第 54 卷 第 3 期 2005 年 3 月
1000-3290/2005/54(03)/1361-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.54, No.3, March, 2005

介观压电石英晶体等效电路的量子化*

李洪奇

(菏泽学院物理系,菏泽 274015)

(2004 年 5 月 19 日收到;2004 年 8 月 6 日收到修改稿)

借鉴阻尼谐振子作量子力学处理的研究思想,将介观压电石英晶体等效电路量子化,在此基础上研究了真空态和压缩真空态下,各支路电流和电压的量子涨落.

关键词:介观压电石英晶体, 等效电路, 阻尼谐振子, 量子涨落

PACC:7335, 0635

1. 引 言

压电石英晶体,又称石英谐振器,以其高 Q 值 (10^4—10^6)、高频率稳定度(10^{-6}—10^{-11})等优良性能,而被广泛应用于振荡、陷波等各种电子电路中.随着纳米电子学的发展,电路和器件小型化的趋势越来越强烈,当电子的输运尺度达到电子两次非弹性碰撞尺度时,必须考虑器件和电路的量子效应.当前,关于电路及器件量子效应的研究已成为介观物理研究的热点之一.大量文献分别对 LC 电路、串联 RLC 电路、电容耦合电路、电感耦合电路中电荷及电流在各种量子态下的量子涨落进行了广泛的研究[1—26].而对介观石英晶体谐振器量子化的研究尚未见报道,本文借鉴 Peng 对阻尼谐振子作量子力学处理的研究思想[27],提出一种将介观压电石英晶体等效电路的量子化方法,并在此基础上研究电流和电压的量子涨落.

2. 介观压电石英晶体等效电路的量子化

石英晶体谐振器的等效电路如图 1 所示.当晶体不振动时,可以看成一个平行板电容器,C_0 称为静电容,它与晶片几何尺寸和电极面积有关.当晶体振动时,有一个机械振动的惯性,用电感 L 来等效,晶片的弹性以电容 C 来等效.L,C 的具体数值与晶体的切割方式、晶片与电极尺寸、形状有关.晶片振动时,因摩擦而造成的损耗则用电阻 R 来等效.根据基尔霍夫定律,其经典运动方程为

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{1}{C_0}+\frac{1}{C}\right)i=\frac{i_s(t)}{C_0}, \quad (1)$$

式中 i 为电感支路的电流,$i_s(t)$ 为信号源电激流,令 $u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$,则有

$$\dot{i}=\frac{u}{L},\quad \dot{u}=-\frac{R}{L}u-\left(\frac{1}{C_0}+\frac{1}{C}\right)i+\frac{i_s(t)}{C_0}. \quad (2)$$

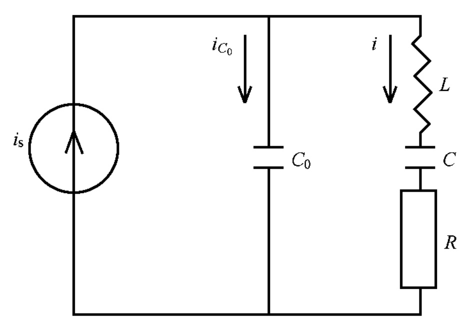

图 1 石英谐振器等效电路图

作量子力学处理时,在海森堡表象中,运动方程(2)的形式不变,但 i 和 u 为非对易量,它们应满足一定的对易关系,即量子化条件,从(2)式可以导出

$$\frac{\partial \dot{i}}{\partial i}+\frac{\partial \dot{u}}{\partial u}=-\frac{R}{L},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[i,u]=-\frac{R}{L}[i,u]. \quad (3)$$

* 山东省自然科学基金(批准号:Y2002A05)资助的课题.

