

竖直振动颗粒物厚层中冲击力分岔现象*

姜泽辉[†] 李 斌 赵海发 王运鹰 戴智斌

(哈尔滨工业大学应用物理系, 哈尔滨 150001)

(2004 年 4 月 27 日收到, 2004 年 6 月 25 日收到修改稿)

实验研究了竖直振动颗粒物厚层中颗粒对容器底部的压力. 发现这种压力是脉冲式的, 并表现出受振动加速度控制的倍周期分岔现象. 在颗粒层底部观察到颗粒密堆积在一起的聚集态. 聚集态内颗粒的自由程较小, 并像一个整体一样运动.

关键词: 颗粒物质, 混沌, 倍周期分岔, 非弹性碰撞

PACC: 4610, 0547, 0520D, 0570J

1. 引 言

对颗粒物质施加竖直方向上的简谐振动时, 颗粒体系呈现出多种复杂的运动形式, 如成堆 (heaping)^[1,2]、对流 (convection)^[3,4]、分离 (segregation)^[5-8]、表面斑图 (surface standing wave)^[9] 等. 产生这些运动形式的物理机理成为近年来颗粒物质物理的研究热点^[10-13]. 理解振动颗粒物质的行为, 需要了解颗粒的浓度和速度的空间分布以及与碰撞有关的一些参量. 但在实验系统中这些参量很难测到. 最近, 人们试图将颗粒的平均动能定义为颗粒温度^[14], 并将其作为表征“颗粒气”的一个宏观参量. 但对较厚的颗粒层能否适合还有待进一步考察, 因为在较厚的颗粒体系中总是伴随宏观的对流运动, 其性质在整体上并不是统计均匀的.

颗粒间的碰撞是非弹性的, 这种非弹性碰撞不停地消耗颗粒的动能, 导致颗粒有聚集到一起的倾向. 如果忽略每个颗粒运动的具体细节, 颗粒体系整体上可以看作碰撞恢复系数为零, 或者碰撞恢复系数非常小的块体. 在外界周期性振动的激励下, 体系质心的运动应当类似于恢复系数为零的球体, 并表现出受振动加速度控制的倍周期分岔现象, 也就是具有类似于非弹性蹦球^[15-20]的行为特征. 作为控制参量, 振动加速度通常与重力加速度 g 约化表示为 $\Gamma = A\omega^2/g = A(2\pi f)^2/g$, f 和 A 为外加振

动的频率和振幅. 在竖直振动颗粒列的实验中, 已经证实了聚集态的存在, 并观察到颗粒列与底部的碰撞时间有分岔现象^[10,21]. 最近数值模拟^[22]表明, 重力和振动激励之间的竞争导致振动床中存在三种状态, 即聚集态、局部流化态和湍流态. 在振动颗粒薄层斑图生成的实验研究中^[9,23,24], 发现了飞行时间的二倍周期和四倍周期分岔现象, 分岔点分别为 $\Gamma_2 \approx 3.7$ 和 $\Gamma_4 \approx 7.0$ (振动频率 $f = 67\text{Hz}$). 在水平振动的实验中也发现了类似的分岔现象^[4], 与不同对流模式相对应的二倍周期和四倍周期的分岔点分别为 $\Gamma_2 = 3.7$ 和 $\Gamma_4 = 5.9$, 对此目前还没有给出合理的物理模型. 对于较厚 (大于 6 个颗粒厚) 的振动床^[25], 可以观察到随振动加速度的增加会出现成堆、表面流化及拱起 (arching) 等现象. 伴随出现的是颗粒飞行时间的周期倍化, 分岔点的理论值为 $\Gamma_2 \approx 3.7$ 和 $\Gamma_4 \approx 6.6$.

