第 54 卷 第 4 期 2005 年 4 月
1000-3290/2005/54(04)/1476-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.4, April, 2005

(2+1)维 Boussinesq 方程的 Backlund 变换与精确解

曾 昕 张鸿庆

(大连理工大学应用数学系,大连 116024)

(2004 年 6 月 8 日收到;2004 年 8 月 3 日收到修改稿)

借助于符号计算软件 Maple,对方程的种子解作适当的未知函数替换,然后利用 Backlund 变换通过具体的符号演算获得了(2+1)维 Boussinesq 方程的一系列精确解.这些解包括类孤子解和有理解,其中有的解中含有任意函数,当任意函数取特殊函数时,这些解具有丰富的结构,有些结构可能对物理现象的研究是有意义的.

关键词:(2+1)维 Boussinesq 方程,Backlund 变换,精确解,类孤子解

PACC:0340K,0290

1. 引 言

随着非线性科学研究的发展,非线性发展方程的求解成为广大物理学、力学、地球科学、生命科学、应用数学和工程技术科学工作者研究非线性问题的一个重要内容.多年来,许多数学家和物理学家为此做了大量工作,发现孤立子理论中蕴藏着一系列构造精确解的有效方法,如 Backlund 变换[1,2]、Painleve 展开法[3]、混合指数法[4]、齐次平衡法[5—7]、截断展开法[8]等.最近,Senthilvelan[9] 借助于齐次平衡法研究了(2+1)维 Boussinesq 方程[10]的行波解并且得到方程的某些新解.随后,Chen 等[11]又提出了齐次平衡法一种新的一般转换,获得了(2+1)维 Boussinesq 方程的许多精确解.目前,Backlund 变换已成为研究非线性方程的有力工具,得到了较为广泛的应用.Yan[12] 对该方法进行扩展后得到了一些方程的孤立子解及其他形式的精确解.本文在此基础上,以(2+1)维 Boussinesq 方程

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{xx}^2 - u_{xxxx} = 0 \tag{1}$$

为例进行讨论,对方程的种子解作适当的未知函数替换,然后利用 Backlund 变换通过具体的符号演算获得了(2+1)维 Boussinesq 方程形式比较丰富的精确解.

2. (2+1)维 Boussinesq 方程的精确解

利用 Painleve 截断展开法,我们得到方程(1)如下形式的 Backlund 变换:

$$u = 6[\ln\phi(x,y,t)]_{xx} + u_0, \tag{2}$$

式中 u_0 是方程(1)的一个种子解.

将方程(2)代入方程(1),合并 ϕ 的同次幂,令 $\phi(i=0,\cdots,4)$的系数为零,则得到 ϕ 和 u_0 所满足的方程,即

$$2u_{0x}^2 + u_{0xx} + u_{0xxxx} + u_{0yy} - u_{0tt} + 2u_0u_{0xx} = 0, \tag{3}$$

$$4\phi_{xxx}\phi_x - 3\phi_{xx}^2 + \phi_x^2 + 2\phi_x^2u_0 + \phi_y^2 - \phi_t^2 = 0, \tag{4}$$

$$\phi_{xtt} - 2u_0\phi_{xxxx} - 2\phi_{xx}u_{0xx} - 4\phi_{xxx}u_{0x} - \phi_{xxxx} - \phi_{xxyy} - \phi_{xxxxxx} = 0, \tag{5}$$

