第 54 卷 第 4 期 2005 年 4 月
1000-3290/2005/54(04)/1799-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.54,No.4,April,2005

介观多环耦合系统中的量子电流增强效应

崔元顺

(淮阴师范学院物理系,淮安 223001)

(2004 年 6 月 8 日收到;2004 年 8 月 6 日收到修改稿)

基于电荷具有离散性的事实对介观电路进行量子化,以介观三环为例研究多环耦合系统中的量子电流增强效应.结果表明,量子电流增强效应不仅存在于耦合双环系统中,而且在金属多环系统中也存在.

关键词:介观电路,耦合系统,量子电流,增强效应

PACC:7335,0365

1. 引 言

随着微电子技术的飞速发展,电子器件小型化、电路高集成度的趋势越来越显著.当电路尺寸小到与电子相干长度可以比拟时,在涉及微观电磁现象及在光频下工作的电路问题中,必须考虑器件和电路的量子效应.此外,纳米电子器件有可能作为未来量子计算机中的量子位、量子逻辑门和量子线路,因而近年人们对介观电路的量子力学效应越来越重视[1—5].在对介观电路量子效应研究的进程中,人们注意从不同的角度提出对介观电路量子化方案,就不同的介观电路模型、处于各种特定的量子态下的量子力学效应进行了深入的研究,得到一些具有一定学术价值和意义的结果与结论.这在原理上为微型电路的设计、开发和利用奠定了一定的物理基础[4—13].然而,按照与谐振子类似的方法量子化介观电路,其结果仅导致能量量子化.实际上,介观电路的量子起伏不仅来源于固有的能量量子化和电子波函数的相干性,而且还与电荷的量子化性质密切相关.在实现介观电路全量子理论的研究中,李有泉、陈斌等[14—16]首先将电荷的离散性引入介观电路量子化并给出应用,王继锁等[17]发展了这一理论,文献[18—20]进一步研究了包含耗散在内的量子 Kirchoff 方程、量子传输线以及双环互感系统中的量子电流放大等问题.本文基于介观电路中电荷离散化的量子理论,推广文献[20]的结果,研究介观多环耦合系统中的量子电流增强效应.结果表明,量子电流增强效应不仅存在于耦合双环系统中,而且在金属多环系统中也存在,它是一个纯量子效应.

2. 系统 Hamilton 量

考虑具有自感 L_i 和互感 M_{ij}($i,j=1,2,3,i\neq j$,且 $M_{ij}=M_{ji}$)的三个介观金属环系统,处于外磁场中,各环外磁通为 $\phi_{ei}(t)$ 设 q_i 为各环中 t 时刻通过导体截面的电荷,则系统 Lagrangian 函数 $\mathscr{L}$ 为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\sum_i L_i\dot{q}_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j-\sum_i\dot{\phi}_{ei}q_i,\tag{1}$$

式中等号右端第三项代表每环中由外场感应的电动势.由(1)式可给出与广义"坐标"q_i 共轭的正则"动量"p_i 为

$$p_i=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\mathscr{L}=L_i\dot{q}_i+\sum_j M_{ij}\dot{q}_j,\tag{2}$$

式中 p_i 代表第 i 环中的磁通匝链.用正则变量对(q_i,p_i)表达出(1)式,则为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\sum_i\frac{1}{L_i'}p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}M_{ij}'p_ip_j-\sum_i\dot{\phi}_{ei}q_i,\tag{3}$$

