在旋波近似下,得到了如下 7 种重要的情形(而文献[1]仅做到了前 3 种情形,且此处前 3 种情形的哈密顿量也与文献[1]不同,比文献[1]更有实质意义,含有声子数算符).

1) $\omega_L = \omega_0$(载波激发)

$$H_1^{\rm I} = \frac{1}{2}\Omega\sin\phi\left[1-\frac{1}{2}\eta^2(2b^+b+1)\right](a^+\sigma_- + a\sigma_+),$$

表示离子吸收一个光子,从基态跃迁到激发态,反之亦然,而声子数保持不变.

2) $\omega_L = \omega_0 - \nu$(红激发)

$$H_2^{\rm I} = \frac{1}{2}\Omega\eta\cos\phi\left[\left(1-\frac{1}{2}\eta^2 b^+b\right)a^+b^+\sigma_- + ab\sigma_+\left(1-\frac{1}{2}\eta^2 b^+b\right)\right],$$

表示离子吸收一个光子和一个声子,从基态跃迁到激发态,反之亦然.

3) $\omega_L = \omega_0 + \nu$(蓝激发)

$$H_3^{\rm I} = \frac{1}{2}\Omega\eta\cos\phi\left[a^+b\sigma_-\left(1-\frac{1}{2}\eta^2 b^+b\right) + \left(1-\frac{1}{2}\eta^2 b^+b\right)ab^+\sigma_+\right],$$

表示离子吸收一个光子,并放出一个声子,从基态跃迁到激发态,反之亦然.

4) $\omega_L = \omega_0 - 2\nu$(红激发)

$$H_4^{\rm I} = -\frac{1}{4}\Omega\eta^2\sin\phi(a^+b^+b^+\sigma_- + abb\sigma_+),$$

表示离子吸收一个光子和两个声子,从基态跃迁到激发态,反之亦然.

5) $\omega_L = \omega_0 + 2\nu$(蓝激发)

$$H_5^{\rm I} = -\frac{1}{4}\Omega\eta^2\sin\phi(a^+bb\sigma_- + ab^+b^+\sigma_+),$$

表示离子吸收一个光子,并放出两个声子,从基态跃迁到激发态,反之亦然.

6) $\omega_L = \omega_0 - 3\nu$(红激发)

$$H_6^{\rm I} = -\frac{1}{12}\Omega\eta^3\cos\phi(a^+b^+b^+b^+\sigma_- + abbb\sigma_+),$$

表示离子吸收一个光子和三个声子,从基态跃迁到激发态,反之亦然.

7) $\omega_L = \omega_0 + 3\nu$(蓝激发)

$$H_7^{\rm I} = -\frac{1}{12}\Omega\eta^3\cos\phi(a^+bbb\sigma_- + ab^+b^+b^+\sigma_+),$$

表示离子吸收一个光子,并放出三个声子,从基态跃迁到激发态,反之亦然.

## 3. 各种相互作用下的统计性质

首先讨论各种相互作用情形下系统的态函数随时间的演化关系、光子态和声子态交换的条件及相应的离子布居数,然后研究光子场和声子场的统计性质,如光子数和声子数的平均值及其方差、光子场和声子场的二阶相干度等量值.

假设 $t = 0$ 时,系统的态函数为 $|\psi(0)\rangle = |2\rangle|n\rangle_a|m\rangle_b$,即离子处在激发态$|2\rangle$,光子和声子场分别处在 Fock 态$|n\rangle_a$ 和$|m\rangle_b$,利用相互作用绘景中的薛定谔方程 $i\frac{\partial}{\partial t}|\psi^{\rm I}(t)\rangle = H^{\rm I}|\psi^{\rm I}(t)\rangle$,经过

计算,得到 $t$ 时刻的态函数分别为

$$|\psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle_1 = \cos(Ag_1 t)|2\rangle|n\rangle_a|m\rangle_b - \mathrm{i}\sin(Ag_1 t)|1\rangle|n+1\rangle_a|m\rangle_b, \quad (2)$$

$$|\psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle_2 = \cos(Bg_2 t)|2\rangle|n\rangle_a|m\rangle_b - \mathrm{i}\sin(Bg_2 t)|1\rangle|n+1\rangle_a|m+1\rangle_b, \quad (3)$$

