第 54 卷 第 4 期 2005 年 4 月
1000-3290/2005/54(04)/1500-10

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.4,April,2005

用三角波序列产生三维多涡卷混沌吸引子的电路实验*

禹思敏

(广东工业大学自动化学院,广州 510090)

(2004 年 8 月 11 日收到;2004 年 11 月 26 日收到修改稿)

提出用三角波序列产生三维多涡卷混沌吸引子的新方法.分析了用三角波序列构造多涡卷系统的混沌动力学特性,设计了硬件实验电路,进行了相关的电路实验研究.该混沌电路由积分器 N_1、三角波序列发生器 N_2,N_3,N_4 和联动转换开关 K 共 3 个部分构成,主要特点是三角波序列的幅度、宽度、平衡点、转折点、斜率等参数可调,从而能产生大小和形状可调的多涡卷.此外,通过联动开关 K 的转换可控制涡卷的数量.硬件电路实验研究结果表明,基于所构造的一类三角波序列参数可调的特性,能在实际电路中产生涡卷数量多达 21 个的三维混沌信号.最后给出了通过硬件电路实验产生三维 21 涡卷混沌吸引子的新结果.

关键词:三维多涡卷混沌吸引子,三维多涡卷混沌电路,三角波序列,电路实验

PACC:0545

1.引 言

利用电路实验和计算机模拟来研究和观察混沌现象的历史可追溯至 20 世纪 80 年代初期.1983 年,美国科学家蔡少棠提出了蔡氏电路,成为了理论和实验研究混沌现象的一个范例[1].近 20 年来,国内外在这一领域的研究已取得了许多相关的成果,并提出了能产生混沌与超混沌吸引子的多种方法[2—17].更为重要的是,人们还进一步研究了多涡卷混沌吸引子的产生问题,提出了用分段线性函数、阶梯波、正弦函数和时滞函数等各种方法来产生多涡卷混沌吸引子[18—32].需要指出的是,近年来在硬件电路中产生多涡卷混沌吸引子的实验研究也取得了许多新的进展.例如,Yalcin 等[23]率先通过电路实验,提出用分段线性函数的方法,在蔡氏电路中获取了 3—5 涡卷混沌吸引子的实验结果.Tang 等[24]报道了用正弦函数产生 6—9 涡卷混沌吸引子的实验结果,文献[25,26]则报道了利用分段线性函数,能在蔡氏电路中产生涡卷的数量已多达 10,11 个.Han 等[27]还研究了用时滞序列在二阶电路中产生 9 涡卷混沌吸引子的问题.值得一提的是,Yalcin 等[28]进一步提出了用阶梯波序列来产生一维、二维和三维多涡卷混沌吸引子,并在实际电路中获取了三维多涡卷的数量已达 9 个,是该研究领域中的最新成果之一.

需要进一步考虑的问题是,能否通过某种方法使得实际混沌电路能产生数量更多的涡卷?这是一个值得深入探讨的问题,需要从理论和电路实验两方面,尤其是从技术实现的角度来加以考虑.从原理上,利用计算机模拟出具有 10 以上涡卷的混沌吸引子不会有大的问题.但从实际电路实现的角度看,有源器件如运算放大器高精度的运算动态范围一般是较为有限的[20,25,29].在输入信号的动态范围变化较小的情况下,运算放大器的输出与输入之间能保持较高精度的运算关系.但在输入信号的动态范围变化较大的情况下,器件输出信号与输入信号之间的运算精度降低、误差增大,再加之各个运算放大器以及电路中其他元器件(如电阻、电容等)参数的离散性,使得实际运算放大器在输入信号的动态范围变化较大时,输出与输入之间较为精确的数学运算关系难以得到保证.这可能是目前很少有文献报道通

* 广东省自然科学基金(批准号:032469)和广州市科技计划项目(批准号:2004J1-C0291)资助的课题.

过电路实验产生具有 10 个以上涡卷混沌吸引子的一个主要原因[26].

为了能够解决在实际混沌电路中产生更多涡卷数量这个问题,本文提出用三角波序列来产生三维多涡卷混沌吸引子.与文献[28]所提出的阶梯波相比,本文所构造的三角波序列具有下述两个主要特点:(1)三角波比阶梯波的光滑程度以及连续性要好,在平衡点处存在两类不同的鞍点,因而在产生混沌的机理方面与阶梯波是不同的;(2)三角波序列的幅度、宽度、平衡点、转折点、斜率等参数可调,具有更大的灵活性.因此,可通过合理地构造三角波序列的数学形式,以及适当地选取三角波序列的幅度、平衡点和转折点值来减小积分器输入信号的动态范围,以此为基础来设计电路并确定电路中各个元件的参数,从而能产生数量更多的涡卷.这一方法已被电路实验结果所证实.

2.用三角波构造一维多涡卷系统的混沌动力学特性

研究分析用三角波构造一维多涡卷系统的混沌动力学特性,包括三角波转折点变化时的分岔与混沌特性、三角波参数值变化时对混沌系统特性的影响以及系统在平衡点处的混沌动力学行为,这些对于用三角波产生三维多涡卷混沌吸引子是十分必要的.

2.1. 三角波转折点变化时系统的分岔与混沌特性

在文献[28]的基础上,首先研究一种用三角波构成的一维多涡卷混沌系统,其状态方程可表示为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} &= y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} &= z,\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} &= -\eta y-\beta z+\gamma F_1(x),\end{aligned}\tag{1}$$

式中 $\eta=\beta=\gamma=0.75$. $F_1(x)$为三角波函数,其数学表达式为

$$F_1(x)=\sum_{\substack{m=-M\\ m\neq 0}}^{M}\frac{A}{2\alpha_m}\left\{\left|\left(x-A\left(2m-\frac{|m|}{m}\right)\right)+\alpha_m\right|-\left|\left(x-A\left(2m-\frac{|m|}{m}\right)\right)-\alpha_m\right|\right\}-x,\tag{2}$$

式中,$A>0$ 和 $\alpha_m\in(0,A]$ ($m=\pm1,\pm2,\cdots,\pm M$)称为三角波的变参数,α_m 又称三角波的相对转折点值,M 为正整数.利用(1),(2)式,可产生一维 $2M+1$ 涡卷混沌吸引子.

令 $M=1$,$\alpha=\alpha_{\pm1}\in(0,A]$,可得三角波函数 $F_1(x)$与变量 x、变参数 A 和 α 的关系如图 1 所示.

