

非傍轴矢量高斯光束的传输^{*}

周国泉

(浙江林学院信息物理系, 光电子研究所, 临安 311300)

(2004 年 5 月 20 日收到, 2004 年 8 月 19 日收到修改稿)

运用非傍轴光束传输的矢量矩理论, 对非傍轴矢量高斯光束的传输特性进行了系统的研究. 结果表明, 基于二阶矩定义的横向光束宽度在光束传播过程中满足简单的双曲线变化规律, 并且给出了光束传输因子的解析表达式. 就高度非傍轴情形, 进一步给出了简洁的计算公式, 在高斯光源线度趋向零的极限情形下, 横向的最大发散角为 90° . 同时, 还推广到了傍轴情形, 得到了与原有傍轴公式稍有区别的结果, 而且光束传输因子始终保持略大于 1. 最后, 对非傍轴矢量高斯光束和非傍轴标量高斯光束的传输进行了比较, 结果显示对于线度在两个波长范围之内的高斯光源发散角有很大差异.

关键词: 矢量高斯光束, 光束传输, 非傍轴, 二阶矩

PACC: 4210Q, 4225B

1. 引 言

由光强二阶矩定义的光束传输因子(又称光束质量因子)即 M^2 因子为激光束的光束质量评估和控制奠定了理论基础, 适用于描述除衍射光束以外的其他任意傍轴标量激光束的光束质量和传输特性^[1], 为合理地比较不同傍轴激光系统的光束质量提供了一个统一的标准(ISO/TC172/SC9/WG1). 经过几年的发展, 光束传输因子的二阶矩定义法推广到了非傍轴标量激光束和非傍轴矢量激光束, 分别定义了相应的光束传输因子^[2-4]. 对于非傍轴矢量激光束, 借助于 Maxwell 方程组和电磁场的平面波谱表述, 用坡印亭矢量取代二阶矩中的光强, 发展成为非傍轴光束传输的矢量矩理论. 现在, 非傍轴光束传输的矢量矩理论已逐步应用于描述半导体激光束等重要实际非傍轴矢量激光束的传输^[5].

尽管光束传输因子拓展到非傍轴领域揭示了一些与傍轴光束截然不同的特点^[4, 6], 但是有关非傍轴光束 M^2 因子的研究还是初步的. 本文通过对非傍轴矢量高斯光束传输的系统研究, 力求充分认识和掌握非傍轴矢量高斯光束的传输规律, 为控制激光束的束腰和远场发散角提供理论依据, 为合理评价其他实际非傍轴激光束的光束传输行为奠定基础.

随着线度为波长量级和亚波长量级光源应用的日渐增多、新型微光学器件的不断诞生和现实应用激光技术向波长和亚波长领域的推进, 对激光束在非傍轴领域内传输的研究将显得更为重要^[7].

2. 理论推导

在直角坐标系中, 矢量高斯光束的初始边界条件可表示为

$$E_x(x, y, 0) = E_y(x, y, 0) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right). \quad (1)$$

式中, w_0 为高斯光源的半宽度, 即幅值下降至峰值 $\frac{1}{e}$ 处的光束半宽度. 在 $z \geq 0$ 的半空间里充满了各向同性的均匀介质, 介质的电容率和磁导率分别为 ϵ 和 μ . 矢量高斯光束向 $z \geq 0$ 的半空间非傍轴传输. 由全矢量表述的电磁场角谱理论^[8, 9], 可得到用改写了的平面波谱表示的传输电场和磁场

$$E(x, y, z) = \exp(-i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{A^E(r, \theta)}{\lambda^2} \times \exp[ik(xr\cos\theta + yr\sin\theta + z\sqrt{1-r^2})] r dr d\theta, \quad (2)$$

^{*} 浙江省教育厅科研基金(批准号 20030571)资助的课题.

