

分层球形导体中任意位置直流电流元 产生电位的解析解*

肖春燕[†] 雷银照

(北京航空航天大学自动化与电气工程学院, 北京 100083)

(2004 年 8 月 20 日收到, 2004 年 12 月 16 日收到修改稿)

建立了任意层球形导体头模型, 从泊松方程出发, 利用电磁边界条件求解了分层球形导体中由任意位置直流电流元产生电位的一般解析解, 并且给出了一种以矩阵形式表示的快速求解电位表达式中相关系数的方法. 以表示头皮、颅骨、脑脊液和脑的四层球形导体模型为例, 对解析解进行了计算. 结果表明, 此解在除源点外的全域内收敛, 且比仅用球谐函数展开形式的电位收敛快, 计算量明显降低. 给出了等位线图和流线图, 表明低电导率对电位分布和电流流向的影响不可忽视. 还给出了球表面电位分布特征, 这有利于脑电逆问题的研究以及对脑电位测量结果的解释.

关键词: 电位, 电流元, 分层球形导体, 脑电

PACC: 8770F, 0350D, 0420J

1. 引言

电位解析解的研究是脑电和脑磁正、逆问题的一项基础理论研究[1]. 目前, 已有一些文献给出了球形导体头模型内电偶极子产生电位的解析表达式. 文献[2—4]建立了简单球形导体模型, 通过将无穷区域上电位解析式进行勒让德级数展开, 并构造了一个电位添加项, 使电位满足其法向导数在球表面上为零这一边界条件, 从而求得电位表达式, 其解的范围适用于头的表层或浅层. 文献[5—9]考虑无源区域, 求解了三层或四层球形导体中位于最内层的电流源产生的电位, 同样, 其解的范围不包含头的深层区域和电流元所在球面. 文献[10]从泊松方程出发, 将解直接写成拉普拉斯方程的解, 即球谐函数展开形式的电位, 根据边界条件求得电位中的待定系数. 但是在电流元所在球面上, 泊松方程的解应为特解加上拉普拉斯方程的解. 因此, 上述文献或未给出电流元所在球面上和深层区域的电位表达式, 或给出的在电流元所在球面上的电位结果不当. 同时, 对电位进行的仿真计算表明, 级数在电流元所在球面附近收敛困难[11], 而在电流元所在球面上不收敛.

此外, 上述文献的电流元均位于球形导体最内层.

本文将以前多层球形导体为头模型, 推导置于导体中任意位置的直流电流元产生电位的一般解析解. 此解在除源点外的全域上快速收敛. 首先建立了源和头的物理模型, 然后从泊松方程出发, 给出泊松方程的特解和通解表达式. 利用边界条件求解了各区域的电位分布, 并给出了矩阵形式系数的快速求解方法. 验证了本文所得电位解析解的正确性. 最后以四层导体为例, 给出了电位仿真结果以及等位线图和流线图. 通过仿真计算比较本文结果与仅用球谐函数展开形式电位的收敛速度, 分析了颅骨低电导率对电位分布以及电流流向的影响, 并给出头皮电位的分布特征.

2. 模型的建立

将头描述为分层常电导率的体积导体来模仿具有不同电导率的头内各层组织. 建立如图 1 所示的球坐标系 (r, θ, φ) . 假设分层均匀体积导体的电导率函数 $\sigma(r)$ 在 $r = r_1, r_2, \dots, r_N$ ($r_1 > r_2 > \dots > r_N$) 处发生变化, 而每一层的电导率 σ_j 为常数. 假设直流电流元的矩矢量 $\mathbf{P}(r_0, \theta_0, \varphi_0) = Id$, 其中 I 为电流, d 为

* 国家自然科学基金(批准号: 50377002)资助的课题.

[†]E-mail: xiao_chunyan@163.com

与电流同向的长度矢量, 位于第 k 层内, 即 $r_k \geq r_0 > r_{k+1}$ ($k=0, 1, \dots, N$). P 为 P 的大小, θ_p 为 P 与 z 轴所成夹角, φ_p 为 P 在 xoy 平面上的投影与 x 轴所成夹角.