一个置于正弦振动台面上的非弹性球, 其运动是通过周期倍化通向混沌的^[15-20]. 如果不断增加颗粒, 就每一个个体而言, 颗粒之间的多次非弹性碰撞将使单球的运动特征破坏掉. 但颗粒多到一定数量的颗粒体系整体上是否还会具有一些类似于单球的特征, 这需要研究. 本文研究了振动颗粒床中颗粒对容器底部的冲击作用, 发现这种冲击是倍周期的. 表明颗粒床的整体是以分谐波的方式振动, 不是杂乱无章的, 具有单球体系的倍周期特征.

* 哈尔滨工业大学跨学科交叉性研究基金(批准号: HIT.MD2002.32)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: zehuijiang@yahoo.com

2. 实验装置与结果

实验是在不同内径的圆筒形玻璃容器中进行的。容器底采用铝合金以减少静电作用。在容器和振动台面之间是一压力传感器,用来记录容器底传来的力,这个力包含颗粒床和容器二者的贡献。由于压电晶体的形变很小(微米量级),而且其共振频率远大于激振频率,传感器形变对整个系统运动状态的影响可忽略。台面在竖直方向以正弦方式振动。

在内径为 18.3mm 的容器中装入 46.59g 直径为 $1.0 \pm 0.01\text{mm}$ 的不锈钢球时,测得的压力随时间的变化曲线如图 1 实线所示。振动频率为 40Hz,颗粒层的厚度约为 18mm。由于容器与压力传感器是刚性连接的,它对压力的贡献主要是 40Hz 的谐波,而且可以通过 FFT 滤波技术将其滤掉。由此得到所有颗粒对容器底的压力,如图 1 虚线所示。尖脉冲的出现反映出颗粒床相对台面的运动是冲击式的,脉冲峰高反映了二者相碰时相对速度的大小。

显见,颗粒整体的运动有节律,而且随激振强度的增加,其对台面的相对速度经历了二周期倍化、四周期倍化、混沌和三周期倍化。脉冲峰高的变化过程如图 2 所示。图 2 中各分岔点依次为 $\Gamma_2 = 3.75$, $\Gamma_4 = 6.80$ 和 $\Gamma_3 = 9.22$ 。阴影区(混沌区)表示在此范围内冲击力(仍是脉冲式的)不是长时间有序的,可以有四倍周期、五倍周期、八倍周期等,但都不稳定,很快又会被其他的脉冲序列代替。超过这个区域,颗粒立刻进入稳定的三倍周期运动。

实验中采用的颗粒有两种:一种是合金钢球,直径为 0.50,0.70 和 1.00mm;另一种是平均直径为 1.0 和 2.0mm 的玻璃球。玻璃容器的内径为 14.2, 18.3 和 40.0mm。在这两种颗粒体系中都可以看到二倍周期和四倍周期的分岔,分岔点都在 $\Gamma = 4.0$ 和 $\Gamma = 7.0$ 附近。但三倍周期分岔只在金属颗粒床中出现,而且与容器的内径有一定的关系。下面将讨论产生倍周期运动的机理。