$$\phi_{xx}\phi_t^2 - 12u_0\phi_{xx}\phi_x^2 + 3\phi_{xx}^3 - 4\phi_x\phi_{xy}\phi_y + \phi_x^2\phi_{tt} - \phi_{xx}\phi_y^2 - 6\phi_{xx}\phi_x^2 - 4\phi_x^3u_{0x} + 4\phi_x\phi_{xt}\phi_t - 9\phi_{xxxx}\phi_x^2 - \phi_x^2\phi_{yy} = 0, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&-2\phi_{xt}^2 + 2\phi_x\phi_{xyy} - 2\phi_{xxt}\phi_t + 4\phi_{xxx}\phi_x - \phi_{xx}\phi_{tt} + 2\phi_{xxy}\phi_y \\ &+ 6u_0\phi_{xx}^2 + 2\phi_{xy}^2 + 12\phi_{xx}\phi_xu_{0x} + 3\phi_{xx}^2 + 3\phi_{xxxx}\phi_{xx} + 8u_0\phi_{xxx}\phi_x \\ &+ \phi_{xx}\phi_{yy} + 2\phi_x^2u_{0xx} - 2\phi_{xxx}^2 + 6\phi_{xxxxx}\phi_x - 2\phi_x\phi_{xtt} = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

下面我们利用 Backlund 变换(2)式来寻找(2+1)维 Boussinesq 方程(1)的精确解.通常的做法是令种子解为零或常数,但这样就限制了种子解的一般性,也就限制了解的范围.为了得到更多形式的精确解,我们引进未知函数变换,

$$u_0(x,y,t) = f(t)y + g(t), \tag{8}$$

式中 $f(t)$,$g(t)$为 t 的光滑函数.这样设种子解,最

后方程(1)所得到的解不仅包括了一般 Backlund 变换所得到的解,而且还能得到新形式的解.

2.1. 类孤子解

我们应用文献[13—17]的思想去解方程组(3)—(7).设方程组(3)—(7)中的 ϕ 有如下的形式:

$$\phi(x,y,t) = P(y,t) + \exp(\Theta(y,t)x + \psi(y,t)), \tag{9}$$

式中,$P(y,t)\neq 0$,$\Theta(y,t)$,$\psi(y,t)$为 y,t 的待定函数.