式中有效自感 L_i' 以及系数 M_{ij}' 可分别确定为

$$\begin{aligned}L_1'&=[L_1T_{11}^2+L_2T_{12}^2+L_3T_{13}^2\\&\quad+2(M_{12}T_{11}T_{12}+M_{13}T_{11}T_{23}\\&\quad+M_{23}T_{12}T_{13})]^{-1},\\L_2'&=[L_1T_{12}^2+L_2T_{22}^2+L_3T_{23}^2\\&\quad+2(M_{12}T_{12}T_{22}+M_{13}T_{12}T_{23}\\&\quad+M_{23}T_{22}T_{23})]^{-1},\\L_3'&=[L_1T_{13}^2+L_2T_{23}^2+L_3T_{33}^2\\&\quad+2(M_{12}T_{13}T_{23}+M_{13}T_{13}T_{33}\\&\quad+M_{23}T_{23}T_{33})]^{-1};\end{aligned}\tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
M'_{12} = M'_{21} = & L_1 T_{11} T_{12} + L_2 T_{12} T_{22} \\
& + L_3 T_{13} T_{23} + M_{12}(T_{11} T_{22} + T_{12}^2) \\
& + M_{13}(T_{11} T_{23} + T_{12} T_{13}) \\
& + M_{23}(T_{12} T_{23} + T_{22} T_{13}), \\
M'_{13} = M'_{31} = & L_1 T_{11} T_{13} + L_2 T_{12} T_{23} \\
& + L_3 T_{13} T_{33} + M_{12}(T_{11} T_{23} + T_{12} T_{13}) \\
& + M_{13}(T_{11} T_{33} + T_{13}^2) \\
& + M_{23}(T_{12} T_{33} + T_{13} T_{23}), \\
M'_{23} = M'_{32} = & L_1 T_{12} T_{13} + L_2 T_{22} T_{23} \\
& + L_3 T_{23} T_{33} + M_{12}(T_{12} T_{23} + T_{13} T_{22}) \\
& + M_{13}(T_{12} T_{33} + T_{13} T_{23}) \\
& + M_{23}(T_{22} T_{33} + T_{23}^2).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

这里

$$
\begin{aligned}
T_{11} &= \frac{L_2 L_3 - M_{23}^2}{\det T_0}, \\
T_{12} &= T_{21} = \frac{M_{23} M_{13} - L_3 M_{12}}{\det T_0}, \\
T_{13} &= T_{31} = \frac{M_{12} M_{23} - L_2 M_{13}}{\det T_0}, \\
T_{22} &= \frac{L_1 L_3 - M_{13}^2}{\det T_0}, \\
T_{23} &= T_{32} = \frac{M_{12} M_{13} - L_1 M_{23}}{\det T_0}, \\
T_{33} &= \frac{L_1 L_2 - M_{12}^2}{\det T_0},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

式中 $\det T_0$ 代表由(2)式关系构成的矩阵行列式的值.从而,可将系统经典 Hamilton 量表达成

$$
\begin{aligned}
H &= -\mathscr{L} + \sum_i p_i \dot{q}_i \\
&= \frac{1}{2}\sum_i \frac{1}{L'_i} p_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} M'_{ij} p_i p_j + \sum_i \dot{\phi}_{ei} q_i,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

式中 M_{ij} 的量纲与 L_i 的量纲互为倒数.

考虑电荷具有不连续性的事实对介观电路进行量子化,将一对正则变量(q,p)视为量子力学算符,满足对易关系$[\hat{q},\hat{p}]=\mathrm{i}\hbar$,并且要求其电荷自伴算符 $\hat{q}^+=\hat{q}$的本征值取分立值,即

$$
\hat{q}\,|n\rangle = nq_e\,|n\rangle,
\tag{8}
$$

式中,q_e 为基本电子电量,n 为整数.电荷算符 $\hat{q}$的本征态由整数集标记,此时关于电荷变量的导数需由步长为 q_e 的有限差分取代.相应地,正则动量算符 $\hat{p}$需作如下代换[19]:

$$
\hat{p} \to \hat{P} = \frac{2\hbar}{q_e}\sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}\hat{p}\right).
\tag{9}
$$

对于包围外磁通 $\phi_{ei}(t)$的介观三环金属系统,借助(7)和(9)式,系统量子 Hamilton 算符可写为

$$
\begin{aligned}
\hat{H} = & \frac{2\hbar^2}{q_e^2}\sum_i \frac{1}{L'_i}\sin^2\left(\frac{q_e}{2\hbar}\hat{p}_i\right) \\
& + \frac{2\hbar^2}{q_e^2}\sum_{i\neq j} M'_{ij}\sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}\hat{p}_i\right)\sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}\hat{p}_j\right) \\
& + \sum_i \hat{q}_i\dot{\phi}_{ei},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

式中 L'_i,M'_{ij}如(4),(5)式所述.(10)式含有 $\hat{p}_i$,$\hat{p}_j$ 的交叉耦合项,且以正弦函数形式出现.