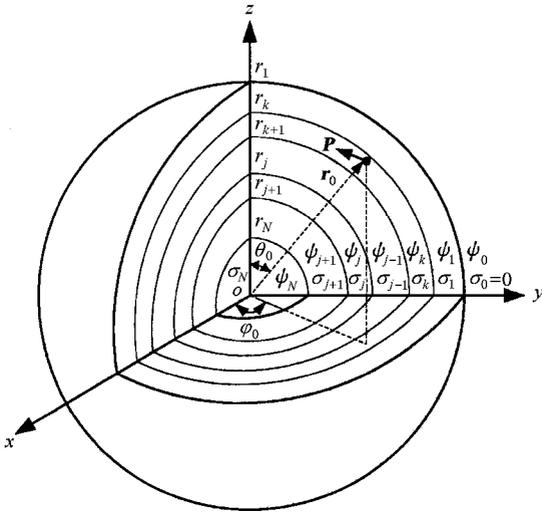


图 1 球坐标系下分层导体示意图

3. 电位解析表达式

根据麦克斯韦方程组, 每一层体积导体 $r_j \geq r \geq r_{j+1}$ ($j=0, 1, \dots, N$) 中的电位 ψ_j 满足泊松方程^[12,13]

$$\nabla \cdot (\sigma_j \nabla \psi_j) = \delta_j^k \nabla \cdot \mathbf{J}_s, \quad (1)$$

式中 δ_j^k 为克罗内克 δ 符号, 当 $j=k$ 时, $\delta_j^k=1$, 当 $j \neq k$ 时, $\delta_j^k=0$, \mathbf{J}_s 为直流电流元的电流密度,

$$\mathbf{J}_s = P\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = P\delta(\mathbf{R}), \quad (2)$$

式中 δ 为三维 δ 函数^[14], \mathbf{r} 为从坐标原点到场点的矢量, \mathbf{r}_0 为从坐标原点到源点的矢量.

将 (2) 式代入 (1) 式得

$$\nabla^2 \psi_j = \delta_j^k \nabla \cdot \left[\frac{1}{\sigma_k} P\delta(\mathbf{R}) \right]. \quad (3)$$

当 $j=k$ 时, 方程 (3) 的特解为

$$S_k = \frac{P \cdot \mathbf{R}}{4\pi\sigma_k R^3} = \frac{P(r \cos\beta - r_0 \cos\beta_0)}{4\pi\sigma_k (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\gamma)^{3/2}}, \quad (4)$$

式中 γ 为 \mathbf{r}_0 与 \mathbf{r} 的夹角,

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0);$$

β 为 P 与 \mathbf{r} 的夹角,

$$\cos\beta = \cos\theta \cos\theta_p + \sin\theta \sin\theta_p \cos(\varphi - \varphi_p);$$

β_0 为 \mathbf{r}_0 与 P 的夹角,

$$\cos\beta_0 = \cos\theta_p \cos\theta_0 + \sin\theta_p \sin\theta_0 \cos(\varphi_p - \varphi_0).$$

于是, 对于每一层 $r_j \geq r \geq r_{j+1}$ ($j=0, 1, \dots, N$) (3) 式的通解表达式为

$$\psi_j = \delta_j^k S_k + P \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_j^{nm} r^n + B_j^{nm} r^{-n-1}) \times Y_{nm}(\theta_0, \varphi_0) Y_{nm}(\theta, \varphi), \quad (5)$$

式中 A_j^{nm}, B_j^{nm} 为待定系数;

$$Y_{nm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} (2 - \delta_m^0)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}$$

$$\times P_n^m(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \quad (6)$$

为 n 阶 m 次正交归一化球谐函数^[15,16], P_n^m 为 n 阶 m 次关联勒让德函数, 为书写方便, 将 $Y_{nm}(\theta_0, \varphi_0)$ 简记为 Y_{nm0} .

