第 54 卷 第 4 期 2005 年 4 月
1000-3290/2005/54(04)/1481-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.4, April, 2005

非线性 Klein-Gordon 方程新的精确解

韩兆秀

(浙江工商大学统计与计算科学学院,杭州 310035)

(2004 年 6 月 8 日收到;2004 年 10 月 27 日收到修改稿)

将行波变换替换为更一般的函数变换,推广了修正的 Jacobi 椭圆函数展开方法.给出了非线性 Klein-Gordon 方程新的周期解.当模 $m\to1$ 或 $m\to0$ 时,这些解退化成相应的孤立波解、三角函数解和奇异的行波解.对于某些非线性方程,在一定条件下一般变换退化为行波约化.

关键词:Jacobi 椭圆函数, 非线性发展方程, 精确解

PACC:0340K, 0290

1. 引　　言

求解非线性发展方程的精确解在非线性问题的研究中有着非常重要的地位.在求解非线性发展方程的周期解方面,由于数学计算软件(Mathematica, Matlab, Maple 等)的不断发展和完善,人们提出了各种机械化的方法.如:Wang[1,2] 等给出了齐次平衡法;Porubov 等[3,4] 引入的 Weierstrass 椭圆函数展开法;刘式适等[5—8] 提出的 Jacobi 椭圆函数展开法;张善卿等[9] 利用秩的概念,推广了 Jacobi 椭圆函数展开法的应用范围;之后,Shen 等[10,11] 给出了修正的 Jacobi 椭圆函数展开法,从而得到更多的精确周期解.然而,这些方法主要是在行波变换 $\xi = k(x - ct)$ 下进行的.文献[12]将行波变换下的 Jacobi 椭圆函数展开法推广到范围更广泛的一般变换 $\xi = h(x, t)$ 下进行,获得了一些非线性发展方程的精确周期解.本文利用文献[12]的思想,提出了一般变换下修正的 Jacobi 椭圆函数展开方法,以非线性 Klein-Gordon 方程为例,得到了新的周期解.当模 $m\to1$ 或 $m\to0$ 时,这些解退化成相应的孤立波解、三角函数解和奇异的行波解.另外,对于某些非线性方程,在一定条件下一般变换退化为行波约化.

2. 一般函数变换下修正的 Jacobi 椭圆函数展开法

考虑非线性发展方程的一般形式为

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \cdots) = 0, \tag{1}$$

在变换

$$u(x, t) = u(\xi),\quad \xi = h(x, t) \tag{2}$$

下,(1)式约化为如下的微分方程:

$$F(u, u', u'', \cdots, h_t, h_x, h_{tt}, h_{xt}, h_{xx}, \cdots) = 0, \tag{3}$$

式中 u' 表示 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi$.我们寻求(3)式的周期解.

本文的方法是首先将 $u(\xi)$ 展开为如下双函数形式的 Jacobi 椭圆函数解

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{sn}^{i-1}(\xi)(a_i \mathrm{sn}(\xi) + b_i \mathrm{cn}(\xi)). \tag{4}$$

这里的 n 可以由平衡线性最高阶导数项和非线性项的阶数得到.把(4)式代入约化后的方程(3)中,利用 Jacobi 椭圆函数之间的平方和导数关系,合并同幂次项并取系数为零,得到一个关于 a_0, a_i, b_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 和 $h(x, t)$ 及各阶导数的超定方程组,由此便可确定 a_0, a_i, b_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 和 $h(x, t)$,从而得到方程的一类新的精确解.

假设具有形如(4)式的解,可知我们的方法推广了文献[12]提出的一般变换下的单函数形式的 Jacobi 椭圆函数展开法.考虑到 Shen 等在文献[10]中提出的变换,

$$\mathrm{sn}\xi \to \frac{\mathrm{ns}\xi}{m},\quad \mathrm{cn}\xi \to \frac{\mathrm{i}\cdot\mathrm{ds}\xi}{m},\quad \mathrm{dn}\xi \to \mathrm{i}\cdot\mathrm{cs}\xi, \tag{5}$$

以及恒等式

$$m^{-1}\mathrm{sn}(m\xi \mid m^{-1}) = \mathrm{sn}(\xi \mid m),$$

$$\mathrm{dn}(m\xi \mid m^{-1}) = \mathrm{cn}(\xi \mid m), \tag{6}$$

在一般变换下依然有效,亦即我们推广了修正的 Jacobi 椭圆函数展开法,当模 $m\to 1$ 或 $m\to 0$ 时,这些解退化成相应的孤立波解、三角函数解和奇异的行波解.

3. 非线性 Klein-Gordon 方程

考虑如下形式的非线性 Klein-Gordon 方程:

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} + \alpha u - \beta u^3 = 0. \tag{7}$$

该方程是文献[5]中的第(50)式,并且作者得到了行波约化下的单函数形式的 Jacobi 椭圆函数周期解.