$$|\psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle_3 = \cos(Cg_2 t)|2\rangle|n\rangle_a|m\rangle_b - \mathrm{i}\sin(Cg_2 t)|1\rangle|n+1\rangle_a|m-1\rangle_b, \quad (4)$$

$$|\psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle_4 = \cos(Dg_3 t)|2\rangle|n\rangle_a|m\rangle_b + \mathrm{i}\sin(Dg_3 t)|1\rangle|n+1\rangle_a|m+2\rangle_b, \quad (5)$$

$$|\psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle_5 = \cos(Eg_3 t)|2\rangle|n\rangle_a|m\rangle_b + \mathrm{i}\sin(Eg_3 t)|1\rangle|n+1\rangle_a|m-2\rangle_b, \quad (6)$$

$$|\psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle_6 = \cos(Fg_4 t)|2\rangle|n\rangle_a|m\rangle_b + \mathrm{i}\sin(Fg_4 t)|1\rangle|n+1\rangle_a|m+3\rangle_b, \quad (7)$$

$$|\psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle_7 = \cos(Gg_4 t)|2\rangle|n\rangle_a|m\rangle_b + \mathrm{i}\sin(Gg_4 t)|1\rangle|n+1\rangle_a|m-3\rangle_b, \quad (8)$$

式中

$$A = \sqrt{n+1}\left[1 - \frac{1}{2}\eta^2(2m+1)\right],$$

$$B = \sqrt{(n+1)(m+1)}\left[1 - \frac{1}{2}\eta^2(m+1)\right],$$

$$C = \sqrt{(n+1)m}\left(1 - \frac{1}{2}\eta^2 m\right),$$

$$D = \sqrt{(n+1)(m+1)(m+2)},$$

$$E = \sqrt{(n+1)m(m-1)},$$

$$F = \sqrt{(n+1)(m+1)(m+2)(m+3)},$$

$$G = \sqrt{(n+1)m(m-1)(m-2)},$$

$$g_1 = \frac{1}{2}\Omega\sin\phi,$$

$$g_2 = \frac{1}{2}\Omega\eta\cos\phi,$$

$$g_3 = \frac{1}{4}\Omega\eta^2\sin\phi,$$

$$g_4 = \frac{1}{12}\Omega\eta^3\cos\phi.$$

由(2)式知,若 $n = m-1$,则当 $t = \frac{\pi}{2g_1 A_{n=m-1}}$ 时,光子态变成初始声子态.由(3)式知,若 $n = m+1$,则当 $t = \frac{\pi}{2g_2 B_{n=m+1}}$ 时,声子态变成初始光子态;若 $n = m-1$,则当 $t = \frac{\pi}{2g_2 B_{n=m-1}}$ 时,光子态变成初始声子态.由(4)式知,若 $n = m-1$,则当 $t = \frac{\pi}{2g_2 C_{n=m-1}}$ 时,光子态和声子态变换.由(5)式知,若 $n = m+2$,则当 $t = \frac{\pi}{2g_3 D_{n=m+2}}$ 时,声子态变成初始光子态;若 $n = m-1$,则当 $t = \frac{\pi}{2g_3 D_{n=m-1}}$ 时,光子态变成初始声子态.由(6)式知,若 $n = m-2$,则当 $t = \frac{\pi}{2g_3 E_{n=m-2}}$ 时,声子态变成初始光子态;若 $n = m-1$,则当 $t = \frac{\pi}{2g_3 E_{n=m-1}}$ 时,光子态变成初始声子态.由(7)式知,若 $n = m+3$,则当 $t = \frac{\pi}{2g_4 F_{n=m+3}}$ 时,声子态变成初始光子态;若 $n = m-1$,则当 $t = \frac{\pi}{2g_4 F_{n=m-1}}$ 时,光子态变成初始声子态.由(8)式知,若 $n = m-3$,则当 $t = \frac{\pi}{2g_4 G_{n=m-3}}$ 时,声子态变成初始光子态;若 $n = m-1$,则当 $t = \frac{\pi}{2g_4 G_{n=m-1}}$ 时,光子态变成初始声子态.由以上讨论可见,光子态和声子态的交换仅在情形3)下才有可能发生;当 $n = m-1$ 时,在各种情形下光子态都可以变成初始声子态,但所需时间不同.