把(8)和(9)式代入方程组(3)—(7),我们得到

$$\begin{aligned}&[\Theta^2\Theta_t^2 - \Theta^2\Theta_y^2]x^2e^{\Theta x+\psi}\\&+[4\Theta\Theta_t^2 - 4\Theta\Theta_y^2 + \Theta^2\Theta_{tt}\\&-\Theta^2\Theta_{yy} + 2\Theta^2\Theta_t\psi_t - 2\Theta^2\Theta_y\psi_y]xe^{\Theta x+\psi}\\&+[\Theta^2\psi_{tt} - \Theta^2\psi_{yy} + 2\Theta_t^2 - 2\Theta_y^2\\&+4\Theta\Theta_t\psi_t - 4\Theta\Theta_y\psi_y + 2\Theta\Theta_{tt} - 2\Theta\Theta_{yy}\\&-2\Theta^2(\Theta^2 + \Theta^4 + 2\theta^2(g+fy)\\&+\psi_y^2 - \psi_t^2)]e^{\Theta x+\psi} = 0,\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}&[7\Theta^2\Theta_y^2 - 7\Theta^2\Theta_t^2]x^2e^{2(\Theta x+\psi)}\\&+[14\Theta^2\Theta_y\psi_y - 14\Theta^2\Theta_t\psi_t + 3\Theta^2\Theta_{yy}\\&-3\Theta^2\Theta_{tt} + 12\Theta\Theta_y^2 - 12\Theta\Theta_t^2]xe^{2(\Theta x+\psi)}\\&+[2\Theta^2\Theta_yP_y - 2\Theta^2\Theta_tP_t]xe^{\Theta x+\psi}\\&+[3\Theta^2\psi_{yy} - 3\Theta^2\psi_{tt} + 2\Theta_y^2 - 2\Theta_t^2\\&+12\Theta\Theta_y\psi_y - 12\Theta\Theta_t\psi_t + 2\Theta\Theta_{yy} - 2\Theta\Theta_{tt}\\&+7\Theta^2(\Theta^2 + \Theta^4 + 2\theta^2(g+fy)\\&+\psi_y^2 - \psi_t^2)]e^{2(\Theta x+\psi)}\\&+[2\Theta^2\psi_yP_y - 2\Theta^2\psi_tP_t + \Theta^2P_{yy} - \Theta^2P_{tt}\\&+4\Theta\Theta_yP_y - 4\Theta\Theta_tP_t]e^{\Theta x+\psi} = 0,\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}&[6\Theta^2\Theta_t^2 - 6\Theta^2\Theta_y^2]x^2e^{3(\Theta x+\psi)}\\&+[4\Theta\Theta_t^2 - 4\Theta\Theta_y^2 + 12\Theta^2\Theta_t\psi_t\\&-12\Theta^2\Theta_y\psi_y + \Theta^2\Theta_{tt} - \Theta^2\Theta_{yy}]xe^{3(\Theta x+\psi)}\\&+[6\Theta^2\Theta_tP_t - 6\Theta^2\Theta_yP_y]xe^{2(\Theta x+\psi)}\\&+[\Theta^2\psi_{tt} - \Theta^2\psi_{yy} + 4\Theta\Theta_t\psi_t - 4\Theta\Theta_y\psi_y\\&-6\Theta^2(\Theta^2 + \Theta^4 + 2\theta^2(g+fy) + \psi_y^2 - \psi_t^2)]e^{3(\Theta x+\psi)}\\&+[\Theta^2P_{tt} - \Theta^2P_{yy} + 4\Theta\Theta_tP_t - 4\Theta\Theta_yP_y\\&+6\Theta^2\psi_tP_t - 6\Theta^2\psi_yP_y]e^{2(\Theta x+\psi)}\\&+[\Theta^2P_t^2 - \Theta^2P_y^2]e^{\Theta x+\psi} = 0,\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}&[\Theta_y^2 - \Theta_t^2]x^2e^{2(\Theta x+\psi)} + [2\Theta_y\psi_y - 2\Theta_t\psi_t]xe^{2(\Theta x+\psi)}\\&+[2P_y\Theta_y - 2P_t\Theta_t]xe^{\Theta x+\psi}\\&+[\Theta^2 + \Theta^4 + 2\theta^2(g+fy) + \psi_y^2 - \psi_t^2]e^{2(\Theta x+\psi)}\\&+[2P_y\psi_y - 2P_t\psi_t]e^{\Theta x+\psi} + P_y^2 - P_t^2 = 0,\end{aligned}\tag{13}$$

$$yf_{tt} + g_{tt} = 0. \tag{14}$$

令 $x^2e^{3(\Theta x+\psi)}$,$x^2e^{2(\Theta x+\psi)}$,$x^2e^{\Theta x+\psi}$,$xe^{3(\Theta x+\psi)}$,$xe^{2(\Theta x+\psi)}$,$xe^{\Theta x+\psi}$,$e^{3(\Theta x+\psi)}$,$e^{2(\Theta x+\psi)}$,$e^{\Theta x+\psi}$的系数和常数项为零,得到如下的非线性偏微分方程组:

$$\begin{aligned}&\Theta_t^2 - \Theta_y^2 = 0,\\&P_t^2 - P_y^2 = 0,\\&\Theta_{tt} - \Theta_{yy} = 0,\\&P_{tt} - P_{yy} = 0,\\&\psi_{tt} - \psi_{yy} = 0,\\&\Theta_tP_t - \Theta_yP_y = 0,\\&\psi_tP_t - \psi_yP_y = 0,\\&\Theta_t\psi_t - \Theta_y\psi_y = 0,\\&yf_{tt} + g_{tt} = 0,\\&\Theta^2 + \Theta^4 + 2\theta^2(g+fy) + \psi_y^2 - \psi_t^2 = 0.\end{aligned}\tag{15}$$

因此可得两种类孤子解.