将(4)式代入(7)式,得

$$\xi_t^2 u'' + \xi_{tt} u' - c_0^2(\xi_x^2 u'' + \xi_{xx} u') + \alpha u - \beta u^3 = 0. \tag{8}$$

根据 u'' 与 u^3 的阶数相平衡,得 $n = 1$,即方程(7)具有如下形式的周期解:

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \mathrm{sn}(\xi) + b_1 \mathrm{cn}(\xi). \tag{9}$$

将(9)式代入(8)式,得

$$\begin{aligned}
&(a - a_0^2 b - 3bb_1^2)a_0 + (a - 3a_0^2 b - 3bb_1^2 \\
&- (1+m^2)\xi_t^2 + (1+m^2)c_0^2\xi_x^2)a_1 \mathrm{sn}\xi \\
&+ (a - 3a_0^2 b - bb_1^2 - \xi_t^2 + c_0^2\xi_x^2)b_1 \mathrm{cn}\xi \\
&- 3(a_1^2 - b_1^2)a_0 b\,\mathrm{sn}^2\xi + 6a_0 a_1 bb_1 \mathrm{sn}\xi\mathrm{cn}\xi \\
&- (h_{tt} - c_0^2 h_{xx})b_1 \mathrm{sn}\xi\mathrm{dn}\xi + (h_{tt} - c_0^2 h_{xx})a_1 \mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi \\
&+ (-a_1^2 b + 3bb_1^2 + 2m^2\xi_t^2 - 2c_0^2 m^2\xi_x^2)a_1 \mathrm{sn}^3\xi \\
&+ (-3a_1^2 b + bb_1^2 + 2m^2\xi_t^2 \\
&- 2c_0^2 m^2\xi_x^2)b_1 \mathrm{sn}^2\xi\mathrm{cn}\xi = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

令各 Jacobi 椭圆函数的线性无关项为零,得一超定方程组.借助 Mathematica 软件,求解此方程组.

情形 1

$$\begin{aligned}
&a_0 = b_1 = 0, \\
&a_1 = \pm\sqrt{\frac{2a}{(1+m^2)b}}\cdot m, \\
&\xi_{tt} - c_0^2\xi_{xx} = 0, \\
&a - (1+m^2)(\xi_t^2 - c_0^2\xi_x^2) = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

情形 2

$$\begin{aligned}
&a_0 = a_1 = 0, \\
&b_1 = \pm\sqrt{\frac{2a}{(2m^2-1)b}}\cdot m, \\
&\xi_{tt} - c_0^2\xi_{xx} = 0, \\
&a - (2m^2-1)(\xi_t^2 - c_0^2\xi_x^2) = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

情形 3

$$\begin{aligned}
&a_0 = 0, \\
&b_1 = \pm \mathrm{i} a_1, \\
&a_1 = \pm\sqrt{\frac{a}{(2-m^2)b}}\cdot m, \\
&\xi_{tt} - c_0^2\xi_{xx} = 0, \\
&2a + (2-m^2)(\xi_t^2 - c_0^2\xi_x^2) = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

从而我们得到非线性 Klein-Gordon 方程(7)的三类精确解 u_1, u_2, u_3.

$$\begin{aligned}
u_1 = \pm\sqrt{\frac{2a}{(1+m^2)b}}\cdot m\cdot \mathrm{sn}[\Phi_1(x + c_0 t) \\
+ \Phi_2(x - c_0 t)],
\end{aligned} \tag{14}$$

其中,Φ_1,Φ_2 为任意二阶可微函数,满足的限制条件为

$$\Phi_1'\Phi_2' = \frac{a}{4c_0^2(1+m^2)}. \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
u_2 = \pm\sqrt{\frac{2a}{(2m^2-1)b}}\cdot m\cdot \mathrm{cn}[\Phi_1(x + c_0 t) \\
+ \Phi_2(x - c_0 t)],
\end{aligned} \tag{16}$$

其中,Φ_1,Φ_2 为任意二阶可微函数,满足的限制条件为

$$\Phi_1'\Phi_2' = \frac{a}{4c_0^2(2m^2-1)}. \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
u_3 = \pm\sqrt{\frac{a}{(2-m^2)b}}\cdot m\cdot(\mathrm{sn}[\Phi_1(x + c_0 t) \\
+ \Phi_2(x - c_0 t)] \pm \mathrm{i}\,\mathrm{cn}[\Phi_1(x + c_0 t) \\
+ \Phi_2(x - c_0 t)]),
\end{aligned} \tag{18}$$

其中,Φ_1,Φ_2 为任意二阶可微函数,满足的限制条件为

$$\Phi_1'\Phi_2' = \frac{a}{2c_0^2(m^2-2)}. \tag{19}$$

利用变换(5)及(6)式,我们可以得到另外几组新的解.

$$\begin{aligned}
u_1' = \pm\sqrt{\frac{2a}{(1+m^2)b}}\cdot \mathrm{ns}[\Phi_1(x + c_0 t) \\
+ \Phi_2(x - c_0 t)],
\end{aligned} \tag{20}$$