(3)式表明 $R\neq0$ 时,i 和 u 在经典条件下不构成共轭变量,量子化条件必须加以修正,满足下列对易关系:

$$[i,u]=\mathrm{i}\hbar\omega_0^2\mathrm{e}^{-2\lambda t},\tag{4}$$

式中 $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC'}}$为石英晶体的谐振频率,其在等式中的作用是保证等式两端量纲一致,$C'=\frac{C_0C}{C_0+C}$,$\lambda=\frac{R}{2L}$.

按照正则量子化方案,考虑由非正则变量 i 和 u 到正则共轭变量 I 和 U 的如下变换:

$$i=I\omega_0\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad u=\omega_0(U-L\lambda I)\mathrm{e}^{-\lambda t}.\tag{5}$$

由(4)和(5)式容易验证

$$[I,U]=\mathrm{i}\hbar,\tag{6}$$

式中 I 和 U 分别为复正则电流和复正则电压,由(5)式可得

$$\dot I=\frac{U}{L},\quad \dot U=-L\omega^2I+f(t),\tag{7}$$

式中 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$,$f(t)=\frac{i_s(t)}{\omega_0C_0}\mathrm{e}^{\lambda t}$.由(7)式及正则哈密顿方程

$$\dot I=\frac{\partial H}{\partial U},\quad \dot U=-\frac{\partial H}{\partial I},\tag{8}$$

容易得到

$$H=\frac{U^2}{2L}+\frac{1}{2}L\omega^2I^2-f(t)I.\tag{9}$$

引入推广的湮没和产生算符

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{\sqrt{2L\omega\hbar}}(L\omega I+\mathrm{i}U),\\A^+&=\frac{1}{\sqrt{2L\omega\hbar}}(L\omega I-\mathrm{i}U),\end{aligned}\tag{10}$$

由(6)和(10)式,容易验证

$$[A,A^+]=1.\tag{11}$$

相应的哈密顿量为

$$H=\hbar\omega\left(A^+A+\frac{1}{2}\right)-(A+A^+)S(t),\tag{12}$$

式中

$$S(t)=\sqrt{\frac{\hbar}{2L\omega}}f(t).$$

至此,便实现了对介观压电石英晶体等效电路的量子化.

3. 真空态下介观压电石英晶体中电流电压的量子涨落

在接通电路的无限短时间间隔内断开电源,即 $S(t)=0$ 时,研究在真空态$|0\rangle$(定义为 $A|0\rangle=0$)下,电流和电压的量子涨落.

3.1. 电感 L 中电流及两端电压的量子涨落

由(5),(10)和(11)式,可以得到电感支路中的电流、电压的平均值和方均值为

$$\begin{aligned}&\langle0|i|0\rangle=0,\quad\langle0|i^2|0\rangle=\frac{\hbar}{2L\omega}\omega_0^2\mathrm{e}^{-2\lambda t};\\&\langle0|u|0\rangle=0,\quad\langle0|u^2|0\rangle=\frac{L\hbar}{2\omega}\omega_0^4\mathrm{e}^{-2\lambda t}.\end{aligned}\tag{13}$$

由此可以得到电感中电流和两端电压的真空量子涨落为

$$\langle(\Delta i)^2\rangle=\frac{\hbar}{2L\omega}\omega_0^2\mathrm{e}^{-2\lambda t},\quad\langle(\Delta u)^2\rangle=\frac{L\hbar}{2\omega}\omega_0^4\mathrm{e}^{-2\lambda t}.\tag{14}$$

3.2. 损耗电阻 R 上电流电压的量子涨落

从图 1 易见,$u_R=iR$,$i_R=i$.由(14)式易得

$$\langle(\Delta i_R)^2\rangle=\frac{\hbar}{2L\omega}\omega_0^2\mathrm{e}^{-2\lambda t},\quad\langle(\Delta u_R)^2\rangle=\frac{R^2\hbar}{2L\omega}\omega_0^2\mathrm{e}^{-2\lambda t}.\tag{15}$$