4. 边界条件及系数的确定

为了求得未知系数 A_j^{nm} 和 B_j^{nm} , 首先将特解 S_k 写成球谐函数展开形式^[17,18],

$$S_k = \begin{cases} \frac{P}{\sigma_k (r^2 - r_0^2)} \left(\cos\beta - \frac{r_0}{r} \cos\beta_0 \right) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l \left(\frac{r_0}{r} \right)^l Y_{lk0} Y_{lk} & (r > r_0), \\ \frac{\sqrt{2} P (\cos\beta - \cos\beta_0)}{16\pi\sigma_k r_0^2 (1 - \cos\gamma)^{3/2}} & (r = r_0), \\ \frac{P}{\sigma_k (r_0^2 - r^2)} \left(\frac{r}{r_0} \cos\beta - \cos\beta_0 \right) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l \left(\frac{r}{r_0} \right)^l Y_{lk0} Y_{lk} & (r < r_0). \end{cases} \quad (7)$$

将 (7) 式等号两端同乘以 $\sin\theta P_n^m(\cos\theta) \cos m(\varphi - \varphi_0)$, 并对 θ 和 φ 分别在 $[0, \pi]$ 和 $[0, 2\pi]$ 上进行积分. 根据关联勒让德函数 P_n^m 的正交性

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^{m'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_l^l \delta_m^{m'}, \quad (8)$$

得到表达式

$$\Upsilon_n^m = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} S_k \sin\theta P_n^m(\cos\theta) \cos m(\varphi - \varphi_0) d\varphi d\theta. \tag{9}$$

当 $r > r_0$ 时,

$$\Upsilon_0^0 = 0, \tag{10a}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{n \geq 1}^m = & \frac{P}{\sigma_k(2n+1)} \left(\frac{1}{2} (1 + \delta_m^0) \sin\theta_P \cos(\varphi_0 - \varphi_P) P_{n-1}^{m+1}(\cos\theta_0) + \cos\theta_P (n+m) P_{n-1}^m(\cos\theta_0) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (1 - \delta_m^0) \sin\theta_P \cos(\varphi_0 - \varphi_P) (n+m) (n+m-1) P_{n-1}^{m-1}(\cos\theta_0) \right) \frac{r_0^{n-1}}{r^{n+2}}. \end{aligned} \tag{10b}$$

当 $r < r_0$ 时,

$$\begin{aligned} \Upsilon_n^m = & \frac{P}{\sigma_k(2n+1)} \left(\frac{1}{2} (1 + \delta_m^0) \sin\theta_P \cos(\varphi_0 - \varphi_P) P_{n+1}^{m+1}(\cos\theta_0) - \cos\theta_P (n-m+1) P_{n+1}^m(\cos\theta_0) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (1 - \delta_m^0) \sin\theta_P \cos(\varphi_0 - \varphi_P) (n-m+2) (n-m+1) P_{n+1}^{m-1}(\cos\theta_0) \right) \frac{r^n}{r_0^{n+2}}. \end{aligned} \tag{11}$$

令

$$R_{n,k}^{(0)}(r) = \frac{1}{PP_n^m(\cos\theta_0)} \Upsilon_n^m. \tag{12}$$

下面将根据边界条件对系数 A_j^{nm}, B_j^{nm} 进行求解.

4.1. 球心处电位

1) 当 $r_0 \neq 0$ 时, 此时, 球心处电位为一有限值, 必存在一有限正常数 M_1 使得

$$\lim_{r \rightarrow 0} |\psi_N| \leq M_1. \tag{13}$$

根据 (13) 式可得

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \psi_N \sin\theta P_n^m(\cos\theta) \cos m(\varphi - \varphi_0) d\theta d\varphi \right| \\ & = \lim_{r \rightarrow 0} |PP_n^m(\cos\theta_0) R_{n,N}| \\ & < +\infty, \end{aligned} \tag{14}$$

式中

$$R_{n,N} = A_N^{nm} r^n + B_N^{nm} r^{-n-1} + \delta_N^k R_{n,k}^{(0)}. \tag{15}$$