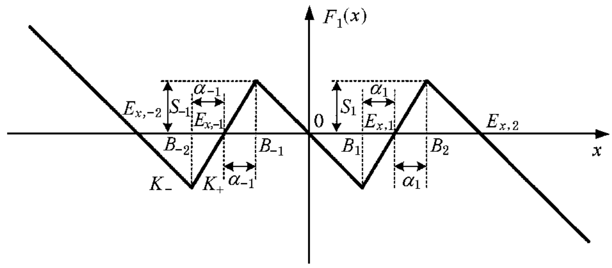

图 1　参数 A,α 可调的三角波 $F_1(x)$

根据(1),(2)式,并令(2)式中的 $A=1$,$M=1$,则有 $\alpha=\alpha_{\pm1}\in(0,1]$.用 Matlab 程序进行数值计算,可得上述用三角波构成的混沌系统随转折点值 α 变化的分岔图如图 2 所示.由图 2 知,随着转折点值 α 的变化,(1),(2)式表示的系统通过倍周期分岔进入混沌状态,在 $\alpha\in(0,0.15]$ 的区域内存在一维 3 涡卷混沌吸引子,如图 3 所示.图 2 所示的分岔图已证实能在(1)式表示的系统中用三角波 $F_1(x)$来产生多涡卷混沌吸引子.

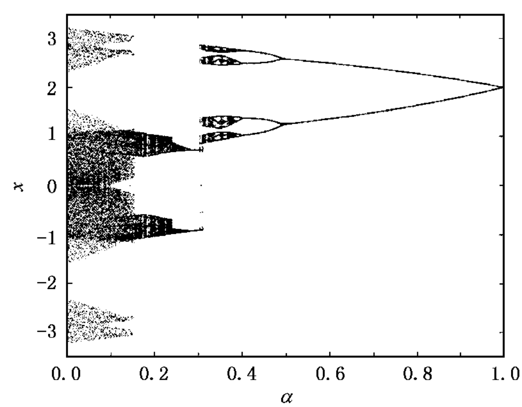

图 2　随转折点值 α 变化时的分岔图

2.2. 三角波参数变化时对混沌系统特性的影响

根据图 1 和(2)式,可求得三角波的幅度 S_m、宽度 W_m、转折点 B_m、平衡点 $E_{x,m}$、正斜率 K_+、负斜率 K_- 与变参数 A 和 α_m 之间的数学表达式如下:

$$\begin{aligned}S_m &= A-\alpha_m,\\ W_m &= 2A,\\ B_m &= \pm mA\pm\alpha_m,\end{aligned}$$

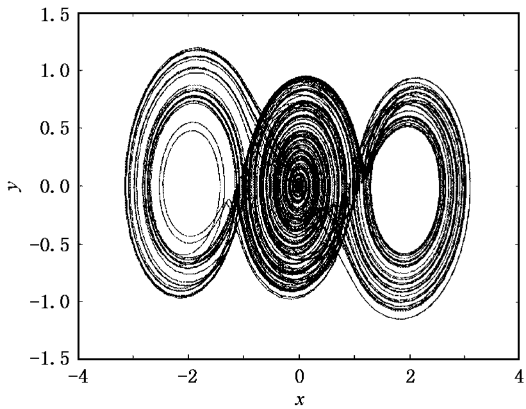

图 3 一维 3 涡卷混沌吸引子($\alpha = 0.075$)

$$
\begin{aligned}
E_{x,m} &= 0, \pm mA, \\
K_{+} &= A/\alpha_m - 1, \\
K_{-} &= -1,
\end{aligned} \tag{3}
$$

式中 $m = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm M$. 根据(3)式,可以看出这种可调三角波 $F_1(x)$ 当参数变化时对系统特性的影响具有下述特点.

(1)参数 α_m 具有对称性. 由于 $F_1(x)$ 为奇函数,故满足 $\alpha_m = \alpha_{-m}$($m = 1,2,3,\cdots$).

(2)通过改变参数 α_m 的值,可改变三角波幅度 S_m、转折点 B_m 和正斜率 K_+ 的大小,从而可改变涡卷的大小和形状. 各 α_m 的值可以相等,也可以不相等. 当各 α_m 的值相等时,$F_1(x)$ 为均匀一致的三角波. 当各 α_m 的值不相等时,$F_1(x)$ 为非均匀一致的三角波. 以 11 涡卷混沌吸引子为例,令 $M = 5$,$A = 1$,现分别取如下两组不同的 α_m 值:

$$
\begin{aligned}
[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5] &= [0.1, 0.1, 0.05, 0.01, 0.001], \\
[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5] &= [0.1, 0.01, 0.1, 0.01, 0.1].
\end{aligned} \tag{4}
$$

(4)式中的第一组数据产生由小到大的 11 涡卷混沌吸引子,如图 4 所示,第二组数据产生大小相间的 11 涡卷混沌吸引子,如图 5 所示.

(3)通过改变参数 α_m 的值,可改变涡卷的形状和相轨分布. 参数 A 不变,改变 α_m 的值,随着 α_m 值的增加相轨迹将远离平衡点,随着 α_m 值的减小相轨迹将靠近平衡点,这可通过两组数据来加以说明. 以 5 涡卷混沌吸引子为例,令(2)式中的 $M = 2$,设第一组数据为 $A = 1$,$\alpha_{\pm 1} = \alpha_{\pm 2} = 0.1$. 第二组数据为 $A = 1$,$\alpha_{\pm 1} = \alpha_{\pm 2} = 0.01$. 第一组数据对应的 5 涡卷如图 6 所示,第二组数据对应的 5 涡卷如图 7 所示.

(4)通过改变参数 A 的值,可改变三角波的幅度 S_m、宽度 W_m、转折点 B_m、平衡点 $E_{x,m}$ 和正斜率 K_+ 的大小,即 S_m, W_m, B_m, $E_{x,m}$, K_+ 与参数 A 成正比. 例如,令 $M = 2$,$\alpha_m = 0.1$,分别取参数 $A = 1$ 和 A