1)当 $P(y,t)>0$ 时,可得方程(1)的钟型孤波解,

$$\begin{aligned}u_1 &= 6\frac{\Theta^2(y,t)P(y,t)\exp(\Theta(y,t)x + \psi(y,t))}{(P(y,t) + \exp(\Theta(y,t)x + \psi(y,t)))^2}\\&= \frac{3}{2}\Theta^2(y,t)\operatorname{sech}^2\left(\frac{\Theta(y,t)x + \psi(y,t) - \ln P(y,t)}{2}\right)\\&\quad + f(t)y + g(t).\end{aligned}\tag{16a}$$

2)当 $P(y,t)<0$ 时,可得方程(1)的奇性孤子解,

$$\begin{aligned}u_2 &= \frac{3}{2}\Theta^2(y,t)\\&\quad\times\cosh^2\left(\frac{\Theta(y,t)x + \psi(y,t) - \ln|P(y,t)|}{2}\right)\\&\quad + f(t)y + g(t).\end{aligned}\tag{16b}$$

这里 $P(y,t)$,$\Theta(y,t)$,$\psi(y,t)$,$f(t)$,$g(t)$由方程组(15)决定.

下面,借助于符号计算软件 Maple 求解方程组(15).

情形 1

$$\begin{aligned}P &= c_1(t-y) + c_2,\\\Theta &= \sqrt{2c_4(t-y) + 2c_3},\\\psi &= F(t-y),\\f &= c_4,\\g &= -c_4t - c_3 - \frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{17}$$

情形 2

$$P = c_1(t-y)+c_2,$$
$$\Theta = c_3,$$
$$\psi = F(t-y),$$
$$f = 0,$$
$$g = -\frac{c_3^2}{2}-\frac{1}{2}. \tag{18}$$

情形 3

$$P = c_1,$$
$$\Theta = c_2,$$
$$\psi = \frac{c_6}{2}(t+y)^2+c_3y+c_4t+c_5,$$
$$f = \frac{c_6(c_4-c_3)}{c_2^2},$$
$$g = \frac{c_6(c_4-c_3)}{c_2^2}t+\frac{c_4^2-c_3^2}{2c_2^2}-\frac{c_2^2}{2}-\frac{1}{2}. \tag{19}$$

情形 4

$$P = c_1,$$
$$\Theta = c_2,$$
$$\psi = c_3(t-y)+c_4,$$
$$f = 0,$$
$$g = -\frac{c_2^2}{2}-\frac{1}{2}. \tag{20}$$

情形 5

$$P = c_1,$$
$$\Theta = c_2,$$
$$\psi = c_3y+c_4,$$
$$f = 0,$$
$$g = -\frac{c_3^2}{2c_2^2}-\frac{c_2^2}{2}-\frac{1}{2}. \tag{21}$$

(17)—(21)式中,$c_i(i=1,2,\cdots,6)$是常数,$F(t-y)$是 y,t 的任意函数.

相应地,我们可以得到(2+1)维 Boussinesq 方程(1)的类孤子解.

1)当 $P(y,t)>0$ 时,方程(1)有下列解.

情形 1

$$u_{11} = 3(c_4(t-y)+c_3)\mathrm{sech}^2(\xi) + c_4(y-t)-c_3-\frac{1}{2}, \tag{22}$$

式中

$$\xi = \frac{\sqrt{2c_4(t-y)+2c_3}\,x+F(t-y)-\ln(c_1(t-y)+c_2)}{2}.$$

情形 2

$$u_{12} = \frac{3c_3^2}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{c_3x+F(t-y)-\ln(c_1(t-y)+c_2)}{2}\right)-\frac{c_3^2}{2}-\frac{1}{2}. \tag{23}$$

情形 3

$$u_{13} = \frac{3c_2^2}{2}\mathrm{sech}^2(\xi)+\frac{c_6(c_4-c_3)}{c_2^2}(y+t)+\frac{c_4^2-c_3^2}{2c_2^2}-\frac{c_2^2}{2}-\frac{1}{2}, \tag{24}$$

式中

$$\xi = \frac{c_6(t+y)^2}{4}+\frac{c_2x+c_3y+c_4t+c_5-\ln(c_1)}{2}.$$

情形 4

$$u_{14} = \frac{3c_2^2}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{c_2x+c_3(t-y)+c_4-\ln(c_1)}{2}\right)-\frac{c_2^2}{2}-\frac{1}{2}. \tag{25}$$

情形 5

$$u_{15} = \frac{3c_2^2}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{c_2x+c_3y+c_4-\ln(c_1)}{2}\right)-\frac{c_3^2}{2c_2^2}-\frac{c_2^2}{2}-\frac{1}{2}. \tag{26}$$

2)当 $P(y,t)<0$ 时,方程(1)有下列解.