3. 产生倍周期运动的机理

压力信号中出现脉冲表明颗粒层主要是整体上下运动的。尽管层中每个颗粒的运动具有一定的随机性,但大量堆积在一起的颗粒,其自由程较小,频

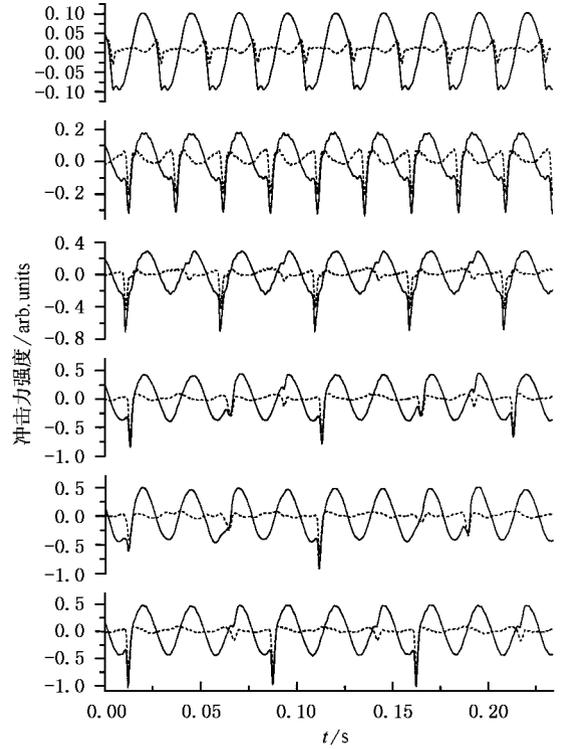


图 1 加速度 Γ 取不同值时冲击力随时间的变化。振动频率 $f = 40\text{Hz}$, 从上到下 $\Gamma = 1.80, 2.97, 4.11, 7.75, 8.31$ 和 9.40 。虚线为去掉 40Hz 信号后,所得颗粒对容器底部的冲击力,实线为压力随时间的变化。

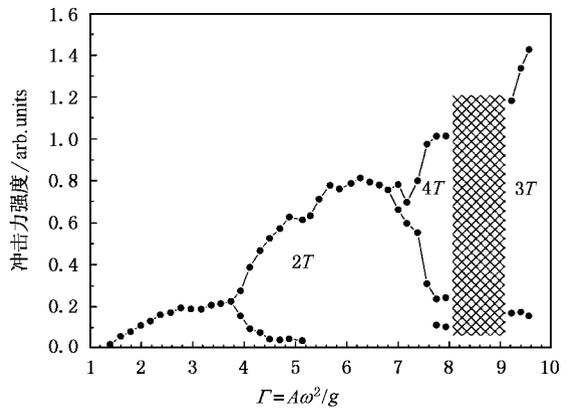


图 2 颗粒冲击力强度的倍周期分岔图。振动频率同图 1, 颗粒为直径 $1.00 \pm 0.01\text{mm}$ 的不锈钢球, 阴影部分为混沌区。

繁的非弹性碰撞连续地消耗体系的动能,使得颗粒密堆积在一起,整体上类似于一个完全非弹性体。对一个完全非弹性体施加竖直方向的振动时是可以导致倍周期运动的出现的。

这里采用完全非弹性蹦球模型^[17,18]来计算颗粒层相对台面的速度。一个完全非弹性球置于以简

谐方式振动的台面上,台面的位移表示为

$$x(t) = A \sin \omega t. \quad (1)$$

由于球是完全非弹性的,只有当台面的加速度小于 $-g$ 时 ($\Gamma < 1$) 球才会脱离台面被抛起,否则,球就会“黏附”在台面上,并与台面以相同的速度运动.如果在 t_0 时刻球被抛起,它再次落到台面上的时刻 t 由

$$A \sin \omega t_0 + (u_0 + A \omega \cos \omega t_0) (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 = A \sin \omega t \quad (2)$$

决定,其中 u_0 为球的相对起跳速度,取为零值,因为起跳时球和台面的速度相同.在 t 时刻,如果起跳条件 ($\Gamma < 1$) 得到满足,球会立即再次起跳.否则,它将“黏附”在台面上等待下一个振动周期内的起跳机会.在这个等待过程中,球对前面的运动特征失去“记忆”,与台面保持相同的运动状态.这种机理会导致倍周期(相对于台面的振动周期)运动的产生.图 3 给出 $f = 40\text{Hz}$, $\Gamma = 2.6$ 和 $\Gamma = 4.2$ 时,球的运动情况. $\Gamma = 4.2$ 时球的运动是二倍周期的,也就是在两个振动周期内球连续跳跃两次,并且每两个振动周期完成一次完全相同的重复运动,而 $\Gamma = 2.6$ 时是与施加振动同周期的,即在每个振动周期内仅跳跃一次.