利用(2)—(8)式,可得相应的布居数分别为

$$\langle \sigma_z \rangle_1 = \cos(2Ag_1 t),$$
$$\langle \sigma_z \rangle_2 = \cos(2Bg_2 t),$$
$$\langle \sigma_z \rangle_3 = \cos(2Cg_2 t),$$
$$\langle \sigma_z \rangle_4 = \cos(2Dg_3 t),$$
$$\langle \sigma_z \rangle_5 = \cos(2Eg_3 t),$$
$$\langle \sigma_z \rangle_6 = \cos(2Fg_4 t),$$
$$\langle \sigma_z \rangle_7 = \cos(2Gg_4 t).$$

由此可见,对初始真空光子场 $n = 0$ 而言,这些布居数将呈现拉比振荡.

利用(2)—(8)式,可得相应的光子数和声子数的平均值分别为

$$\langle a^+ a \rangle_1 = n + \sin^2(Ag_1 t),$$
$$\langle b^+ b \rangle_1 = m; \quad (9)$$
$$\langle a^+ a \rangle_2 = n + \sin^2(Bg_2 t),$$

$$\langle b^+ b\rangle_2 = m + \sin^2(Bg_2 t);\tag{10}$$

$$\langle a^+ a\rangle_3 = n + \sin^2(Cg_2 t),$$

$$\langle b^+ b\rangle_3 = m - \sin^2(Cg_2 t);\tag{11}$$

$$\langle a^+ a\rangle_4 = n + \sin^2(Dg_3 t),$$

$$\langle b^+ b\rangle_4 = m + 2\sin^2(Dg_3 t);\tag{12}$$

$$\langle a^+ a\rangle_5 = n + \sin^2(Eg_3 t),$$

$$\langle b^+ b\rangle_5 = m - 2\sin^2(Eg_3 t);\tag{13}$$

$$\langle a^+ a\rangle_6 = n + \sin^2(Fg_4 t),$$

$$\langle b^+ b\rangle_6 = m + 3\sin^2(Fg_4 t);\tag{14}$$

$$\langle a^+ a\rangle_7 = n + \sin^2(Gg_4 t),$$

$$\langle b^+ b\rangle_7 = m - 3\sin^2(Gg_4 t).\tag{15}$$

而光子数和声子数平方的平均值分别为

$$\langle (a^+ a)^2\rangle_1 = n^2 + (2n+1)\sin^2(Ag_1 t),$$

$$\langle (b^+ b)^2\rangle_1 = m^2;$$

$$\langle (a^+ a)^2\rangle_2 = n^2 + (2n+1)\sin^2(Bg_2 t),$$

$$\langle (b^+ b)^2\rangle_2 = m^2 + (2m+1)\sin^2(Bg_2 t);$$

$$\langle (a^+ a)^2\rangle_3 = n^2 + (2n+1)\sin^2(Cg_2 t),$$

$$\langle (b^+ b)^2\rangle_3 = m^2 + (1-2m)\sin^2(Cg_2 t);$$

$$\langle (a^+ a)^2\rangle_4 = n^2 + (2n+1)\sin^2(Dg_3 t),$$

$$\langle (b^+ b)^2\rangle_4 = m^2 + 4(m+1)\sin^2(Dg_3 t);$$

$$\langle (a^+ a)^2\rangle_5 = n^2 + (2n+1)\sin^2(Eg_3 t),$$

$$\langle (b^+ b)^2\rangle_5 = m^2 + 4(1-m)\sin^2(Eg_3 t);$$

$$\langle (a^+ a)^2\rangle_6 = n^2 + (2n+1)\sin^2(Fg_4 t),$$

$$\langle (b^+ b)^2\rangle_6 = m^2 + 3(2m+3)\sin^2(Fg_4 t);$$

$$\langle (a^+ a)^2\rangle_7 = n^2 + (2n+1)\sin^2(Gg_4 t),$$

$$\langle (b^+ b)^2\rangle_7 = m^2 + 3(3-2m)\sin^2(Gg_4 t),$$

则方差 $[V_{aj} = \langle (a^+ a)^2\rangle_j - \langle a^+ a\rangle_j^2$, $V_{bj} = \langle (b^+ b)^2\rangle_j - \langle b^+ b\rangle_j^2 (j = 1,2,\cdots,7)]$ 分别为

$$V_{a1} = \frac{1}{4}\sin^2(2Ag_1 t),\quad V_{b1} = 0;\tag{16}$$

$$V_{a2} = \frac{1}{4}\sin^2(2Bg_2 t),\quad V_{b2} = \frac{1}{4}\sin^2(2Bg_2 t);\tag{17}$$