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \exp(-i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{A^H(r, \theta)}{\lambda^2} \exp[ik(xr\cos\theta + yr\sin\theta + z\sqrt{1-r^2})] r dr d\theta, \quad (3)$$

式中

$$A^E(r, \theta) = \pi w_0^2 \exp\left(-\frac{cr^2}{2}\right) \left(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{r(\cos\theta + \sin\theta)}{\sqrt{1-r^2}} \mathbf{k} \right), \quad (4)$$

$$A^H(r, \theta) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \pi w_0^2 \exp\left(-\frac{cr^2}{2}\right) \left(\frac{-1 + r^2 \cos^2\theta - r^2 \sin\theta \cos\theta}{\sqrt{1-r^2}} \mathbf{i} + \frac{1 - r^2 \sin^2\theta + r^2 \sin\theta \cos\theta}{\sqrt{1-r^2}} \mathbf{j} + r(\cos\theta - \sin\theta) \mathbf{k} \right) \quad (5)$$

是初始场分布的角谱. 这里

$$c = \frac{2\pi^2 w_0^2}{\lambda^2},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}}$$

是介质中的光波长, ω 为圆频率. 参数 r 和 θ 与横向空间频率 ξ 和 η 有如下关系:

$$\begin{aligned} \frac{r\cos\theta}{\lambda} &= \xi, \\ \frac{r\sin\theta}{\lambda} &= \eta. \end{aligned} \quad (6)$$

且 $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\frac{\sqrt{1-r^2}}{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \xi^2 - \eta^2}$$

为纵向空间频率. $r < 1$ 的值对应于和 z 轴成 $\arcsin r$ 角度传输的均匀平面波; 而 $r > 1$ 的值对应于隐逝波.

对于任一 z 为常数的平面, 当非傍轴矢量高斯光束通过时总功率 P 可由傅里叶变换的基本性质得到,

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle S_z \rangle dx dy \\ &= 2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\pi^3 w_0^4}{\lambda^2} \int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{2r-r^3}{\sqrt{1-r^2}} dr. \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $\langle S_z \rangle$ 是对时间平均的坡印亭矢量的 z 分量. 总功率 P 在光束沿 z 轴传播过程中保持守恒. 在任一 z 为常数的平面上, 光束中心的横坐标 $X(z)$, $Y(z)$ 定义为坡印亭矢量 z 分量的一阶矩^[4],

$$\begin{pmatrix} X(z) \\ Y(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle S_z \rangle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx dy = -\frac{w_0^2}{\lambda} \frac{\int_1^{\infty} \int_0^{2\pi} \exp(-cr^2) \frac{(2+r\sin 2\theta - r^2)}{\sqrt{r^2-1}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} r^2 dr d\theta}{\int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{2r-r^3}{\sqrt{1-r^2}} dr} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

非傍轴矢量高斯光束在沿 z 轴传播过程中, 光束中心始终保持在 z 轴上. 因此, 基于光束中心坐标二阶矩定义的光束宽度可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} W_x^2(z) & W_{xy}(z) \\ W_{xy}(z) & W_y^2(z) \end{pmatrix} = \frac{4}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle S_z \rangle \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2 \end{pmatrix} dx dy. \quad (9)$$

选取平面 $z=0$ 为参考平面 (9) 式可简化为

$$\begin{pmatrix} W_x^2(z) & W_{xy}(z) \\ W_{xy}(z) & W_y^2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_x^2(0) & W_{xy}(0) \\ W_{xy}(0) & W_y^2(0) \end{pmatrix} + 2z \begin{pmatrix} \frac{W_x^2(0)}{R_x(0)} & \frac{W_{xy}(0)}{R_{xy}(0)} \\ \frac{W_{xy}(0)}{R_{xy}(0)} & \frac{W_y^2(0)}{R_y(0)} \end{pmatrix} + z^2 \begin{pmatrix} \tan^2\theta_x & \tan^2\theta_{xy} \\ \tan^2\theta_{xy} & \tan^2\theta_y \end{pmatrix}. \quad (10)$$