3. 介观三环耦合系统中的量子电流增强效应

以 Hamilton 算符(10)式作为计算基础,由 Heisenberg 运动方程可以得到电荷、电流算符的动力学方程为

$$
\frac{\mathrm{d}\hat{q}_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\hbar}{q_e L'_1}\sin\left(\frac{q_e}{\hbar}\hat{p}_1\right) + \frac{2\hbar}{q_e}\cos\left(\frac{q_e}{2\hbar}\hat{p}_1\right)\hat{\alpha}_1,
\tag{11}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\hat{q}_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\hbar}{q_e L'_2}\sin\left(\frac{q_e}{\hbar}\hat{p}_2\right) + \frac{2\hbar}{q_e}\cos\left(\frac{q_e}{2\hbar}\hat{p}_2\right)\hat{\alpha}_2,
\tag{12}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\hat{q}_3}{\mathrm{d}t} = \frac{\hbar}{q_e L'_3}\sin\left(\frac{q_e}{\hbar}\hat{p}_3\right) + \frac{2\hbar}{q_e}\cos\left(\frac{q_e}{2\hbar}\hat{p}_3\right)\hat{\alpha}_3,
\tag{13}
$$

其中

$$
\hat{\alpha}_i = \sum_{j\neq i} M'_{ij}\sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}\hat{p}_j\right).
\tag{14}
$$

考察(11)—(13)式的构成,除与各环的电路参数相关外,每一金属环中的量子电流不但决定于自磁通,而且还决定于它环的互磁通以及外磁场.(14)式算符 $\hat{\alpha}_i$ 表征介观金属环间的磁耦合作用,其中各项代表对所考虑金属环量子电流的贡献成分.

进一步,运用 Heisenberg 运动方程,可将(11)—(14)式中 $\hat{p}_i$ 用外磁通表示.令 $t>0$ 时刻第 i 环(例如 $i=1$)中磁通为 $\phi_{e1}=\phi_{e1}(t)$,其余为零;且设磁通初值分别为 $\phi_{e1}(0)=\phi_{10}$,$\phi_{e2}(0)=\phi_{20}$,$\phi_{e3}(0)=\phi_{30}$,经过计算可确定出

$$
\begin{aligned}
\hat{p}_1 &= \phi_{e1}(t)\hat{I} + \hat{\phi}_{10}, \\
\hat{p}_2 &= \hat{\phi}_{20}, \\
\hat{p}_3 &= \hat{\phi}_{30},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

其中 $\hat{I}$ 为单位算符.将(15)式代入(11)—(14)式,可给出电荷算符随外磁通的演化关系为

$$
\frac{\mathrm{d}\hat{q}_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\hbar}{q_e L'_1}\sin\left[\frac{q_e}{\hbar}(\phi_{e1}\hat{I} + \hat{\phi}_{10})\right]
$$

$$+\frac{2\hbar}{q_e}\cos\left[\frac{q_e}{2\hbar}(\phi_{e1}\hat{I}+\hat{\phi}_{10})\right]$$
$$\times\left[M'_{12}\sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}\hat{\phi}_{20}\right)+M'_{13}\sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}\hat{\phi}_{30}\right)\right], \tag{16}$$