$$V_{a3} = \frac{1}{4}\sin^2(2Cg_2 t),\quad V_{b3} = \frac{1}{4}\sin^2(2Cg_2 t);\tag{18}$$

$$V_{a4} = \frac{1}{4}\sin^2(2Dg_3 t),\quad V_{b4} = \sin^2(2Dg_3 t);\tag{19}$$

$$V_{a5} = \frac{1}{4}\sin^2(2Eg_3 t),\quad V_{b5} = \sin^2(2Eg_3 t);\tag{20}$$

$$V_{a6} = \frac{1}{4}\sin^2(2Fg_4 t),$$

$$V_{b6} = \frac{9}{4}\sin^2(2Fg_4 t);\tag{21}$$

$$V_{a7} = \frac{1}{4}\sin^2(2Gg_4 t),$$

$$V_{b7} = \frac{9}{4}\sin^2(2Gg_4 t).\tag{22}$$

由上可见，在这些种类的哈密顿量相互作用下，光子数的平均值及其方差是随时间变化的，声子数的平均值及其方差也是随时间变化的（除情形 1）外）. 而 $\langle a^+ a\rangle_2 - \langle b^+ b\rangle_2$，$\langle a^+ a\rangle_3 + \langle b^+ b\rangle_3$，$\langle a^+ a\rangle_4 - \frac{1}{2}\langle b^+ b\rangle_4$，$\langle a^+ a\rangle_5 + \frac{1}{2}\langle b^+ b\rangle_5$，$\langle a^+ a\rangle_6 - \frac{1}{3}\langle b^+ b\rangle_6$，$\langle a^+ a\rangle_7 + \frac{1}{3}\langle b^+ b\rangle_7$，$\langle a^+ a\rangle_i + \frac{1}{2}\langle \sigma_z\rangle_i (i = 1,2,\cdots,7)$ 是不变量，最后一个式子与量子光学中的 JC 相互作用的结果一样. 由这些式子结合还可以导出其他一些不变量.

利用(9)—(22)式，可得光子场和声子场的二阶相干度分别为

$$g_{a1}^{(2)}(0) = 1 - \frac{n + \sin^4(Ag_1 t)}{[n + \sin^2(Ag_1 t)]^2},$$

$$g_{b1}^{(2)}(0) = 1 - \frac{1}{m};\tag{23}$$

$$g_{a2}^{(2)}(0) = 1 - \frac{n + \sin^4(Bg_2 t)}{[n + \sin^2(Bg_2 t)]^2},$$

$$g_{b2}^{(2)}(0) = 1 - \frac{m + \sin^4(Bg_2 t)}{[m + \sin^2(Bg_2 t)]^2};\tag{24}$$

$$g_{a3}^{(2)}(0) = 1 - \frac{n + \sin^4(Cg_2 t)}{[n + \sin^2(Cg_2 t)]^2},$$

$$g_{b3}^{(2)}(0) = 1 - \frac{m - 2\sin^2(Cg_2 t) + \sin^4(Cg_2 t)}{[m - \sin^2(Cg_2 t)]^2};\tag{25}$$

$$g_{a4}^{(2)}(0) = 1 - \frac{n + \sin^4(Dg_3 t)}{[n + \sin^2(Dg_3 t)]^2},$$

$$g_{b4}^{(2)}(0) = 1 - \frac{m - 2\sin^2(Dg_3 t) + 4\sin^4(Dg_3 t)}{[m + 2\sin^2(Dg_3 t)]^2};\tag{26}$$

$$g_{a5}^{(2)}(0) = 1 - \frac{n + \sin^4(Eg_3 t)}{[n + \sin^2(Eg_3 t)]^2},$$

$$g_{b5}^{(2)}(0) = 1 - \frac{m - 6\sin^2(Eg_3 t) + 4\sin^4(Eg_3 t)}{[m - 2\sin^2(Eg_3 t)]^2};\tag{27}$$

$$g_{a6}^{(2)}(0) = 1 - \frac{n + \sin^4(Fg_4 t)}{[n + \sin^2(Fg_4 t)]^2},$$

$$g_{b6}^{(2)}(0) = 1 - \frac{m - 6\sin^2(Fg_4 t) + 9\sin^4(Fg_4 t)}{[m + 3\sin^2(Fg_4 t)]^2};\tag{28}$$

$$g_{a7}^{(2)}(0) = 1 - \frac{n + \sin^4(Gg_4 t)}{[n + \sin^2(Gg_4 t)]^2},$$

$$g_{b7}^{(2)}(0) = 1 - \frac{m - 12\sin^2(Gg_4 t) + 9\sin^4(Gg_4 t)}{[m - 3\sin^2(Gg_4 t)]^2}.\tag{29}$$