3.3. 串联电容 C 中电流及两端电压随时间变化率的量子涨落

从图 1 易见,$i_C=i$,因此有

$$\langle(\Delta i_C)^2\rangle=\frac{\hbar}{2L\omega}\omega_0^2\mathrm{e}^{-2\lambda t}.\tag{16}$$

由 $i_C=\frac{C\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$和 $i_C=i$,可以得到 $\dot u_C=\frac{i}{C}$.因此,有

$$\langle(\Delta\dot u_C)^2\rangle=\frac{\hbar}{2C^2L\omega}\omega_0^2\mathrm{e}^{-2\lambda t}.\tag{17}$$

3.4. 并联电容 C_0 中电流及两端电压随时间变化率的量子涨落

注意到 $i_s(t)=0$,由图 1 得 $i_{C_0}=-i$,即

$$\dot u_{C_0}=-\frac{i}{C_0}.\tag{18}$$

由此,得到并联电容 C_0 中电流及两端电压随时间变化率的量子涨落为

$$\begin{aligned}\langle(\Delta i_{C_0})^2\rangle&=\frac{\hbar}{2L\omega}\omega_0^2\mathrm{e}^{-2\lambda t},\\\langle(\Delta\dot u_{C_0})^2\rangle&=\frac{\hbar}{2C_0^2L\omega}\omega_0^2\mathrm{e}^{-2\lambda t}.\end{aligned}\tag{19}$$

4. 压缩真空态下石英晶体中电流电压的量子涨落

在接通电路的无限短时间间隔内断开电源,即 $S(t)=0$,若假定这时等效电路处于压缩真空态 $|0\rangle_r$,其在粒子数表象中可表示为[28]

$$|0\rangle_r = \mathrm{sech}^{1/2} r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\tanh r)^n [(2n)!]^{1/2}}{n!2^n} |2n\rangle, \tag{20}$$

式中 $r(0\leqslant r<\infty)$ 为压缩因子,θ 为压缩角. 将(10)式代入(20)式,并结合(11)式,可以得到压缩真空态下 I 和 U 的平均值及方均值为

$$\begin{aligned} &{}_r\langle 0|I|0\rangle_r = 0, \quad {}_r\langle 0|I^2|0\rangle_r = \frac{\hbar}{2L\omega}\mathrm{sech} r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[1+4n-2(2n+1)\cos\theta\tanh r](\tanh r)^{2n}[(2n)!]}{[n!]^2 2^{2n}}, \\ &{}_r\langle 0|U|0\rangle_r = 0, \quad {}_r\langle 0|U^2|0\rangle_r = \frac{L\omega\hbar}{2}\mathrm{sech} r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[1+4n+2(2n+1)\cos\theta\tanh r](\tanh r)^{2n}[(2n)!]}{[n!]^2 2^{2n}}. \end{aligned} \tag{21}$$

由此,可以计算压缩真空态下,介观石英晶体内的量子涨落.

4.1. 电感 L 中电流及两端电压的量子涨落

由(5),(10)和(11)式,可以得到电感支路中的电流、电压的平均值和方均值为

$$\begin{aligned} &{}_r\langle 0|i|0\rangle_r = 0, \quad {}_r\langle 0|i^2|0\rangle_r = \frac{\hbar}{2L\omega}\omega_0^2 \mathrm{e}^{-2\lambda t}\Gamma, \\ &{}_r\langle 0|u|0\rangle_r = 0, \quad {}_r\langle 0|u^2|0\rangle_r = \frac{L\hbar}{2\omega}\omega_0^2 \mathrm{e}^{-2\lambda t}\Pi, \end{aligned} \tag{22}$$

式中

$$\Gamma = \mathrm{sech} r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[1+4n-2(2n+1)\cos\theta\tanh r](\tanh r)^{2n}[(2n)!]}{[n!]^2 2^{2n}}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \Pi = \mathrm{sech} r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tanh r)^{2n}[(2n)!]}{[n!]^2 2^{2n}} \{&[1+4n+2(2n+1)\cos\theta\tanh r]\omega^2 \\ &+ [1+4n-2(2n+1)\cos\theta\tanh r]\lambda^2 + 2\omega\lambda 2(2n+1)\tanh r\sin\theta\}. \end{aligned} \tag{24}$$