其中,Φ_1,Φ_2 为任意二阶可微函数,满足限制条件(15)式.

$$\begin{aligned}
u_2' = \pm\sqrt{\frac{2a}{(2-m^2)b}}\cdot \mathrm{dn}[\Phi_1(x + c_0 t) \\
+ \Phi_2(x - c_0 t)],
\end{aligned} \tag{21}$$

其中,Φ_1,Φ_2 为任意二阶可微函数,满足的限制条件为

$$\Phi_1'\Phi_2' = \frac{a}{4c_0^2(2-m^2)}. \tag{22}$$

$$u_3' = \pm\sqrt{\frac{a}{(2-m^2)b}}\big(\mathrm{ns}[\Phi_1(x+c_0t) + \Phi_2(x-c_0t)] \pm \mathrm{ds}[\Phi_1(x+c_0t) + \Phi_2(x-c_0t)]\big), \tag{23}$$

其中,Φ_1,Φ_2 为任意二阶可微函数,满足的限制条件为(19)式.

这里,(16),(20),(21),(23)式是得到新的实精确解,其中(23)式是双函数形式的精确解.考虑到(18)式是复数解,故略去.

4. 结　论

本文将行波变换下修正的 Jacobi 椭圆函数展开法推广到范围非常广泛的一般函数变换下进行.不但能够得到各种单函数形式的 Jacobi 椭圆函数级数解,而且能得到双函数形式的级数解(如解(23)式).以非线性 Klein-Gordon 方程为例,得到了新的周期解,当模 $m\to1$ 或 $m\to0$ 时,这些解退化成相应的孤立波解、三角函数解和奇异的行波解.本文提出的方法是一种直接的、机械化的算法,具有一定的普遍性,可以用来求解更多的非线性发展方程或方程组,如文献[13—17]中所涉及的方程或方程组.

另外,对于某些非线性发展方程(组),采用一般变换的精确解的假设式(4)得到的只能是行波约化的情况.例如,对于文献[12]中如下形式的 mKdV 方程:

$$u_t + au^2u_x + \beta u_{xxx} = 0,$$

假设式(4)中的一般变换 $\xi = h(x,t)$ 最终为 $\xi = h(x,t) = k(x-ct)$.限于篇幅,求解的过程从略.

[1] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[2] Wang M L 1996 *Phys. Lett.* A **213** 279

[3] Porubov A V 1996 *Phys. Lett.* A **221** 391

[4] Porubov A V *et al* 1999 *J. Math. Phys.* **40** 884

[5] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068(in Chinese)[刘式适、付遵涛、刘式达等 2001 物理学报 **50** 2068]

[6] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10(in Chinese)[刘式适、付遵涛、刘式达等 2002 物理学报 **51** 10]

[7] Liu S D, Fu Z T, Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718(in Chinese)[刘式达、付遵涛、刘式适等 2002 物理学报 **51** 718]

[8] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1923(in Chinese)[刘式适、傅遵涛、刘式达等 2002 物理学报 **51** 1923]

[9] Zhang S Q, Li Z B 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1066 (in Chinese)[张善卿、李志斌 2003 物理学报 **52** 1066]

[10] Shen S F, Pan Z L 2003 *Phys. Lett.* A **308** 143

[11] Shen S F, Pan Z L, Zhang J *et al* 2004 *Phys. Lett.* A **325** 226

[12] Liu G T, Fan T Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 676(in Chinese)[刘官厅、范天佑 2004 物理学报 **53** 676]

[13] Zhang J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1648(in Chinese)[张解放 2001 物理学报 **50** 1648]

[14] Chen S L, Hou W G 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1842(in Chinese)[陈松林、侯为根 2001 物理学报 **50** 1842]

[15] Zhang S Q, Li Z B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2197(in Chinese)[张善卿、李志斌 2002 物理学报 **51** 2197]

[16] Li D S, Zhang H Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1569(in Chinese)[李德生、张鸿庆 2003 物理学报 **52** 1569]

[17] Zhao C H, Shen Z M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1629(in Chinese)[赵长海、盛正卯 2004 物理学报 **53** 1629]

New exact solutions for nonlinear Klein-Gordon equations

Han Zhao-Xiu

(*College of Statistics and Computing Science*, *Zhejiang Gongshang University*, *Hangzhou* 310035, *China*)

(Received 8 June 2004; revised manuscript received 27 October 2004)

Abstract

Using the travelling wave transformation instead of the more general function transformation, the modified Jacobi elliptic function expansion method is improved. Some new periodic solutions of nolinear Klein-Gordon equation are obtained using this method. When modulus $m\rightarrow 1$ or $m\rightarrow 0$, these periodic solutions degenerate to the corresponding solitary wave solutions, trigonometric function solutions or irregular travelling wave solutions. For some nonlinear equations, the general transformation would degenerate to the travelling wave reduction under certain conditions.

Keywords: Jacobi elliptic function, nonlinear evolution equation, exact solution

PACC: 0340K, 0290