这表明光束宽度沿光束传播方向 z 轴的变化满足双曲线规律. (10) 式中等号右端的第二个矩阵是表示平面 $z=0$ 处的光束曲率, 具体表达式为

$$\begin{pmatrix} \frac{W_x^2(0)}{R_x(0)} & \frac{W_{xy}(0)}{R_{xy}(0)} \\ \frac{W_{xy}(0)}{R_{xy}(0)} & \frac{W_y^2(0)}{R_y(0)} \end{pmatrix} = \frac{4}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\begin{array}{cc} x \langle S_x \rangle & \frac{1}{2}(x \langle S_y \rangle + y \langle S_x \rangle) \\ \frac{1}{2}(x \langle S_y \rangle + y \langle S_x \rangle) & y \langle S_y \rangle \end{array} \right) dx dy, \quad (11)$$

式中, $\langle S_x \rangle$ 和 $\langle S_y \rangle$ 分别是对时间平均的坡印亭矢量的 x 和 y 分量. (10) 式中最后一个矩阵是表示光束的发散度, 其定义式相对较复杂,

$$\begin{pmatrix} \tan^2 \theta_x & \tan^2 \theta_{xy} \\ \tan^2 \theta_{xy} & \tan^2 \theta_y \end{pmatrix} = \frac{4}{P} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r^2 dr d\theta}{\lambda^2 \sqrt{1-r^2}} \begin{pmatrix} \cos \alpha (A^E \times A^{H*})_x & \frac{1}{2} [\cos \alpha (A^E \times A^{H*})_y + \sin \alpha (A^E \times A^{H*})_x] \\ \frac{1}{2} [\cos \alpha (A^E \times A^{H*})_y + \sin \alpha (A^E \times A^{H*})_x] & \sin \alpha (A^E \times A^{H*})_y \end{pmatrix}. \quad (12)$$

式中, 星号表示取复共轭. 平面 $z=0$ 处 x 和 y 方向上的光束宽度即束腰 $W_x(0)$ 和 $W_y(0)$, 由(9) 式经冗长的运算后可表示为

$$W_x^2(0) = W_y^2(0) = \frac{\lambda^2}{\pi^2} c \frac{\int_0^1 \exp(-cr) \frac{2 - (1+c)r + cr^2/2}{\sqrt{1-r}} dr}{\int_0^1 \exp(-cr) \frac{2-r}{\sqrt{1-r}} dr}, \quad (13)$$

式中已作了用 r 替换 r^2 的简化. 平面 $z=0$ 处横向交叉光束宽度 $W_{xy}(0)$ 可以证明为零,

$$W_{xy}^2(0) = -\frac{\lambda^2}{\pi^3} c^2 \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp(-cr^2) \frac{(2+r\sin 2\theta - r^2)r^3 \sin 2\theta}{2\sqrt{1-r^2}} dr d\theta}{\int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{2r-r^3}{\sqrt{1-r^2}} dr} = 0. \quad (14)$$

平面 $z=0$ 处 x 方向上的光束曲率 $\frac{W_x^2(0)}{R_x(0)}$ 根据(11) 式再利用傅里叶变换的性质可得

$$\frac{W_x^2(0)}{R_x(0)} = \frac{4}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \langle S_x \rangle dx dy = \frac{4w_0^2}{\lambda} \frac{\text{Im} \left\{ \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp(-cr^2) \frac{(2-r^2\sin 2\theta - r^2)r^3 \cos^2 \theta}{r^2 - 1} dr d\theta \right\}}{\int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{2r-r^3}{\sqrt{1-r^2}} dr} = 0, \quad (15)$$

式中 Im 表示取虚部. 同理, 可以得到 $z=0$ 平面处 y 方向的光束曲率 $\frac{W_y^2(0)}{R_y(0)}$ 和交叉光束曲率 $\frac{W_{xy}^2(0)}{R_{xy}(0)}$ 分别为

$$\begin{aligned} \frac{W_y^2(0)}{R_y(0)} &= 0, \\ \frac{W_{xy}^2(0)}{R_{xy}(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

x 和 y 方向上的发散角 θ_x 和 θ_y 由(12) 式经运算简化后为

$$\tan^2 \theta_x = \tan^2 \theta_y = 2 \frac{\int_0^1 \exp(-cr) \frac{2r-r^2}{(1-r)^{3/2}} dr}{\int_0^1 \exp(-cr) \frac{2-r}{\sqrt{1-r}} dr}. \quad (17)$$