由(23)—(29)式知，在各种情形下，光场始终具有亚泊松统计特性；当 $m\geqslant 2$ 时，在情形 1)2)4)6)下，声子场始终具有亚泊松统计特性；当 $m\geqslant 3$ 时，在情形 3)下，声子场始终具有亚泊松统计特性；当 $m\geqslant 4$ 时，在情形 5)下，声子场始终具有亚泊松统计特性；当 $m\geqslant 5$ 时，在情形 7)下，声子场始终具有亚泊松统计特性. 总之，当初始声子数 $m\geqslant 5$ 时，在各种情形下，声子场始终具有亚泊松统计特性.

## 4. 结 语

对囚禁离子与单模量子辐射场构成的相互作用系统，在旋波近似下，得到了 7 种重要情形下的哈密顿量. 研究了各种相互作用情形下系统的态函数随时间的演化关系、光子态和声子态交换的条件及相应的离子布居数，并研究了光子场和声子场的统计性质，得到了光子数和声子数的平均值及其方差、光子场和声子场的二阶相干度等量值. 结果表明，光子态和声子态的交换仅在情形 3)下才有可能发生，当 $n = m - 1$ 时，在各种情形下光子态都可以变成初始声子态，但所需时间不同. 对初始真空光子场 $n = 0$ 而言，布居数将呈现拉比振荡. 在各种情形下光子数的平均值及其方差是随时间变化的，声子数的平均值及其方差也是随时间变化的(除情形 1)外)，而不变量有 $\langle a^+a\rangle_2 - \langle b^+b\rangle_2$，$\langle a^+a\rangle_3 + \langle b^+b\rangle_3$，$\langle a^+a\rangle_4 - \frac{1}{2}\langle b^+b\rangle_4$，$\langle a^+a\rangle_5 + \frac{1}{2}\langle b^+b\rangle_5$，$\langle a^+a\rangle_6 - \frac{1}{3}\langle b^+b\rangle_6$，$\langle a^+a\rangle_7 + \frac{1}{3}\langle b^+b\rangle_7$，$\langle a^+a\rangle_i + \frac{1}{2}\langle\sigma_z\rangle_i\ (i = 1,2,\cdots,7)$，最后一个式子与量子光学中的 JC 相互作用的结果一样. 在各种情形下光场始终具有亚泊松统计特性，当初始声子数 $m\geqslant 5$ 时，声子场也始终具有亚泊松统计特性.

[1] Luo X L *et al* 1998 *Phys. Lett.* A **237** 354
[2] Monroe C *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 4011
[3] Blockley C A, Walls D F and Risken H 1992 *Europhys. Lett.* **17** 509
[4] Wu Y and Yang X X 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3086
[5] Yang X X 1998 *Chin Phys. Lett.* **15** 186

# Interaction between a trapped ion with a single-mode quantized radiation field

Qu Zhao-Jun　Liu Sheng-Dian　Yang Chuan-Lu

(*Department of Physics*, *Yantai Normal University*, *Yantai*　264000, *China*)

(Received 14 October 2003; revised manuscript received 10 November 2004)

Abstract

The statistical properties of the system consisting of a trapped ion and a single-mode quantized radiation field are investigated under the conditions of carrier excitation ($\omega_L = \omega_0$), red excitation [$\omega_L = \omega_0 - j\nu$ ($j = 1, 2, 3$)] and blue excitation [$\omega_L = \omega_0 + j\nu$ ($j = 1, 2, 3$)]. The time-evolution of the state of the system, the photon-and phonon-state exchange conditions and the corresponding populations of the ion are discussed. The corresponding averages and variances for photon and phonon numbers, as well as the second-order correlation function for the photon and phonon fields etc, have been obtained.

**Keywords**: trapped ion, single-mode quantized radiation field, phonon field, rotating-wave approximation

**PACC**: 3280P, 3280, 4250V