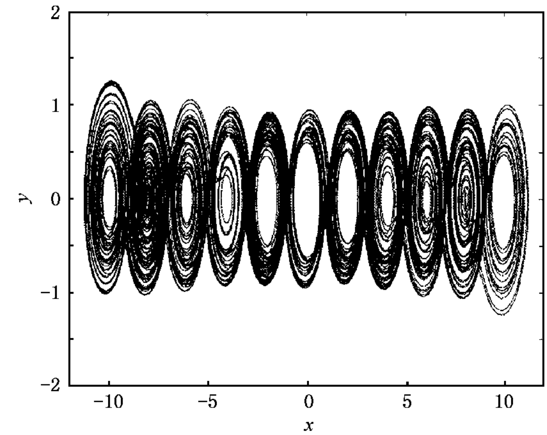

图 4 由小到大的一维 11 涡卷混沌吸引子

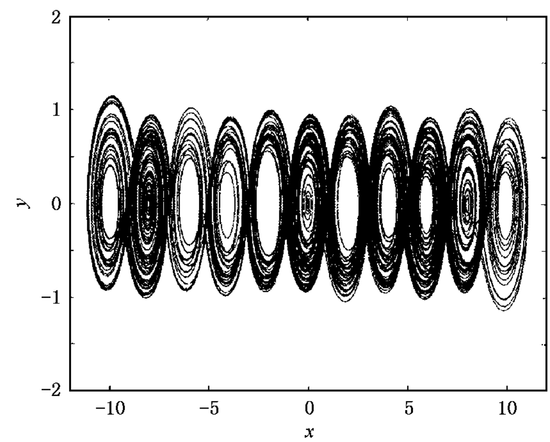

图 5 大小相间的一维 11 涡卷混沌吸引子

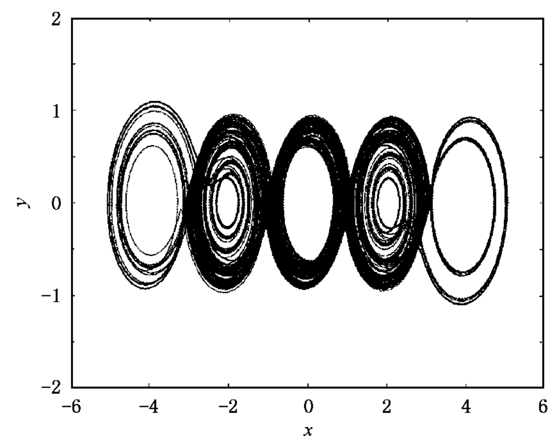

图 6 相轨迹远离平衡点的一维 5 涡卷混沌吸引子

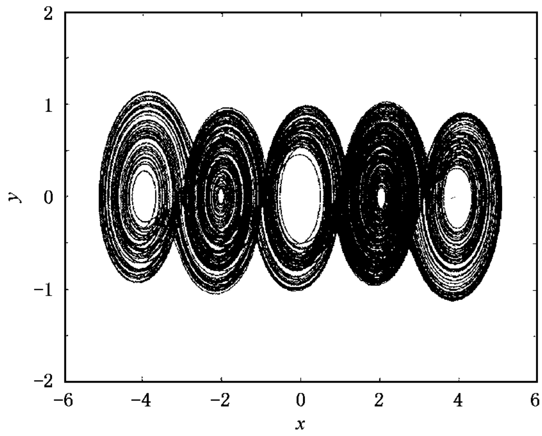

图 7　相轨迹靠近平衡点的一维 5 涡卷混沌吸引子

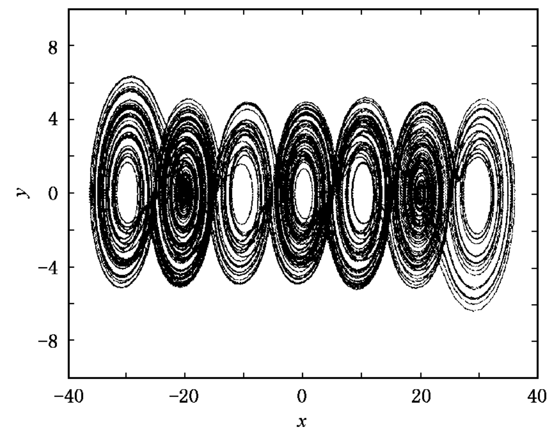

图 9　一维 7 涡卷混沌吸引子（$A=5$）

$=5$，可得相对应的 7 涡卷混沌吸引子分别如图 8、图 9 所示. 由图 8、图 9 可见，适当选取参数 A 的大小对于产生涡卷数量更多的混沌吸引子是至关重要的，如果 A 的值选得较大（例如 $A\geqslant 2$），当涡卷的数量增加时，混沌信号就会超出运算放大器的动态范围，难以产生 10 个以上的涡卷. 因此，我们将选取 $A=1$ 这一典型参数来分析和设计三维多涡卷混沌电路.

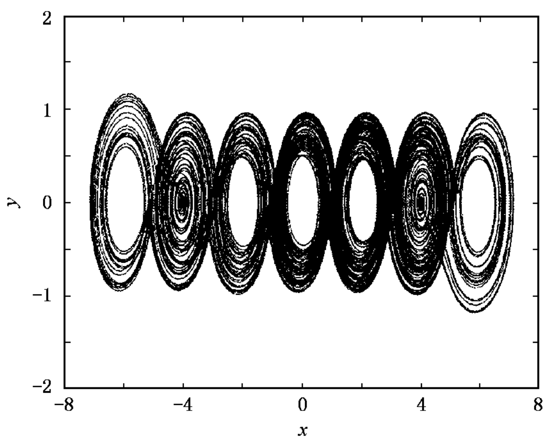

图 8　一维 7 涡卷混沌吸引子（$A=1$）

2.3. 系统在平衡点处的混沌动力学特性

下面进一步分析由（1），（2）式所构成的混沌系统在各个线性分区间中的动力学特性以及系统在平衡点处的混沌动力学行为.

（2）式表示的三角波 $F_1(x)$ 中正、负线性函数段相对应的平衡点 $E^+_{x,m}$，$E^-_{x,m}$ 可表示为

$$
\begin{aligned}
E^+_{x,m} &= (2m - |m|/m)A \\
&\quad (m = \pm 1, \pm 2, \cdots, M), \\
E^-_{x,m} &= 2mA \\
&\quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, M).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

现考察（1），（2）式表示的混沌系统在平衡点 $E^+_{x,m}$，$E^-_{x,m}$ 附近的动力学行为. 与之相对应的 Jacobi 矩阵可表示为

$$
J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \gamma K & -\eta & -\beta \end{bmatrix},
\tag{6}
$$

式中，$\eta=\beta=\gamma=0.75$，$K=K_+=(A-\alpha)/\alpha$ 时对应平衡点 $E^+_{x,m}$ 的 Jacobi 矩阵，$K=K_-=-1$ 时对应平衡点 $E^-_{x,m}$ 的 Jacobi 矩阵. 相应的特征方程为

$$
\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \eta\lambda - \gamma K = 0.
\tag{7}
$$

取 $F_1(x)$ 中的参数 $A=1$，$\alpha=0.075$，得 $K_+=(A-\alpha)/\alpha=12.3$，$K_-=-1$. 利用（7）式求得与 $E^+_{x,m}$，$E^-_{x,m}$ 相对应的特征值为

$$
\begin{aligned}
\lambda_1^+ &= 1.7722 \\
\lambda_{2,3}^+ &= -1.2611 \pm \mathrm{i}1.9051, \\
\lambda_1^- &= -0.8739, \\
\lambda_{2,3}^- &= 0.0619 \pm \mathrm{i}0.9243.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

上述分析表明，在（1），（2）式表示的混沌系统中，存在两种不同类型的鞍点，其中平衡点（$E^+_{x,m}$，0，0）为指标 1 的鞍点，其特征值 λ_1^+，$\lambda_{2,3}^+$ 则能够满足在正斜率线性段的各个区间中形成径向收缩、轴向拉伸的单向运动. 而平衡点（$E^-_{x,m}$，0，0）则为指标 2 的鞍点，其特征值 λ_1^-，$\lambda_{2,3}^-$ 能够满足在负斜率线性段的各个区间中形成径向拉伸、轴向收缩的涡卷运动. 由于这两种运动相互作用的结果，可在（1），（2）式所构成的系统中形成多涡卷混沌吸引子.