(17) 式也作了用 r 替换 r^2 的简化. 而横向交叉发散角 θ_{xy} 为

$$\begin{aligned} \tan^2 \theta_{xy} &= \frac{4}{\pi} \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp(-cr^2) \frac{(2-r^2)r^3 \cos \theta \sin \theta}{(1-r^2)^2} dr d\theta}{\int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{2r-r^3}{\sqrt{1-r^2}} dr} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

因此(10) 式可简洁地表示为

$$W_i^2(z) = W_i^2(0) + z^2 \tan^2 \theta_i, \quad (19)$$

其中 $i = x, y$. 因此, 基于二阶矩定义的二个横向光束宽度在光束传播过程中满足简单的双曲线变化规律. 为了得到(13) 和(17) 式的解析结果, 采取下述数学处理. 先对两个根式进行 Taylor 展开

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-r)^{3/2}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)! r^m}{2^{2m} (m!)^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{1-r}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)! r^m}{2^{2m} (m!)^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

其次, 利用数学积分公式,

$$T_n = \int_0^1 \exp(-cr)r^n dr = -\frac{\exp(-c)}{c^{n+1}} \{c^n + nc^{n-1} + n(n-1)c^{n-2} + \dots + n!\} + \frac{n!}{c^{n+1}}, \quad (21)$$

式中, n 为任意正整数. 最后 (13) 和 (17) 式可用级数形式分别表示为

$$W_x^2(0) = W_y^2(0) = \frac{\lambda^2}{\pi^2} c \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)[4T_m - 2(1+c)T_{m+1} + cT_{m+2}]}{2^{2m+1}(m!)^2}}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)(2T_m - T_{m+1})}{2^{2m}(m!)^2}}, \quad (22)$$

$$\tan^2 \theta_x = \tan^2 \theta_y = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)(2T_{m+1} - T_{m+2})}{2^{2m+1}(m!)^2}}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)(2T_m - T_{m+1})}{2^{2m}(m!)^2}}. \quad (23)$$

根据非傍轴光束传输因子的定义^[2-4], 非傍轴矢量高斯光束两个横向上的光束传输因子 M_x^2 和 M_y^2 为

$$M_x^2 = M_y^2 = \sqrt{c} \sqrt{\frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)[4T_m - 2(1+c)T_{m+1} + cT_{m+2}]}{2^{2m}(m!)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)(2T_{m+1} - T_{m+2})}{2^{2m}(m!)^2}}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)(2T_m - T_{m+1})}{2^{2m}(m!)^2}}}. \quad (24)$$

3. 分析与讨论

尽管 (22)~(24) 式是用级数形式表示的, 但在两种极端情形下, 还可以作进一步简化.

3.1. 高度非傍轴情形

在 $c \ll 1$ 即 $w_0 \ll 0.22\lambda$ 时, 称之为高度非傍轴情形. 此时, 下式成立:

$$\exp(-c) = 1 - c. \quad (25)$$

那么, 两个横向上的束腰可简洁地表示为

$$W_x(0) = W_y(0) = \sqrt{2}w_0 \left(1 - \frac{3c}{20}\right). \quad (26)$$

而横向远场发散角退化为

$$\tan \theta_x = \tan \theta_y = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{5}\right). \quad (27)$$

在光源的半宽度 $w_0 = 0$ 的极限情形下, 横向的最大发散角为 90° , 这超过了非傍轴标量高斯光束最大横向远场发散角的极限 63.43° ^[10, 11]. 相应的光束传输因子为

$$M_x^2 = M_y^2 = \sqrt{\frac{3c}{2}} \left(\frac{1}{c} - \frac{7}{20}\right). \quad (28)$$