$$\frac{d\hat{q}_2}{dt}=\frac{\hbar}{q_eL'_2}\sin\left(\frac{q_e}{\hbar}\hat{\phi}_{20}\right)+\frac{2\hbar}{q_e}\cos\left(\frac{q_e}{2\hbar}\hat{\phi}_{20}\right)$$
$$\times\left\{M'_{12}\sin\left[\frac{q_e}{2\hbar}(\phi_{e1}\hat{I}+\hat{\phi}_{10})\right]\right.$$
$$\left.+M'_{23}\sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}\hat{\phi}_{30}\right)\right\}, \tag{17}$$

$$\frac{d\hat{q}_3}{dt}=\frac{\hbar}{q_eL'_3}\sin\left(\frac{q_e}{\hbar}\hat{\phi}_{30}\right)+\frac{2\hbar}{q_e}\cos\left(\frac{q_e}{2\hbar}\hat{\phi}_{30}\right)$$
$$\times\left\{M'_{13}\sin\left[\frac{q_e}{2\hbar}(\phi_{e1}\hat{I}+\hat{\phi}_{10})\right]\right.$$
$$\left.+M'_{23}\sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}\hat{\phi}_{20}\right)\right\}. \tag{18}$$

为考察耦合介观多环系统中量子电流的性质,控制或选择介观多环系统处于某状态 $|\psi\rangle$ 下,以致初始磁通平均值 $<\hat{\phi}_{10}>=<\hat{\phi}_{20}>=<\hat{\phi}_{30}>=0$,则(16)—(18)式的平均值成为

$$<\frac{d\hat{q}_1}{dt}>=\frac{\hbar}{q_eL'_1}\sin\left(\frac{q_e}{\hbar}\phi_{e1}\right), \tag{19}$$

$$<\frac{d\hat{q}_2}{dt}>=\frac{2\hbar}{q_e}M'_{12}\sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}\phi_{e1}\right), \tag{20}$$

$$<\frac{d\hat{q}_3}{dt}>=\frac{2\hbar}{q_e}M'_{13}\sin\left(\frac{q_e}{2\hbar}\phi_{e1}\right). \tag{21}$$

比较(19)—(21)式可见,公式的等号右端虽然均与(1 环中)外磁通 ϕ_{e1} 呈正弦式的函数关系,但其宗量存在倍角或半角差异,因而它们的大小非'同步".为明显起见,进一步假设外磁场不随时间 t 改变,即 $\phi_{e1}(t)=\phi_{e0}$,则对于整数 n,当满足 $\frac{q_e\phi_{e0}}{\hbar}=n\pi$ 条件时,有

$$<\frac{d\hat{q}_1}{dt}>=0,$$
$$<\frac{d\hat{q}_2}{dt}>=\frac{2\hbar}{q_e}M'_{12}, \tag{22}$$
$$<\frac{d\hat{q}_3}{dt}>=\frac{2\hbar}{q_e}M'_{13}.$$

(22)式显示,当 1 环中电流为零时,而其余各环中电流竟达最大.该结果表明,介观三环耦合系统中存在量子电流增强效应,(22)式中包含 Planck 常数和电荷量子,因而为纯量子效应.

为定量地确定耦合介观金属环系统中量子电流的增强效应,现结合(4)—(6)式和实验可及的介观尺度[21, 22],给出(19)—(21)式的数值计算结果(图 1、图 2).在图 1、图 2 中,横轴代表自变量 $\theta=\frac{q_e}{\hbar}\phi_{e1}$