3. 用三角波序列产生三维多涡卷混沌吸引子

在上述分析结果的基础上,进一步提出用三角波序列来构造一个三维多涡卷混沌系统.用三角波序列构造三维多涡卷混沌系统的状态方程可表示为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} &= -F_2(y),\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} &= -F_3(z),\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} &= -\eta y-\beta z+\gamma F_1(x),\end{aligned}\tag{9}$$

式中,$\eta=\beta=\gamma=0.75$. $F_1(x)$,$F_2(y)$,$F_3(z)$为三角波序列,数学表达式为

$$\begin{aligned}F_1(x) &= \sum_{\substack{m=-M\\ m\neq 0}}^{M}\frac{A}{2\alpha_m}\left\{\left|\left(x-A\left(2m-\frac{|m|}{m}\right)\right)+\alpha_m\right|\right.\\ &\quad\left.-\left|\left(x-A\left(2m-\frac{|m|}{m}\right)\right)-\alpha_m\right|\right\}-x,\\ F_2(y) &= \sum_{\substack{n=-N\\ n\neq 0}}^{N}\frac{A}{2\alpha_n}\left\{\left|\left(y-A\left(2n-\frac{|n|}{n}\right)\right)+\alpha_n\right|\right.\\ &\quad\left.-\left|\left(y-A\left(2n-\frac{|n|}{n}\right)\right)-\alpha_n\right|\right\}-y,\\ F_3(z) &= \sum_{\substack{l=-L\\ l\neq 0}}^{L}\frac{A}{2\alpha_l}\left\{\left|\left(z-A\left(2l-\frac{|l|}{l}\right)\right)+\alpha_l\right|\right.\\ &\quad\left.-\left|\left(z-A\left(2l-\frac{|l|}{l}\right)\right)-\alpha_l\right|\right\}-z,\end{aligned}\tag{10}$$

式中,$A>0$ 和 $\alpha_j\in(0,0.15A]$ ($j=\pm1,\pm2,\cdots$)为三角波序列的变参数,含义同前;M, N, L 为正整数.令$M=1$, $N=2$, $L=1$, $A=1$, $\alpha=\alpha_{\pm1}=\alpha_{\pm2}\in(0,0.15]$,根据(10)式,可得三角波序列$F_1(x)$,$F_2(y)$,$F_3(z)$如图10所示.图10还示出了相对应的涡卷平衡点的位置.

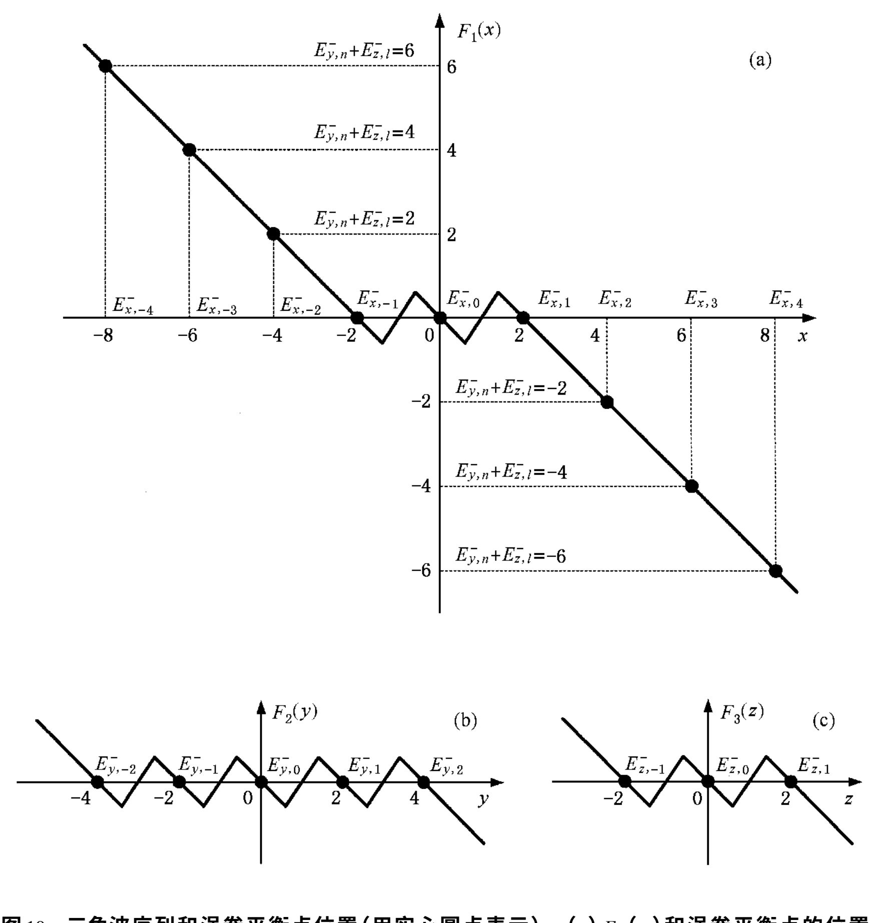

图10 三角波序列和涡卷平衡点位置(用实心圆点表示) (a) $F_1(x)$和涡卷平衡点的位置,(b) $F_2(y)$和涡卷平衡点的位置,(c) $F_3(z)$和涡卷平衡点的位置

图 10 中的实心圆点表示各个涡卷对应平衡点的位置(还有其他平衡点,由于它们不是涡卷对应的平衡点,在此不予考虑),它们的位置可由下述平衡点方程确定:

$$\begin{aligned} &F_2(y) = 0, \\ &F_3(z) = 0, \\ &y + z - F_1(x) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

由图 10 和(11)式,可得各个涡卷对应的平衡点共 21 个.