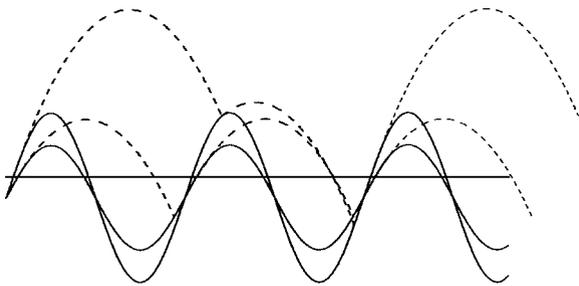


图 3 $f = 40\text{Hz}$, $\Gamma = 2.6$ 和 $\Gamma = 4.2$ 时,正弦振动台面上完全非弹性球的运动情况.实线为台面的位置随时间的变化,虚线为球的位置.振幅较大者为 $\Gamma = 4.2$ 时的情况.水平线与实线的交点代表此时 $\Gamma = 1$,即可能的起跳点

在 t 时刻,球相对于台面的“着陆”速度为

$$u = (u_0 + A \omega \cos \omega t_0) - g(t - t_0) - A \omega \cos \omega t. \quad (3)$$

根据 (3) 式可以计算出球每次与台面相碰时的相对速度(每次碰撞后,球与台面的相对速度为零;“着陆”速度决定冲击力强度的大小).图 4 给出不同 Γ 值时, u 的取值情况(图中数据已取绝对值).图 4 中数据点密集的区域为混沌区,在 Γ 取值 1—19 范

围内,球经历了 4 个混沌区.在混沌区之间是倍周期运动.在 $\Gamma_2 = 3.72$ 处,发生二倍周期分岔.之后,在 $\Gamma'_4 = 4.60$ 处,由双枝变成单枝.在 $\Gamma_4 = 6.59$ 处,四倍周期分岔,然后,迅速进入第一混沌区.在各混沌区中仍存在许多倍周期窗口.第一混沌区(参见图 4 内插图)中部较宽的区域为三枝五倍周期窗口,箭头所指处是进入混沌区前发生的一次八倍周期分岔 ($\Gamma = 7.22$).在 $\Gamma = 7.44$ 处,第一混沌区结束,并立刻进入两枝三倍周期运动.图 4 标出的其他各分岔点分别为 $\Gamma'_3 = 7.79$, $\Gamma_6 = 9.60$, $\Gamma'_4 = 10.95$, $\Gamma_8 = 12.72$, $\Gamma'_5 = 14.10$, $\Gamma_{10} = 15.85$ 和 $\Gamma'_6 = 17.25$.二倍周期分岔点与实验结果一致,四倍周期和三倍周期分岔点的实验值比计算值略大,这可能是由于颗粒与器壁的摩擦力及空气的阻滞力随颗粒速度的增大而变大的缘故.另外,实验中观察到在三倍周期分岔之前存在一个混沌区,这与计算结果一致.但实验中这个区域较宽,这可归因于随机涨落的影响,这也说明在 Γ 较大或颗粒运动速度较大时,完全非弹性球模型还不够细致.

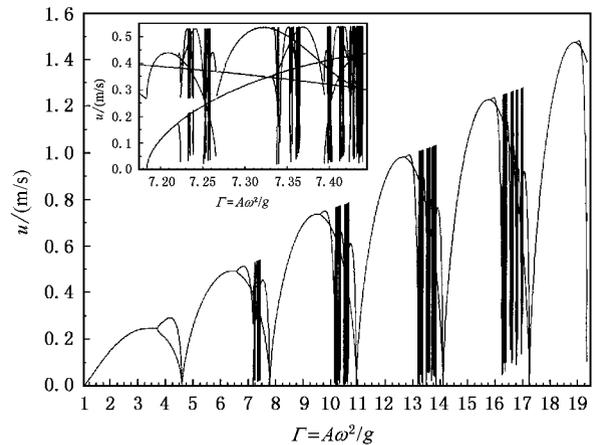


图 4 球相对速度分岔图 振动频率同图 1

图 5 给出球与台面连续两次碰撞之间的飞行时间(根据 (2) 式)随振动加速度的变化情况,其中飞行时间已与台面振动周期 T 约化.很显然,倍周期分岔都发生在约化飞行时间为整数的时刻.分岔点同图 4.计算也表明,约化飞行时间的分岔情况与施加频率无关.