3.2. 傍轴情形

当 c 很大时即 $w_0 \gg \lambda$ 时为傍轴情形. 在 (22)~

(24) 式中, m 取 0, 1 两项. 此时两方向上的束腰为

$$W_x(0) = W_y(0) = w_0 \sqrt{\frac{8T_0 - 4cT_1 - 2T_2 + cT_3}{4T_0 - T_2}} = w_0. \quad (29)$$

同时, 两方向上的发散角可由下式给出:

$$\tan \theta_x = \tan \theta_y = \sqrt{\frac{8T_1 + 8T_2 - 6T_3}{4T_0 - T_2}} = \sqrt{\frac{2}{c}} \left(1 + \frac{1}{c}\right), \quad (30)$$

发散角要稍大于原有傍轴公式所给出的值 $\sqrt{\frac{2}{c}}$. 对应两方向上的光束传输因子为

$$M_x^2 = M_y^2 = 1 + \frac{1}{c}. \quad (31)$$

所以, 对于光源线度远大于波长的非傍轴矢量高斯光束, M^2 因子存在一个只能无限趋近而永远都不能达到的下限 1.

3.3. 与非傍轴标量高斯光束的比较

图 1 给出了束腰 $W(0)$ 和发散角 θ 与高斯光源半宽度 w_0 的变化关系. 实线表示非傍轴矢量高斯光束, 虚线对应于非傍轴标量高斯光束. 非傍轴标量高斯光束与非傍轴矢量高斯光束的最大差别在于它忽略了电磁场的 z 分量. 两种情形下的束腰基本是相等的. 但是, 电磁场的 z 分量对远场发散角是有影响的. 特别是对于线度在两个波长之内的高斯光源, 这

种贡献是比较大的,不能忽略.

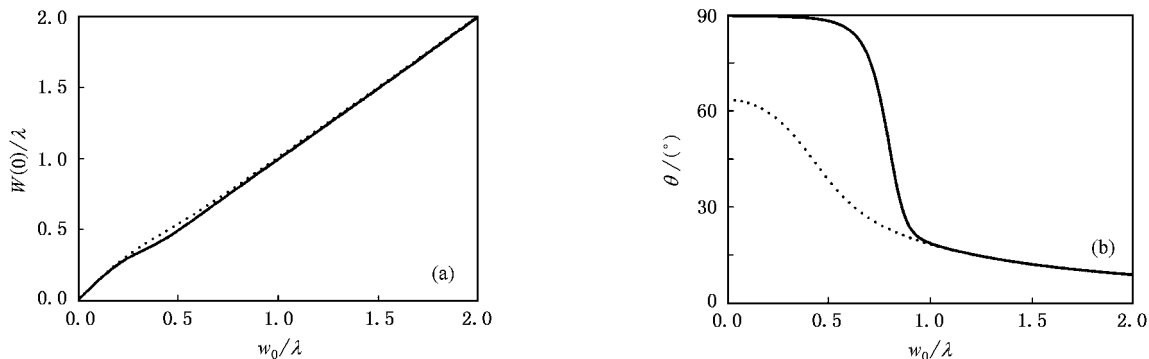


图 1 束腰 $W(0)/\lambda$ (a) 和发散角 θ (b) 与高斯光源半宽度 w_0 的变化关系. 实线和虚线分别对应于非傍轴矢量高斯光束和非傍轴标量高斯光束.