(1) $E_{y,n}^- + E_{z,l}^- = -6$ 时涡卷对应平衡点的坐标值($E_{x,m}^-, E_{y,n}^-, E_{z,l}^-$)为$(8, -4, -2)$.

(2) $E_{y,n}^- + E_{z,l}^- = -4$ 时涡卷对应平衡点的坐标值($E_{x,m}^-, E_{y,n}^-, E_{z,l}^-$)为$(6, -4, 0)$,$(6, -2, -2)$.

(3) $E_{y,n}^- + E_{z,l}^- = -2$ 时涡卷对应平衡点的坐标值($E_{x,m}^-, E_{y,n}^-, E_{z,l}^-$)为$(4, -4, 2)$,$(4, -2, 0)$,$(4, 0, -2)$.

(4) $E_{y,n}^- + E_{z,l}^- = 0$ 时涡卷对应平衡点的坐标值($E_{x,m}^-, E_{y,n}^-, E_{z,l}^-$)为$(-2, -2, 2)$,$(-2, 0, 0)$,$(-2, 2, -2)$,$(0, -2, 2)$,$(0, 0, 0)$,$(0, 2, -2)$,$(2, -2, 2)$,$(2, 0, 0)$,$(2, 2, -2)$.

(5) $E_{y,n}^- + E_{z,l}^- = 2$ 时涡卷对应平衡点的坐标值($E_{x,m}^-, E_{y,n}^-, E_{z,l}^-$)为$(-4, 2, 0)$,$(-4, 0, 2)$,$(-4, 4, -2)$.

(6) $E_{y,n}^- + E_{z,l}^- = 4$ 时涡卷对应平衡点的坐标值($E_{x,m}^-, E_{y,n}^-, E_{z,l}^-$)为$(-6, 4, 0)$,$(-6, 2, 2)$.

(7) $E_{y,n}^- + E_{z,l}^- = 6$ 时涡卷对应平衡点的坐标值($E_{x,m}^-, E_{y,n}^-, E_{z,l}^-$)为$(-8, 4, 2)$.

上述 21 个涡卷对应的平衡点均为指标 2 的鞍点,其特征值 λ_1^-,$\lambda_{2,3}^-$ 能够满足在负斜率线性段的各个区间中形成径向拉伸、轴向收缩的涡卷运动.相对应的 Jacobi 矩阵可表示为

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -K_2^- & 0 \\ 0 & 0 & -K_3^- \\ \gamma K_1^- & -\eta & -\beta \end{bmatrix}, \tag{12}$$

式中 $K_1^- = K_2^- = K_3^- = -1$ 分别代表三角波序列

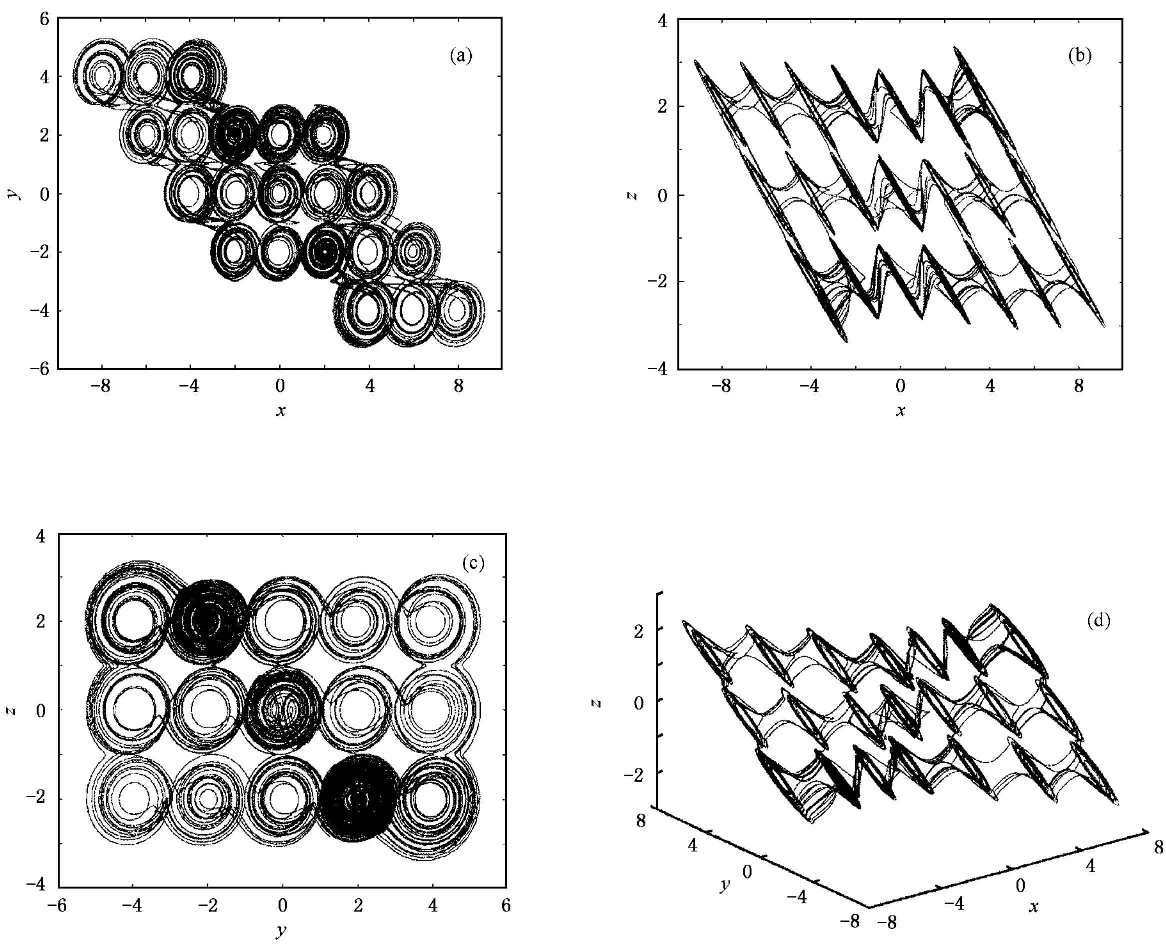

图 11　三维 21 涡卷混沌吸引子　(a) xy 平面相图,(b) xz 平面相图,(c) yz 平面相图,(d)三维空间相图

$F_1(x)$,$F_2(y)$,$F_3(z)$在各自线性函数段的负斜率.令参数 $A=1$,$\alpha=\alpha_{\pm1}=\alpha_{\pm2}=\cdots=0.075$,由(12)式可求得涡卷平衡点($E^-_{x,m}$,$E^-_{x,n}$,$E^-_{x,l}$)相对应的特征值为

$$\begin{aligned}\lambda_1^- &= -0.8739,\\ \lambda_{2,3}^- &= 0.0619\pm i0.9243.\end{aligned}\tag{13}$$

令 $M=1$,$N=2$,$L=1$,$A=1$,$\alpha=\alpha_{\pm1}=\alpha_{\pm2}=0.075$,$\eta=\beta=\gamma=0.75$.根据(9),(10)式,可得三维 21 涡卷混沌吸引子的计算机模拟结果如图 11 所示.