由此可以得到电感中电流和两端电压的量子涨落为

$$\begin{aligned} &\langle(\Delta i)^2\rangle = \frac{\hbar}{2L\omega}\omega_0^2 \mathrm{e}^{-2\lambda t}\Gamma, \\ &\langle(\Delta u)^2\rangle = \frac{L\hbar}{2\omega}\omega_0^2 \mathrm{e}^{-2\lambda t}\Pi. \end{aligned} \tag{25}$$

4.2. 损耗电阻 R 上电流电压的量子涨落

从图 1 易见,$u_R = iR$,$i_R = i$. 由(22)式易得

$$\begin{aligned} &\langle(\Delta i_R)^2\rangle = \frac{\hbar}{2L\omega}\omega_0^2 \mathrm{e}^{-2\lambda t}\Gamma, \\ &\langle(\Delta u_R)^2\rangle = \frac{R^2\hbar}{2L\omega}\omega_0^2 \mathrm{e}^{-2\lambda t}\Gamma. \end{aligned} \tag{26}$$

4.3. 串联电容 C 中电流及两端电压随时间变化率的量子涨落

从图 1 易见,$i_C = i$,因此有

$$\langle(\Delta i_C)^2\rangle = \frac{\hbar}{2L\omega}\omega_0^2 \mathrm{e}^{-2\lambda t}\Gamma. \tag{27}$$

由 $i_C = \frac{C\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ 和 $i_C = i$,可以得到 $\dot{u}_C = \frac{i}{C}$. 因此,有

$$\langle(\Delta \dot{u}_C)^2\rangle = \frac{\hbar}{2C^2L\omega}\omega_0^2 \mathrm{e}^{-2\lambda t}\Gamma. \tag{28}$$

4.4. 并联电容 C_0 中电流及两端电压随时间变化率的量子涨落

注意到 $i_s(t)=0$,由图 1 得 $i_{C_0} = -i$,即

$$\dot{u}_{C_0} = -\frac{i}{C_0}, \tag{29}$$

由此,得到并联电容 C_0 中电流及两端电压随时间变化率的量子涨落为

$$\begin{aligned} &\langle(\Delta i_{C_0})^2\rangle = \frac{\hbar}{2L\omega}\omega_0^2 \mathrm{e}^{-2\lambda t}\Gamma. \\ &\langle(\Delta \dot{u}_{C_0})^2\rangle = \frac{\hbar}{2C_0^2L\omega}\omega_0^2 \mathrm{e}^{-2\lambda t}\Gamma. \end{aligned} \tag{30}$$

当压缩因子 $r=0$ 时,压缩真空态变为真空态,这时

$$\Gamma = 1,\quad \Pi = \omega^2 + \lambda^2 = \omega_0^2. \tag{31}$$

由此,容易验证(25)—(30)式所示量子涨落和真空态下的结果完全一致.

5. 结束语

本文从经典运动方程出发,借鉴阻尼谐振子作量子力学处理的研究思想,将介观压电石英晶体等效电路量子化,在此基础上研究了真空态和压缩真空态下,各支路电流和电压的量子涨落.结果表明,真空态下,电路中的量子涨落均与电路器件的参数有关,且随时间衰减;压缩真空态下,电路中的量子涨落不仅与电路器件的参数有关,随时间衰减,还与压缩参数 r 及 θ 有关.可通过调节器件的参数来控制电路的量子噪声,这对压电石英晶体在介观电路的设计及应用有一定的参考意义.