由 (14) 式可得

$$\lim_{r \rightarrow 0} |R_{n,N}| < +\infty. \tag{16}$$

由于

$$|r^n|_{r=0} < +\infty, \tag{17}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} |r^{-n-1}| = +\infty,$$

当 $k = N$ 时,

$$|R_{n,N}^{(0)}| = \begin{cases} \left| -\frac{\cos\beta_0}{\sigma_N r_0^2} \right| < +\infty & (n=0), \\ 0 & (n \geq 1), \end{cases} \tag{18}$$

因此有

$$B_N^{nm} = 0. \tag{19}$$

2) 当 $r_0 = 0$ 时, 此时, 球心处电位

$$\psi_N|_{r \rightarrow 0} \rightarrow \frac{P \cos\beta}{4\pi\sigma_N r^2}. \tag{20}$$

将 $r_0 = 0$ 代入 (5) 式得

$$\psi_N = \frac{P \cos\beta}{4\pi\sigma_N r^2} + P \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_j^{nm} r^n + B_j^{nm} r^{-n-1}) Y_{nm0} Y_{nm}. \tag{21}$$

当 $r \rightarrow 0$ 时, 比较 (20) 和 (21) 式得

$$B_N^{nm} = 0. \tag{22}$$

对 (5) 和 (20) 式两边同乘以 $\sin\theta P_n^m(\cos\theta) \cos m(\varphi - \varphi_0)$ 并对 θ 和 φ 分别在 $[0, \pi]$ 和 $[0, 2\pi]$ 上进行积分, 并根据函数 P_n^m 的正交性, 得

$$\begin{aligned} R_{n,k}^{(0)}|_{r \rightarrow 0+} & \rightarrow \frac{1}{3\sigma_N r^2} \\ & \times \begin{cases} \cos\theta_P & (n=1, m=0), \\ \sin\theta_P \cos(\varphi_0 - \varphi_P) \sin\theta_0 & (n=1, m=1). \end{cases} \end{aligned} \tag{23}$$

结合 (10b) 式得出 $n = 1$.

综上所述, 当 $r_0 = 0$ 时, 有 $B_N^{nm} = 0$ 且 $n = 1$.

4.2. 无穷远处电位

在无穷远处电位为有限值, 则必存在一有限正常数 M_2 使得

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} |\psi_0| \leq M_2. \tag{24}$$

与 (13) 式同理可得

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} |R_{n,0}| < +\infty, \tag{25}$$

式中

$$R_{n,0} = A_0^{nm} r^n + B_0^{nm} r^{-n-1} + \delta_0^k R_{n,k}^{(0)}. \tag{26}$$

由于

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} |R_{n,k}^{(0)}| < +\infty, \tag{27a}$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-n-1} < +\infty, \tag{27b}$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^n \rightarrow +\infty, \quad (27c) \quad \text{式中}$$

因此有

$$A_0^{mm} = 0. \quad (28)$$

4.3. 电位边界条件

在两导电媒质边界 $r = r_j$ 处, 满足以下两个边界条件^[19] (1) 电位相等, $\psi_{j-1} = \psi_j$ (2) 电流密度法向连续, $\sigma_{j-1} E_{j-1,n} = \sigma_j E_{j,n}$, 其中 $E_{j-1,n}$ 和 $E_{j,n}$ 为电场强度法向分量. 于是, 在两区域交界面 $r = r_j$ 处有

$$\begin{aligned} \psi_j|_{r=r_j} &= \psi_{j-1}|_{r=r_j}, \\ \sigma_j \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \Big|_{r=r_j} &= \sigma_{j-1} \frac{\partial \psi_{j-1}}{\partial r} \Big|_{r=r_j}. \end{aligned} \quad (29)$$