4.用三角波序列产生三维多涡卷混沌吸引子的电路设计

基于上述用三角波序列产生三维多涡卷混沌吸引子的工作原理,根据(9),(10)式,可构造用三角波序列产生三维多涡卷混沌吸引子的电路如图 12 所示.

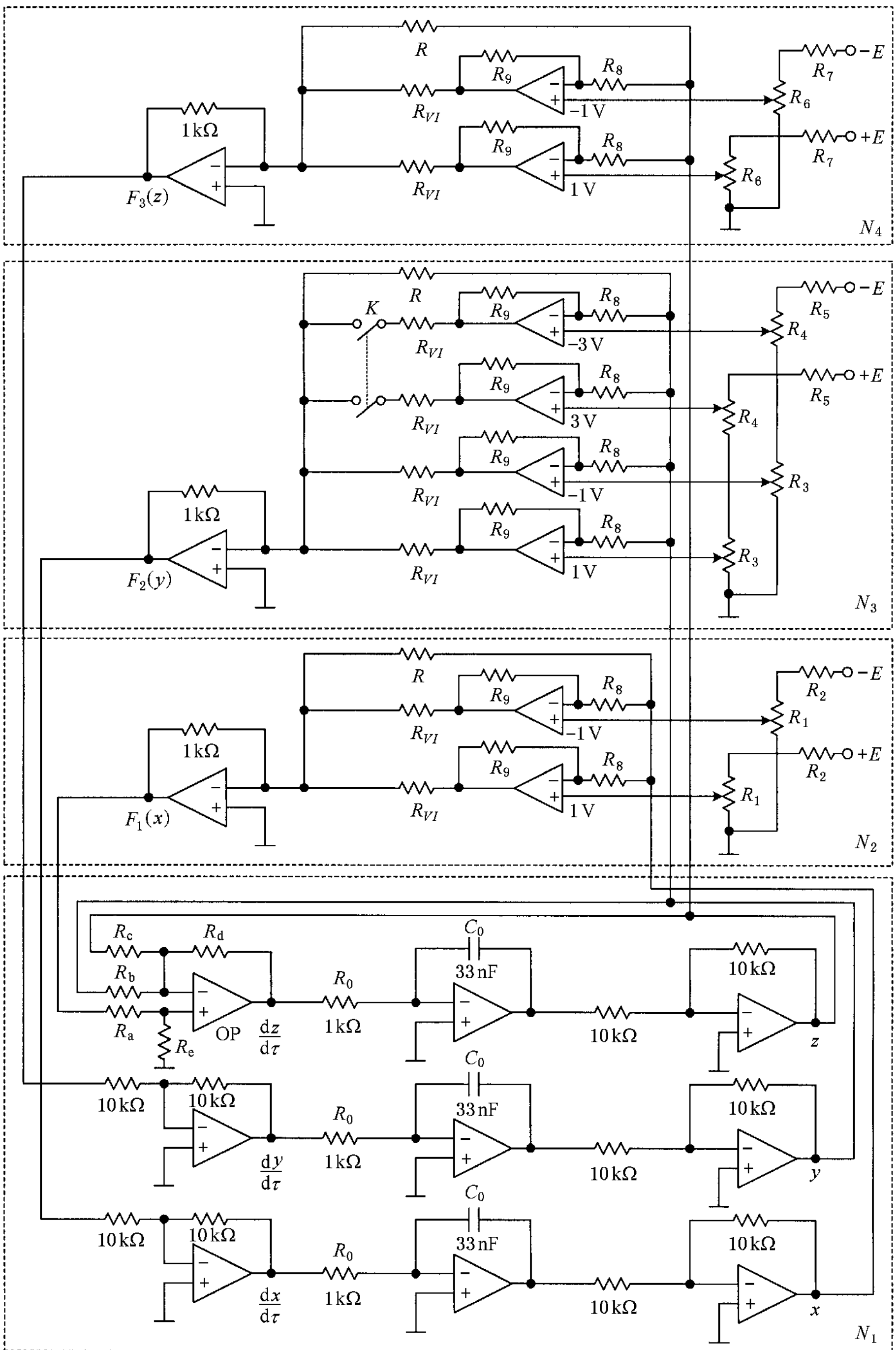

图 12 用三角波序列产生三维多涡卷混沌吸引子的电路图

图 12 所示的电路由 5 个部分组成:N_1 为积分器,N_2 为三角波函数 $F_1(x)$ 发生器,N_3 为三角波函数 $F_2(y)$ 发生器,N_4 为三角波函数 $F_3(z)$ 发生器,K 为联动开关,分别用于产生三维 15 涡卷和三维 21 涡卷,当联动开关 K 闭合时,产生 21 涡卷,当联动开关 K 断开时,产生 15 涡卷.图 12 中 $1/(R_0C_0)$ 为积分器的积分常数,同时也是时间尺度变换因子,固定 $R_0 = 1\ \mathrm{k\Omega}$ 不变,改变 C_0 的大小,可改变时间尺度变换因子,从而可改变混沌信号的频谱范围.在电路实验中,取 $R_0 = 1\ \mathrm{k\Omega}$,$C_0 = 33\ \mathrm{nF}$.图 12 中所有的有源器件为运算放大器,型号为 TL082,电源电压为 $\pm E = \pm 15\ \mathrm{V}$,实验测得此时各运算放大器输出电压的饱和值为 $V_{\mathrm{sat}} = \pm 13.5\ \mathrm{V}$.为了便于电路实验,图 12 中所有电阻均采用精密可调电阻或精密可调电位器.

根据图 1、图 10 以及(3)式中有关变参数 A 和三角波平衡点之间的关系,为了能产生更多数量的涡卷,需要适当选取 A 的大小.如要产生三维 21 涡卷,应选取 $A \leqslant 1$,我们取 $A = 1$ 作为一个典型参数来设计电路.根据图 1 和图 10,当 $A = 1$ 时,三角波序列中相对应的正斜率线性段平衡点的电压值分别为 ± 1,$\pm 3\ \mathrm{V}$,可通过调节图 12 中电阻 R_1—R_7 的大小来获得这些电压值.