[1] Wang J S and Sun C Y 1998 *Int. J. Theor. Phys.* **37** 1213

[2] Yu Z X and Liu Y H 1998 *Int. J. Theor. Phys.* **37** 1217

[3] Liu T K and Zhan M S 2000 *Int. J. Theor. Phys.* **39** 2013

[4] Wang J S, Liu T K and Zhan M S 2000 *Phys. Lett.* A **276** 155

[5] Wang J S and Zhan M S 2000 *Int. J. Theor. Phys.* **39** 2595

[6] Wang J S, Feng J and Zhan M S 2001 *Phys. Lett.* A **281** 341

[7] Fan H Y, Fan Y and Song T Q 2002 *Phys. Lett.* A **305** 222

[8] Ji Y H and Lei M S 2000 *Int. J. Theor. Phys.* **39** 1399

[9] Tong Q S 2003 *Int. J. Theor. Phys.* **42** 793

[10] Yu Z X *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1057 (in Chinese) [于肇贤等 1997 物理学报 **46** 1057]

[11] Yu Z X and Liu Y H 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2007 (in Chinese) [于肇贤、刘业厚 1997 物理学报 **46** 2007]

[12] Wang J S and Sun C Y 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1990 (in Chinese) [王继锁、孙长勇 1997 物理学报 **46** 1990]

[13] Wang J S *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2271 (in Chinese) [王继锁等 2000 物理学报 **49** 2271]

[14] Gu Y J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 965 (in Chinese) [顾勇建 2000 物理学报 **49** 965]

[15] Wang J S *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 299 (in Chinese) [王继锁等 2001 物理学报 **50** 299]

[16] Ji Y H *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 395 (in Chinese) [嵇英华等 2002 物理学报 **51** 395]

[17] Wang Z Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1808 (in Chinese) [王仲清 2002 物理学报 **51** 1808]

[18] Ji Y H *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 468 (in Chinese) [嵇英华等 2003 物理学报 **52** 468]

[19] Liang M B and Yuan B 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 978 (in Chinese) [梁麦兵、袁 兵 2003 物理学报 **52** 978]

[20] Long C Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2033 (in Chinese) [龙超云 2003 物理学报 **52** 2033]

[21] Wang Z C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2870 (in Chinese) [王忠纯 2003 物理学报 **52** 2870]

[22] Ji Y H *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1207 (in Chinese) [嵇英华等 2004 物理学报 **53** 1207]

[23] Zhao X A and He J H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1201 (in Chinese) [赵学安、何军辉 2004 物理学报 **53** 1201]

[24] Wang J S *et al* 2000 *Acta Photon. Sin.* **29** 1084 (in Chinese) [王继锁等 2000 光子学报 **29** 1084]

[25] Han J Y *et al* 2003 *Chin. J. Quantum Electron.* **20** 198 (in Chinese) [韩玖荣等 2003 量子电子学报 **20** 198]

[26] Ma X P and Zhang S 2004 *Chin. J. Quantum Electron.* **21** 43 (in Chinese) [马晓萍、张 寿 2004 量子电子学报 **21** 43]

[27] Peng H W 1980 *Acta Phys. Sin.* **29** 1084 (in Chinese) [彭桓武 1980 物理学报 **29** 1084]

[28] Fan H Y and Go G C 1985 *Acta Opt. Sin.* **5** 804 (in Chinese) [范洪义、郭光灿 1985 光学学报 **5** 804]

Quantization of mesoscopic quartz piezoelectric crystal equivalent circuit*

Li Hong-Qi

(*Department of Physics*, *Heze College*, *Heze* 274015, *China*)

(Received 19 May 2004; revised manuscript received 6 August 2004)

Abstract

By using the idea of damped harmonic oscillator operation, a mesoscopic quartz piezoelectric crystal equivalent circuit is quantized. By this basic theory, we studied the quantum fluctuation of the voltage and current in each branch of the mesoscopic quartz piezoelectric crystal equivalent circuit under the squeezed vacuum state and the vacuum state.

Keywords: mesoscopic quartz piezoelectric crystal, equivalent circuit, damped harmonic oscillator, quantum fluctuation

PACC: 7335, 0635

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. Y2002A05).