(29) 式中两式的等号两端分别同乘以 $\sin\theta P_n^m(\cos\theta) \times \cos m(\varphi - \varphi_0)$, 对 θ 和 φ 分别在 $0 \sim \pi$ 和 $0 \sim 2\pi$ 上进行积分, 根据函数 P_n^m 的正交性, 得

$$\begin{aligned} R_{n,j}|_{r=r_j} &= R_{n,j-1}|_{r=r_j}, \\ \sigma_j \frac{\partial R_{n,j}}{\partial r} \Big|_{r=r_j} &= \sigma_{j-1} \frac{\partial R_{n,j-1}}{\partial r} \Big|_{r=r_j}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$R_{n,j} = A_j^{mm} r^n + B_j^{mm} r^{-n-1} + \delta_j^k R_{n,k}^{(0)}. \quad (31)$$

将 (31) 式代入 (30) 式并加以整理, 可得矩阵形式的系数方程

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} r_j^n & r_j^{-n-1} \\ \sigma_j n r_j^{n-1} & \sigma_j (-n-1) r_j^{-n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_j^{mm} \\ B_j^{mm} \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} r_j^n & r_j^{-n-1} \\ \sigma_{j-1} n r_j^{n-1} & \sigma_{j-1} (-n-1) r_j^{-n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j-1}^{mm} \\ B_{j-1}^{mm} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \delta_{j-1}^k R_{n,k}^{(0)}(r_j) - \delta_j^k R_{n,k}^{(0)}(r_j) \\ \delta_{j-1}^k \sigma_{j-1} R_{n,k}^{(0)}(r_j) - \delta_j^k \sigma_j R_{n,k}^{(0)}(r_j) \end{bmatrix} \\ & \quad (j = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (32)$$

将 $A_0^{mm} = 0$ 和 $B_N^{mm} = 0$ 分别代入 (32) 式并进行整理, 最终可得未知系数

$$\begin{aligned} B_0^{mm} &= -Q_2 [T_N^1]_2, \\ A_N^{mm} &= Q_1 + [T_N^1]_2 B_0^{mm} \quad (N > 1), \end{aligned} \quad (33)$$

式中 $[T_N^1]_2$, $[T_N^1]_1$ 和 Q_1, Q_2 分别为矩阵 T_N^1 和 $Q_{2 \times 1}$ 的元素,

$$T_p^q = \prod_{u=p}^q \frac{1}{(2n+1)\sigma_u} \begin{bmatrix} (n+1)\sigma_u + n\sigma_{u-1} & (\sigma_u - \sigma_{u-1})(n+1)r_u^{-(2n+1)} \\ (\sigma_u - \sigma_{u-1})nr_u^{2n+1} & (n+1)\sigma_{u-1} + n\sigma_u \end{bmatrix} \quad (p, q \text{ 为任意正整数}) \quad (34)$$

$$Q_{2 \times 1} = T_N^{k+1} \begin{bmatrix} r_{k+1}^{-n} R_{n,k}^{(0)}(r_{k+1}) \\ -r_k^{n+1} R_{n,k}^{(0)}(r_k) \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, N-1). \quad (35)$$

特别地, 当 $k = N (N \geq 1)$ 时,

$$B_0^{mm} = r_N^{n+1} R_{n,N}^{(0)}(r_N) [T_N^1]_2, \quad (36)$$

$$A_N^{mm} = [T_N^1]_1 B_0^{mm}. \quad (37)$$

$A_{1 \rightarrow N-1}^{mm}$ 和 $B_{1 \rightarrow N-1}^{mm}$ 可由 A_N^{mm} 和 B_0^{mm} 快速求出,

$$A_j^{mm} = \begin{cases} [T_j^1]_2 B_0^{mm} & (j = 1, 2, \dots, k), \\ A_N^{mm} [T_N^{j+1}]_2 / [T_N^{j+1}]_1 & (j = k+1, k+2, \dots, N-1), \end{cases} \quad (38)$$

$$B_j^{mm} = \begin{cases} [T_j^1]_1 B_0^{mm} & (j = 1, 2, \dots, k-1), \\ -A_N^{mm} [T_N^{j+1}]_1 / [T_N^{j+1}]_1 & (j = k, k+1, \dots, N-1), \end{cases} \quad (39)$$

式中, $[T_N^{j+1}]_1$ 为矩阵 T_N^{j+1} 的行列式.