文献 [9] 研究了直径为 0.15—0.18mm 的铜球薄层中薄层脱离杯底后的飞行时间,测量结果与完全非弹性球模型基本一致(文献 [9] 图 3).表面斑图与飞行时间的周期倍化有一定的对应关系,例如 67Hz

时,从 $\Gamma \approx 2.4$ 到飞行时间二倍周期($\Gamma_2^{\text{exp}} = 4.2$)之前是以 $f/2$ 振荡的条纹,之后依次出现蜂窝结构(Γ_2^{exp} 之前)纽线($\Gamma \approx 5.6$ 之前)及四方结构,在飞行时间四倍周期($\Gamma_4^{\text{exp}} = 7.5$)之后,又是以 $f/4$ 振荡的蜂窝结构; $\Gamma > 7.8$,则为无序结构.在玻璃球的深床中^[25]观察到随 Γ 的增大会出现成堆、小幅表面波、拱起和大幅表面波等现象.这些运动形式之间的转变与频率无关(15—40Hz),但与 Γ 及颗粒层的厚度(大于5个颗粒厚)有关.在 $\Gamma \approx 1.2$ 时,开始出现对流造成的成堆现象. $\Gamma \approx 2.2$ (与厚度有一定关系)时成堆现象消失,开始出现小幅表面波.在 Γ_2 和 Γ_2^{exp} 附近出现有波腹波节的拱起现象,之后出现大幅表面波.值得注意的是,Wassgren 等人^[25]观察到 Γ_2 和 Γ_2^{exp} 会随厚度的减小而增加.例如,对于 1.28mm 的玻璃球,当厚度由约 30 个厚减到 5.5 时, Γ_2 和 Γ_2^{exp} 由 2.9 和 4.5 增加到 4.2 和 5.8.对于 3.00mm 的玻璃球也有类似现象.产生这种效果的原因目前尚不清楚,也可能是空气的阻尼作用.因为对更细的玻璃珠(0.63 和 0.8mm)看到的是相反的过程^[26].有趣的是,三明治式分离^[8]就是发生在二倍周期和四倍周期之间(参见文献 8 图 3).尽管三明治式分离的物理机理目前尚不十分清楚,但倍周期运动对分离结构是否有影响需要研究.

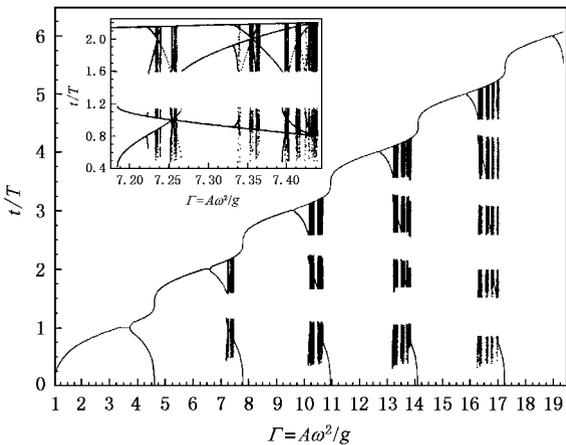


图 5 球飞行时间分岔图 振动频率同图 1,飞行时间已被振动周期 T 约化

类似于文献 25 介绍的现象,在本文的实验中, $\Gamma > 1$ 时出现成堆现象.对流导致颗粒在容器的一侧隆起,并在上表面形成一个斜坡,颗粒斜坡滚下.这种对流的速度随 Γ 的增加而增大,但整体看起来颗粒处于密堆积状态.在 $\Gamma > 2.4$ 时,斜面逐渐变