图 12 三角波序列产生器 N_2,N_3,N_4 中,电阻 $R_{VI} = 13.5\ \mathrm{k\Omega}$ 为电压-电流转换电阻;线性电阻 R 可产生三角波的负斜率线性段,取 $R = 1\ \mathrm{k\Omega}$,可使三角波的负斜率 $K_- = -1$.

图 12 中的 R_8,R_9 及其相连的运算放大器用以决定相对转折点值 α 的大小,它们与线性电阻 R 共同产生三角波的正斜率线性段.可以证明,R_8,R_9,$|V_{\mathrm{sat}}|$ 与转折点 α 之间的数学关系可表示为[33]

$$\alpha = \frac{R_8}{R_9}\,|V_{\mathrm{sat}}|. \tag{14}$$

已知 $|V_{\mathrm{sat}}| = 13.5\ \mathrm{V}$,实验中选取 $R_8 = 1\ \mathrm{k\Omega}$,$R_9 = 200\ \mathrm{k\Omega}$,由(14)式可得 $\alpha = 0.068$.根据实验需要,通过改变 R_9 的大小,可改变相对转折点值 α 的大小,从而可改变三角波正斜率线性段的宽度.

最后推导图 12 所示电路的状态方程.根据电路理论,可列出关于该电路的状态方程为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} &= -F_2(y),\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} &= -F_3(z),\\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{R_{\mathrm{p}}}{R_{\mathrm{n}}}R_{\mathrm{d}}\left[-\frac{y}{R_{\mathrm{b}}} - \frac{z}{R_{\mathrm{c}}} + \frac{F_1(x)}{R_{\mathrm{a}}}\right],
\end{aligned} \tag{15}$$

式中,$R_{\mathrm{p}} = R_{\mathrm{a}} /\!/ R_{\mathrm{e}}$ 为运算放大器 OP 同相输入端的等效电阻,$R_{\mathrm{n}} = R_{\mathrm{b}} /\!/ R_{\mathrm{c}} /\!/ R_{\mathrm{d}}$ 为运算放大器 OP 反相输入端的等效电阻.适当选取电阻 R_{e} 的大小,使其满足 $R_{\mathrm{p}} = R_{\mathrm{n}}$,并选取 $R_{\mathrm{a}} = R_{\mathrm{b}} = R_{\mathrm{c}}$,调节 R_{d} 的大小,满足 $R_{\mathrm{d}}/R_{\mathrm{a}} = R_{\mathrm{d}}/R_{\mathrm{b}} = R_{\mathrm{d}}/R_{\mathrm{c}} = 0.75$.根据以上分析,最后可将(15)式化为如下的标准形式:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} &= -F_2(y),\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} &= -F_3(z),\\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} &= -ay - az - aF_1(x),
\end{aligned} \tag{16}$$

式中,$a = 0.75$,$\tau = \frac{t}{R_0C_0}$,其中 $\frac{1}{R_0C_0}$ 为积分器的积分常数,同时也是时间尺度变换因子.

5.电路实验结果

根据图 12 的电路进行实验,可得三维 15 涡卷和三维 21 涡卷混沌吸引子的硬件电路实验结果分别如图 13—图 18 所示.当图 12 中的开关 K 断开时,电路产生三维15涡卷混沌吸引子,当开关 K闭

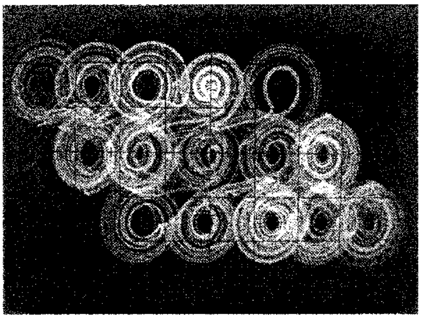

图 13　三维 15 涡卷在 xy 平面上的相图

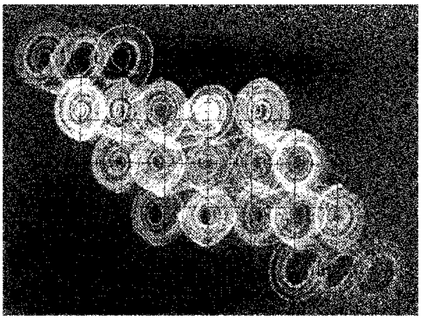

图 14　三维 21 涡卷在 xy 平面上的相图

合时,电路产生三维21涡卷混沌吸引子.在实际电路中,由于参数的离散性,需要通过调节电阻 R_a, R_b, R_c, R_d, R, R_{VI} 的大小来确定电路所需的实际参数值.