4. 结 论

基于非傍轴光束传输的矢量矩理论, 对非傍轴矢量高斯光束的传输特性进行了研究, 给出了光束传输因子的解析表达式. 二阶矩定义下的横向光束宽度在光束传播过程中满足双曲线变化规律. 在高斯光源线度远小于波长的高度非傍轴情形下, 进一步给出了简单且便于计算的束腰、发散角和光束传输因子的公式. 横向的最大发散角为 90° , 超过了非傍轴标量高斯光束远场发散角的极限 63.43° . 同时,

还推广到了傍轴情形, 得到了与原有傍轴公式稍有区别的结果, 且 M^2 因子存在一个只能无限趋近的下限 1. 最后, 对用标量和矢量表征非傍轴高斯光束在二阶矩传输方面进行了比较, 结果表明对于线度在两个波长范围之内的高斯光源, 发散角有很大的差异, 并分析了原因. 该研究结果有助于将复杂高斯光束由傍轴传输特性的研究^[12] 向非傍轴领域拓展, 有益于理解光束在复数折射率介质中传输的物理图像^[13]. 对超短脉冲光束在自由空间的矢量非傍轴传输研究^[14] 具有参考价值.

- [1] Belanger P A 1991 *Opt. Lett.* **16** 196
 [2] Cao Q, Deng X M, Guo H 1996 *Acta Opt. Sin.* **16** 1217 (in Chinese) [曹 清、邓锡铭、郭 宏 1996 光学学报 **16** 1217]
 [3] Porras M A 1999 *Optik* **110** 417
 [4] Porras M A 1996 *Opt. Commun.* **127** 79
 [5] Zhou G Q, Zhao D M, Xu J X *et al* 2001 *Opt. Commun.* **187** 395
 [6] Cao Q, Deng X M 1996 *Acta Opt. Sin.* **16** 1345 (in Chinese) [曹 清、邓锡铭 1996 光学学报 **16** 1345]
 [7] Lezec H J, Degiron A, Devaux E *et al* 2002 *Science* **297** 820
 [8] Rhodes D R 1964 *Proc. IEEE* **52** 1013
 [9] Chen C G, Konkola P T, Ferrera J *et al* 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 404

- [10] Zhao L H, Cheng J L 2002 *J. Zhejiang Forest. Coll.* **19** 426 (in Chinese) [赵丽华、陈均朗 2002 浙江林学院学报 **19** 426]
 [11] Deng X J, Chu D L, Hu J G *et al* 2003 *J. Hefei Univ. Tech.* **25** 501 (in Chinese) [邓小玖、储德林、胡继刚等 2003 合肥工业大学学报 **25** 501]
 [12] Wang X Q, Lü B D 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 247 (in Chinese) [王 喜庆、吕百达 2002 物理学报 **51** 247]
 [13] Liu C Y, Deng D M, Hu W *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 524 (in Chinese) [刘承宜、邓冬梅、胡 巍等 2002 物理学报 **51** 524]
 [14] Lu D Q, Hu W, Yang Z J *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1063 (in Chinese) [陆大全、胡 巍、杨振军等 2004 物理学报 **53** 1063]

Propagation of nonparaxial vector Gaussian beam^{*}

Zhou Guo-Quan

(*Department of Information Physics , Research Institute of Photoelectron , Zhejiang Forestry University , Linan 311300 , China*)

(Received 20 May 2004 ; revised manuscript received 19 August 2004)

Abstract

Based on the nonparaxial vectorial moment theory of light beam propagation , the propagation characteristics of nonparaxial vector Gaussian beam have been systemically investigated . The results reveal that both the second-order-moment transversal beam widths follow a simple hyperbolic law for propagation . The analytical expression of the beam propagation factor is presented . The concise formulae have been further given for highly nonparaxial case . And the maximum transverse divergences are 90° as the dimension of light source tends to zero . When extending to the paraxial case , the obtained results are slightly different from the formerly paraxial formulae . Moreover , the beam propagation factor will always be greater than unity . Finally , comparison between the propagation of nonparaxial vector Gaussian beam and that of nonparaxial scalar Gaussian beam indicates that the divergence angles show prodigious discrepancy for Gaussian light source within two times of wavelength scales .

Keywords : vector Gaussian beam , beam propagation , nonparaxial , second order moment

PACC : 4210Q , 4225B

^{*} Project supported by the Scientific Research Fund of Education Department of Zhejiang Province ,China(Grant No. 20030571).