平,对流形式变为颗粒沿器壁缓慢向下运动.接近二倍周期分岔点时,上表面的几层(2—3层)颗粒的运动明显加剧,变得较疏松.接近四倍周期分岔点时,上层被流化的颗粒层数增多,运动进一步加剧,出现大幅表面波.这种趋势会一直保持下去.不管上层颗粒的运动形式如何变化,底部始终有部分颗粒保持密堆积状态,而且器壁附近的颗粒沿器壁缓慢向下运动.颗粒床底部的这种颗粒聚集态是产生倍周期运动的主要原因.在这个区域内,颗粒的运动几乎是同步的,它整体的上下运动对容器底产生冲击式的压力.减小或增大颗粒层的总厚度,对分岔点的影响不大,但是当厚度减小到接近某个临界值时, Γ_2 会显著增大.图 6 给出在内径为 4.3mm 的玻璃管内,几种金属球的二倍周期分岔点随总颗粒数的变化情况.在这个过程中,只要有聚集态存在,就会有倍周期运动.但是,当厚度小于临界厚度时,聚集态和脉冲信号均消失,体系类似于气态.在较粗的容器(40.0mm)内, Γ_2 的这种增大趋势变得不明显,导致这种现象的物理机理还有待研究.

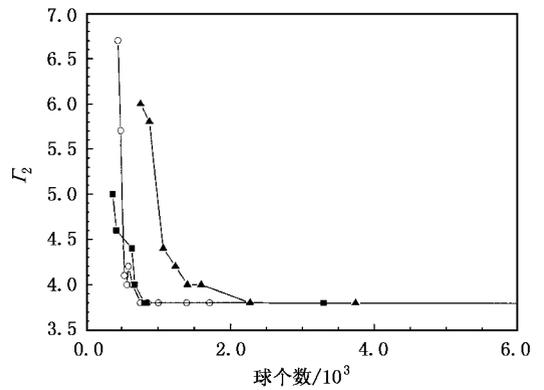


图 6 二倍周期分岔点随颗粒个数的变化 振动频率 $f = 30\text{Hz}$, 玻璃管内径为 4.3mm, 钢球直径为 0.5mm(\square), 0.7mm(\triangle), 1.0mm(\circ)

在本文的实验中,二倍周期分岔和四倍周期分岔在玻璃颗粒层和金属颗粒层中都可以观察到,而且 Γ_2 和 Γ_4 的取值在 30—60Hz 范围内基本不变.但三倍周期分岔只在金属颗粒层中出现,而且 Γ_3 与容器内径有关,例如, ϕ 为 0.5 和 1mm 的钢球,在内径为 14.2 和 18.3mm 的容器内,三倍周期分岔点都在 $\Gamma_3 = 9.22$ 附近,但在 40.0mm 的容器内,对 1mm 的钢球当 Γ_3 接近 10 时才出现,而对 0.5mm 的钢球,在 $\Gamma < 10$ 范围内没有出现三倍周期分岔.产生这种现象的原因可能是容器较粗时,对颗粒的约

束放宽,容易出现更复杂的运动形式,如拱起或多个对流卷等.总之,对振动颗粒层中的整体运动,仍有许多问题有待研究,尤其倍周期分岔与颗粒的密度、尺寸及容器的尺寸等因素的关系.

4. 结 论

对颗粒层与容器底之间冲击力的研究表明,颗粒层底部的聚集态导致颗粒中存在整体的上下运动,从而对容器底产生脉冲式压力.颗粒的整体运

动是倍周期的,且受约化振动加速度 Γ 的控制.对此,完全非弹性蹦球模型能给出较好的描述,但当 Γ 较大时,颗粒的运动速度增加,运动形式更加复杂(如大幅表面波等),完全非弹性蹦球模型变得不够细致.实验中观察到的颗粒冲击力的倍周期分岔不同于 Feigenbaum 型分岔.计算表明倍周期分岔点是普适的,与颗粒的性质无关,但实验证明三倍周期分岔与颗粒的性质及容器的尺寸有关,对此还应作进一步研究.