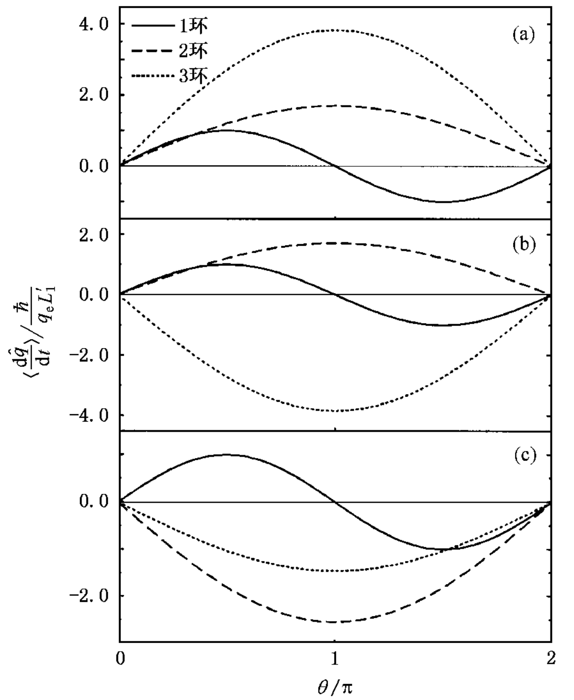

图 1 自感相同时量子电流随外磁通的变化曲线

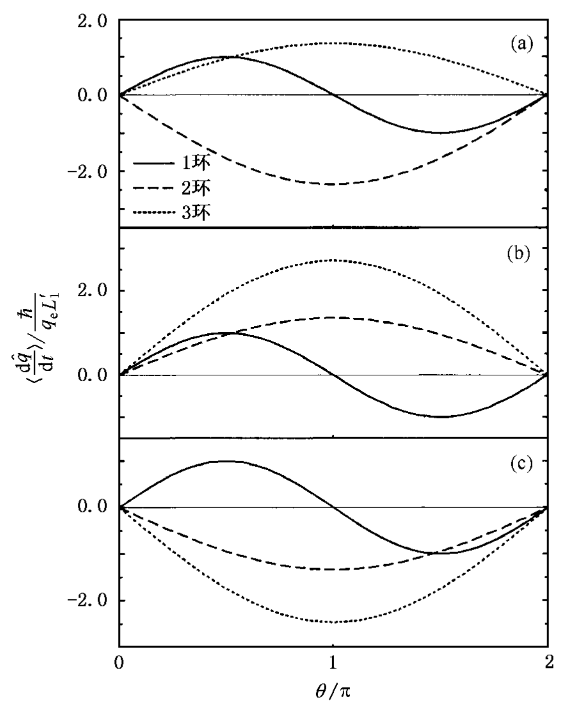

图 2 自感不同时量子电流随外磁通的变化曲线

的变化，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 纵轴代表平均电流 $< \frac{d\hat{q}_i}{dt} >$ 的大小，并以$\frac{\hbar}{q_e L'_1}$为单位进行标度，三个介观金属环中量子电流幅度的相对大小分别成为：1，$2L'_1 M'_{12}$ 和 $2L'_1 M'_{13}$. 为使(10)式中自能项非负、有限，选择电路参数满足 $L'_i > 0$ 进行计算. 图 1 为自感系数相同时介观三环中量子电流随外磁通的变化曲线，其中自感 $L_i = 0.60 \times 10^{-6}$ H. 取不同互感系数时的计算结果分别如图 1(a)，(b)，(c)所示，可见介观金属三环间互感系数的不同明显地对各环中量子电流的大小及方向产生影响. 图 2 为介观三环的自感系数不相同时的算例，结果表明，介观三环系统中自感系数的不同以及互感系数的不同均直接影响各环中量子电流的相对大小及其方向. 由图 1、图 2 可见，作为 1 环中外磁通的函数，各环中量子电流最大值对应的 θ 值位置不同. 由于各金属环的自感、互感系数通常不相等，以致 M'_{12}，M'_{13} 不相同，各金属环中量子电流的最大值也不相同，即量子电流最大值的相对大小决定于介观多环系统中的自感、互感电参数. 特别地，在 $\theta = \pi$ 处，相对于 1 环，其余各环中显现出量子电流放大效应.