情形 1

$$u_{11} = 3(c_4(t-y)+c_3)\cosh^2(\xi)+c_4(y-t)-c_3-\frac{1}{2}, \tag{27}$$

式中

$$\xi = \frac{\sqrt{2c_4(t-y)+2c_3}\,x+F(t-y)-\ln|c_1(t-y)+c_2|}{2}.$$

情形 2

$$u_{12}=\frac{3c_3^2}{2}\cosh^2\left(\frac{c_3x+F(t-y)-\ln|c_1(t-y)+c_2|}{2}\right)-\frac{c_3^2}{2}-\frac{1}{2}.\tag{28}$$

情形 3

$$u_{13}=\frac{3c_2^2}{2}\cosh^2(\xi)+\frac{c_6(c_4-c_3)}{c_2^2}(y+t)+\frac{c_4^2-c_3^2}{2c_2^2}-\frac{c_2^2}{2}-\frac{1}{2},\tag{29}$$

式中

$$\xi=\frac{c_6(t+y)^2}{4}+\frac{c_2x+c_3y+c_4t+c_5-\ln|c_1|}{2}.$$

情形 4

$$u_{14}=\frac{3c_2^2}{2}\cosh^2\left(\frac{c_2x+c_3(t-y)+c_4-\ln|c_1|}{2}\right)-\frac{c_2^2}{2}-\frac{1}{2}.\tag{30}$$

情形 5

$$u_{15}=\frac{3c_2^2}{2}\cosh^2\left(\frac{c_2x+c_3y+c_4-\ln|c_1|}{2}\right)-\frac{c_3^2}{2c_2^2}-\frac{c_2^2}{2}-\frac{1}{2}.\tag{31}$$

2.2. 有理解

设方程组(3)—(7)中的 ϕ 有如下形式:

$$\phi(x,y,t)=M(y,t)x+N(y,t),\tag{32}$$

式中,$M(y,t)\neq 0$,$N(y,t)$为 y,t 的待定函数.把(8)和(32)式代入方程组(3)—(7),得到方程组

$$\begin{aligned}&M_t^2-M_y^2=0,\\&M_{tt}-M_{yy}=0,\\&N_{tt}-N_{yy}=0,\\&M_tN_t-M_yN_y=0,\\&yf_{tt}+g_{tt}=0,\\&M^2+2M^2(g+fy)+N_y^2-N_t^2=0.\end{aligned}\tag{33}$$

借助符号计算软件 Maple,解方程组(33).

情形 1

$$\begin{aligned}&M=c_1(t-y)+c_2,\\&N=F(t-y),\\&f=0,\\&g=-\frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{34}$$

情形 2

$$\begin{aligned}&M=c_1,\\&N=\frac{c_5}{2}(t+y)^2+c_2y+c_3t+c_4,\\&f=-\frac{c_5(c_2-c_3)}{c_1^2},\\&g=-\frac{c_5(c_2-c_3)}{c_1^2}t+\frac{c_3^2-c_2^2}{2c_1^2}-\frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{35}$$

情形 3

$$\begin{aligned}&M=c_3,\\&N=c_1(t-y)+c_2,\\&f=0,\\&g=-\frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{36}$$

情形 4

$$\begin{aligned}&M=c_1,\\&N=c_2y+c_3,\\&f=0,\\&g=-\frac{c_2^2}{2c_1^2}-\frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{37}$$

(34)—(37)式中,c_i $(i=1,2,\cdots,5)$是常数,$F(t-y)$是 y,t 的任意函数.