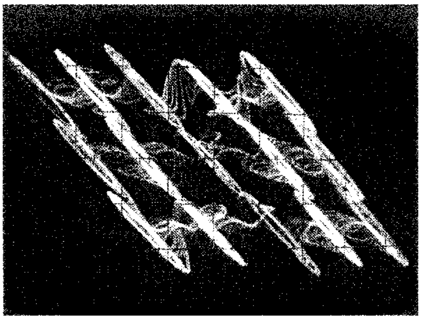

图15 三维15涡卷在 xz 平面上的相图

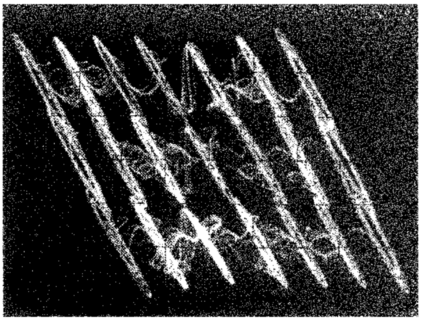

图16 三维21涡卷在 xz 平面上的相图

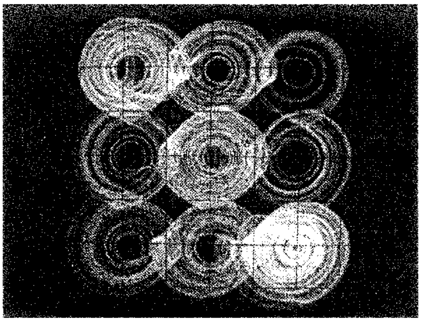

图17 三维15涡卷在 yz 平面上的相图

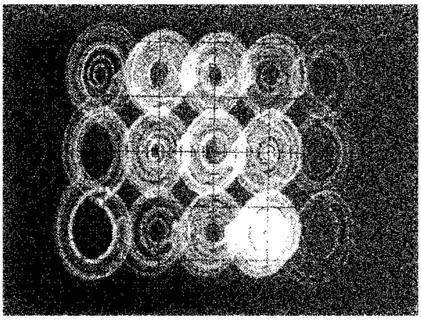

图18 三维21涡卷在 yz 平面上的相图

6. 结 论

提出了用三角波序列产生三维多涡卷混沌吸引子的新方法.分析了用三角波序列构成的多涡卷系统的混沌动力学特性,其中包括随三角波转折点参数变化时的分岔与混沌特性、三角波参数值变化时对混沌系统特性的影响以及系统在平衡点处的混沌动力学行为.基于硬件电路实验平台,设计了用三角波序列构成的三维多涡卷混沌电路,进行了相关的硬件电路实验研究,获取了三维21涡卷混沌吸引子新的实验结果.与文献[28]所提出的方法相比,本文所研究的这种新型混沌电路的主要特点是三角波的幅度、宽度、平衡点、转折点、斜率等参数具有可调性,因而本方案在实际电路的实现方面具有更大的灵活性.因此,可通过合理地构造三角波序列的数学形式,以及通过改变参数 A 和 α 的大小来适当地选取三角波的幅度、斜率、平衡点值和转折点值,使得积分器的输入信号有一个较为合适的动态范围,以此为基础来设计电路并确定电路中各个元件的参数,从而能在实际电路中产生涡卷数量多达21个的三维混沌信号.硬件电路实验结果证实了这一方案的可行性.

[1] Matsumoto T, Chua L O, Komuro M 1985 *IEEE Trans. CAS*-Ⅰ **32** 798

[2] Kennedy M P 1993 *IEEE Trans. CAS*-Ⅰ **40** 657

[3] Matsumoto T, Chua L O, Kobayashi K 1986 *IEEE Trans. CAS*-Ⅰ **33** 1143

[4] Yin Y Z 1997 *Int. J. Bifurc. Chaos* **7** 1401

[5] Lü J F, Chen G R, Zhang S C 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 1001

[6] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 2917

[7] Storace M, Parodi M 1998 *Electron. Lett.* **34** 10

[8] Sprott J C 1994 *Phys. Rev.* E **50** R647

[9] Sprott J C 2000 *Amer. J. Phys.* **68** 758

[10] Sprott J C 2000 *Phys. Lett.* A **266** 19

[11] Lü J F, Zhou T S, Zhang S C 2002 *Chin. Phys.* **11** 12

[12] Liu C X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1198 (in Chinese) [刘崇新 2002 物理学报 **51** 1198]

[13] Chen J F，Cheng L，Liu Y *et al* 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 18 (in Chinese)[陈菊芳、程　丽、刘　颖等 2003 物理学报 **52** 18]
[14] Kuang J Y，Deng K，Huang R H 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1856 (in Chinese) [匡锦瑜、邓　昆、黄荣怀 2001 物理学报 **50** 1856]
[15] Elwakil A S 2000 *Int*. *J*. *Circ*. *Theor*. *Appl*. **28** 69
[16] Elwakil A S，Kennedy M P 2000 *IEEE Trans*. *CAS*-Ⅰ **47** 76
[17] Yang X S，Li Q 2002 *Electron*. *Lett*. **38** 623
[18] Lü J H，Yu X H，Chen G R 2003 *IEEE Trans*. *CAS*-Ⅰ **50** 198
[19] Yalcin M E，Ozoguz S，Suykens J A K *et al* 2000 *Electron*. *Lett*. **37** 147
[20] Arena P，Baglio S，Fortuna L，Manganaro G 1996 *Int*. *J*. *Circ*. *Theor*. *Appl*. **24** 241
[21] Suykens J A K，Vandewalle J 1993 *IEEE Trans*. *CAS*-Ⅰ **40** 861
[22] Suykens J A K，Chua L O 1997 *Int*. *J*. *Bifurc*. *Chaos* **7** 1873
[23] Yalcin M E，Suykens J A K，Vandewalle J 2000 *IEEE Trans*. *CAS*-Ⅰ **47** 425
[24] Tang W K S，Zhong G Q，Chen G *et al* 2001 *IEEE Trans*. *CAS*-Ⅰ **48** 1369
[25] Zhong G Q，Man K F，Chen G R 2002 *Int*. *J*. *Bifurc*. *Chaos* **12** 2907
[26] Yu S M，Qiu S S，Lin Q H 2003 *Sci*. *Chin*. F **46** 104
[27] Han F，Yu X，Wang Y *et al* 2003 *Electron*. *Lett*. **39** 1636
[28] Yalcin M E，Suykens J A K，Vandewalle J 2002 *Int*. *J*. *Bifurc*. *Chaos* **12** 23
[29] Elwakil A S，Kennedy M P 2000 *Int*. *J*. *Circ*. *Theor*. *Appl*. **28** 319
[30] Yu S M，Lin Q H，Qiu S S 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 25 (in Chinese) [禹思敏、林清华、丘水生 2003 物理学报 **52** 25]
[31] Yu S M，Lin Q H，Qiu S S 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2084 (in Chinese) [禹思敏、林清华、丘水生 2004 物理学报 **53** 2084]
[32] Yu S M，Ma Z G，Qiu S S *et al* 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 317
[33] Yu S M 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 4111 (in Chinese) [禹思敏 2004 物理学报 **53** 4111]

Circuit implementation for generating three-dimensional multi-scroll chaotic attractors via triangular wave series*

Yu Si-Min

(*College of Automation*，*Guangdong University of Technology*，*Guangzhou*　510090，*China*)

(Received 11 August 2004；revised manuscript received 26 November 2004)

Abstract

This paper proposes a new approach for generating three-dimensional (3-D) multi-scroll chaotic attractors via triangular wave series. The chaotic dynamic characteristic of multi-scroll system constructed by triangular wave series is further investigated. The hardware experimental circuit is designed and the interrelated circuit implementation is realized. A blocking circuit diagram，including integrator N_1，triangular wave series generators N_2，N_3 and N_4，switch linkage K，is designed for the hardware implementations. The triangular wave series developed here can adjust the swings，widths，equilibrium points，breakpoints，and slopes so as to generate a large number of scrolls with adjustable sizes and shapes. Moreover，the number of scrolls can be controlled via switching of the switch linkage K. The experimental result demonstrates that this method can be a new approach for generating 3-D multi-scroll chaotic attractors with up to 21-scrolls in practical circuit by constructing a family of triangular wave series with adjustable parameters.

Keywords: three-dimensional multi-scroll chaotic attractors，three-dimensional multi-scroll chaotic circuit，triangular wave series，circuit experiment

PACC: 0545

* Project supported by the Natural Science Foundation of Guangdong Province，China (Grant No. 032469) and the Science and Technology Program of Guangzhou，China (Grant No. 2004J1-C0291).