4. 结 论

本文基于介观电路中电荷离散化的量子理论，研究耦合金属环系统中的量子电流增强效应. 文中虽以介观三环系统为例加以计算，但从(11)—(13)式，或者从(16)—(18)式的结构形式不难找出其结果的规律性，尤其是(14)式集中代表了多环间的相互影响因素. 通过重复(1)—(3)式的推导过程，重新给出类似(4)，(5)式所表示的各系数 L'_i，M'_{ij} 的具体内容，容易将其结果推广至介观多环系统. 与此同时，若不考虑第三环的存在，则结果退化成双环互感系统的情况[20]. 本文结果表明，量子电流增强效应不仅在耦合双环系统中存在，而且在金属多环系统中也存在，并且存在的形式及其复杂性与介观多环系统中自感、互感电参数密切相关.

[1] Srivastava Y，Widom A 1987 *Phys*. *Rep*. **148** 1

[2] Buot F A 1993 *Phys*. *Rep*. **234** 73

[3] Garcia R G 1992 *Appl*. *Phys*. *Lett*. **60** 1960

[4] Wang J S，Liu T K，Zhan M S 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 2271 (in Chinese) [王继锁、刘堂昆、詹明生 2000 物理学报 **49** 2271]

[5] Wang J S，Liu T K，Zhan M S 2000 *Acta Photo*. *Sin*. **29** 22 (in Chinese) [王继锁、刘堂昆、詹明生 2000 光子学报 **29** 22]

[6] Ji Y H 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 332 (in Chinese) [嵇英华 2003 物理学报 **52** 332]

[7] Gu Y J 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 965 (in Chinese) [顾永建 2000 物理学报 **49** 965]

[8] Liang M L，Yuan B 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 978 (in Chinese) [梁麦林、袁 兵 2003 物理学报 **52** 978]

[9] Wang Z Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1808 (in Chinese) [汪仲清 2002 物理学报 **51** 1808]

[10] Wang Z C 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2870 (in Chinese) [王忠纯 2003 物理学报 **52** 2870]

[11] Cui Y S 1998 *Chin*. *J*. *Quantum Electron* **15** 542 (in Chinese) [崔元顺 1998 量子电子学报 **15** 542]

[12] Cui Y S 1999 *Chin*. *J*. *Quantum Electron* **16** 310 (in Chinese) [崔元顺 1999 量子电子学报 **16** 310]

[13] Cui Y S 1998 *Acta Photo*. *Sin*. **27** 517 (in Chinese) [崔元顺 1998 光子学报 **27** 517]

[14] Li Y Q，Chen B 1996 *Phys*. *Rev*. B **53** 4027

[15] Chen B，Li Y Q *et al* 1997 *Acta Phys*. *Sin*. **46** 129 (in Chinese) [陈 斌、李有泉等 1997 物理学报 **46** 129]

[16] Chen B，Shen X J，Li Y Q 2003 *Phys*. *Lett*. A **313** 431

[17] Wang J S，Feng J，Zhan M S 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 299 (in Chinese) [王继锁、冯 健、詹明生 2001 物理学报 **50** 299]

[18] Lu T，Li Y Q 2002 *Mod*. *Phys*. *Lett*. **16** 1

[19] Flores J C 2001 *Phys*. *Rev*. B **64** 235309

[20] Flores J C 2002 *Phys*. *Rev*. B **66** 153410

[21] Levy L P，Dolan G，Dunsmuir J *et al* 1990 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **64** 2074

[22] Zou J，Shou B 2001 *Phys*. *Rev*. B **64** 024511

Effect of quantum current magnification in a mesoscopic multi-ring coupling system

Cui Yuan-Shun

(*Department of Physics*, *Huaiyin Teachers College*, *Huaian* 223001, *China*)

(Received 8 June 2004; revised manuscript received 6 August 2004)

Abstract

Based on the fact that the charge is discreteness in the mesoscopic circuit, taking 3-rings for example, the effect of quantum current magnification in a mesoscopic multi-ring coupling system has been investigated. The results show that the effect of quantum current magnification not only can be observed in a dual-ring coupling system, but also in the metallic multi-ring coupling circuit.

Keywords: mesoscopic circuit, coupling system, quantum current, magnification effect

PACC: 7335, 0365