相应地,我们可以得到(2+1)维 Boussinesq 方程(1)的有理解.

情形 1

$$u_{21}=-\frac{6(c_1(t-y)+c_2)^2}{((c_1(t-y)+c_2)x+F(t-y))^2}-\frac{1}{2}.\tag{38}$$

情形 2

$$u_{22}=-\frac{24c_1^2}{(2(c_1x+c_2y+c_3t+c_4)+c_5(t+y)^2)^2}-\frac{c_5(c_2-c_3)}{c_1^2}(t+y)+\frac{c_3^2-c_2^2}{2c_1^2}-\frac{1}{2}.\tag{39}$$

情形 3

$$u_{23}=-\frac{6c_3^2}{(c_3x+c_1(t-y)+c_2)^2}-\frac{1}{2}.\tag{40}$$

情形 4

$$u_{24} = -\frac{6c_1^2}{(c_1x + c_2y + c_3)^2} - \frac{c_2^2}{2c_1^2} - \frac{1}{2}. \quad (41)$$

3. 结 论

本文借助于符号计算软件 Maple 及 Backlund 变换,对方程的种子解作适当的未知函数替换,应用文献[13—17]的思想通过具体的符号演算获得了(2+1)维 Boussinesq 方程的一系列精确解.有些解中含有任意函数 $F(t-y)$,因此这些解具有丰富的结构,有些结构可能对物理现象的研究是有意义的.但是方程的初始解如何选择最适当的未知函数替换值得我们进一步研究.

[1] Lamb G L Jr 1980 *Elements of Soliton Theory* (NewYork :Wiley)

[2] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chaos Solitons and Fractals* **17** 693 ;Chen Y, Yan Z Y, Zhang H Q 2002 *Theor. Math. Phys.* **132** 970 ;Li B, Chen Y, Zhang H Q 2002 *Phys. Lett.* A **305** 377

[3] Lou S Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1937 (in Chinses) [楼森岳 1998 物理学报 **47** 1937]

[4] Xu G Q, Li Z B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 946 (in Chinese) [徐桂琼、李志斌 2002 物理学报 **51** 946]

[5] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[6] Fan E G, Zhang H Q 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1254 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1997 物理学报 **46** 1254]

[7] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[8] Zhang J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1648 (in Chinses) [张解放 2001 物理学报 **50** 1648]

[9] Senthilvelan M 2001 *Comput. Math. Appl.* **123** 381

[10] Allen M A, Rowlands G 1997 *Phys. Lett.* A **235** 145

[11] Chen Y, Yan Z Y, Zhang H Q 2003 *Phys. Lett.* A **307** 107

[12] Yan Z Y 2003 *Phys. Lett.* A **318** 78

[13] Yan Z Y, Zhang H Q 2002 *Comput. Math. Appl.* **44** 1439

[14] Yan Z Y 2003 *Czech. J. Phys.* **53** 89

[15] Tian B, Gao Y T 1996 *J. Phys. A* **29** 2895

[16] Yan Z Y, Zhang H Q 2001 *J. Phys. A* **34** 1785

[17] Yan Z Y 2002 *J. Phys. A* **35** 9923

Backlund transformation and exact solutions for (2 + 1)-dimensional Boussinesq equation

Zeng Xin Zhang Hong-Qing

(*Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *China*)

(Received 8 June 2004; revised manuscript received 3 August 2004)

Abstract

With the aid of the symbolic computation softwares Maple, we solve the (2 + 1)-dimensional Boussinesq equation by doing proper unknown functions ansatz of the seed solutions of the equation and performing mathematical calculations to obtain a series of exact solutions, which contain soliton-like solutions and rational solutions. Some exact solutions include arbitrary functions, when these arbitrary functions are taken as some special functions, these solutions possess abundant structures.

Keywords: (2 + 1)-dimensional Boussinesq equation, Backlund transformation, exact solutions, soliton-like solutions

PACC: 0340K, 0290