-
- [1] Evesque P and Rajchenbach J 1988 *Phys. Rev. Lett.* **62** 44
- [2] Pak H K, Van Doorn E and Behringer R P 1995 *Phys. Rev. Lett.* **76** 4643
- [3] Aoki K M, Akiyama T, Maki Y and Watanabe T 1996 *Phys. Rev. E* **54** 874
- [4] Medved M 2002 *Phys. Rev. E* **65** 21305
- [5] Harwood C F 1977 *Powder Tech.* **16** 51
- [6] Rosato A, Strandburg K J, Prinz F and Swendsen R H 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 1038
- [7] Yan X, Shi Q, Hou M, Lu K and Chen C K 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 14302
- [8] Jiang Z H, Lu K Q, Hou M Y, Chen W and Chen X J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2244 (in Chinese) [姜泽辉、陆坤权、厚美瑛、陈 唯、陈相君 2003 物理学报 **52** 2244]
- [9] Melo F, Umbanhowar P B and Swinney H L 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3838
- [10] Duran J 2000 *Sands, Powders, and Grains* (New York: Springer)
- [11] Jaeger H M, Nagel S R and Behringer R P 1996 *Rev. Mod. Phys.* **68** 1259
- [12] de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** S374
- [13] Kadanoff L P 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 435
- [14] Puglisi A, Loreto V, Marconi U M B and Vulpiani A 1999 *Phys. Rev. E* **59** 5582
- [15] Pierański P 1983 *J. Phys.* **44** 573
- [16] Pierański P, Kowalik Z and Franaszek M 1985 *J. Phys.* **46** 681
- [17] Tufillaro N B and Albano A M 1986 *Am. J. Phys.* **54** 939
- [18] Pierański P and Malecki J 1986 *Phys. Rev. E* **34** 582
- [19] Mehta A and Luck J M 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 393
- [20] Luck J M and Mehta A 1993 *Phys. Rev. E* **48** 3988
- [21] Luding S, Clément E, Blumen A, Rajchenbach J and Duran J 1994 *Phys. Rev. E* **49** 1634
- [22] Isobe M 2001 *Phys. Rev. E* **64** 31304
- [23] Mujica N, Caballero L and Melo F 1999 *Physica A* **263** 362
- [24] Mujica N and Melo F 2000 *Phys. Rev. E* **63** 11303
- [25] Wassgren C R, Brennen C E and Hunt M L 1996 *J. Appl. Mech.* **63** 712
- [26] Douady S, Fauve S and Laroche C 1989 *Europhys. Lett.* **8** 621

Phenomena of impact bifurcations in vertically vibrated granular beds^{*}

Jiang Ze-Hui Li Bin Zhao Hai-Fa Wang Yun-Ying Dai Zhi-Bin

(*Department of Applied Physics , Harbin Institute of Technology , Harbin 150001 , China*)

(Received 27 April 2004 ; revised manuscript received 25 June 2004)

Abstract

The pressure of granular mass on container bottom has been experimentally investigated in vertically vibrated granular beds. Pulse signals are found of the pressure, and the pulse strength undergoes subharmonic bifurcations controlled by the scaled vibration acceleration. Condensed state of particles is observed at the bed bottom, in which the particles are closely packed, with small free path, and move like a bulk block.

Keywords : granular materials, chaos, period-doubling bifurcation, inelastic collision

PACC : 4610, 0547, 0520D, 0570J

^{*} Project supported by the Interdisciplinary Fund of Harbin Institute of Technology, China (Grant No. HIT. MD2002.32).