5. 验证

1) 验证 $\psi_j = \delta_j^k S_k + \psi_j^*$ 是方程

$$\nabla^2 \psi_j = \delta_j^k \nabla \cdot \left[\frac{1}{\sigma_k} P \delta(\mathbf{R}) \right]$$

的解, 其中

$$\psi_j^* = P \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_j^{mm} R_{n,j}^{(1)} + B_j^{mm} R_{n,j}^{(2)}) Y_{nm0} Y_{nm}.$$

在球坐标系下, 由于

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_j^* &= P \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} (A_j^{nm} r^n + B_j^{nm} r^{-n-1}) \right] Y_{nm0} Y_{nm} \\ &+ P \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_j^{nm} r^n + B_j^{nm} r^{-n-1}) \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 Y_{nm}}{\partial \varphi^2} \right] Y_{nm0} \\ &= P \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [A_j^{nm} n r^{n+1} - (n+1) B_j^{nm} r^{-n}] Y_{nm0} Y_{nm} \\ &+ P \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_j^{nm} r^{n-2} + B_j^{nm} r^{-n-3}) \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{nm}}{\partial \varphi^2} \right] Y_{nm0} \\ &= P \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [n(n+1)(A_j^{nm} r^{n-2} + B_j^{nm} r^{-n-3})] Y_{nm0} Y_{nm} \\ &- P \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_j^{nm} r^{n-2} + B_j^{nm} r^{-n-3}) n(n+1) Y_{nm} Y_{nm0} \\ &= 0, \end{aligned}$$

因此有 :当 $j \neq k$ 时 ,

$$\nabla^2 \psi_j = 0.$$

当 $j = k$ 时 ,

$$S_k = \frac{P \cdot R}{4\pi\sigma_k R^3}$$

是方程

$$\nabla^2 S_k = \nabla \cdot \left[\frac{1}{\sigma_k} P \delta(\mathbf{R}) \right]$$

的解 ,就有

$$\nabla^2 \psi_k = \nabla \cdot \left[\frac{1}{\sigma_k} P \delta(\mathbf{R}) \right]$$

成立 .

- 2) 球心处电位满足条件方程 (13) 和 (20) .
- 3) 无穷远处电位为有限值的条件成立 .
- 4) 表达式 (33) , (36) — (39) 满足边界条件 (29) 式 .

6. 仿真与场的讨论

为了清晰地显示头皮、颅骨、脑脊液和脑的电磁参数和几何参数对电位的影响 ,设四层球形导体各层半径分别为 $r_1 = 0.09 \text{ m}$, $r_2 = 0.08 \text{ m}$, $r_3 = 0.07 \text{ m}$, $r_4 = 0.06 \text{ m}$,电导率分别为 $\sigma_1 = 0.461 \text{ S/m}$, $\sigma_2 = 0.0058 \text{ S/m}$, $\sigma_3 = 1.39 \text{ S/m}$, $\sigma_4 = 0.461 \text{ S/m}$. 电流元 $\mathbf{P} = (-\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z) \times 10^{-3} \text{ Am}$,即 $P = \sqrt{17} \times 10^{-3} \text{ Am}$, $\cos \theta_p = 4/\sqrt{17}$, $\varphi_p = 270^\circ$,位于 $\mathbf{r}_0 = 0.03(\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) \text{ m}$,即 $r_0 = 0.03\sqrt{2} \text{ m}$, $\theta_0 = 45^\circ$, $\varphi_0 = 90^\circ$.

6.1. 电位仿真结果

某些位置的电位仿真结果见表 1. 由仿真过程

可知 ,当 n 的上限取 10—20 时 ,球心处、电流元半径处及其附近、球表面以及球外位置上的电位级数和就已收敛 .同时 ,采用同一组参数计算文献 [10] 中仅用球谐函数展开形式的电位 ,结果级数在电流元所在球面附近收敛困难 ,尤其是在电流元所在球面上不收敛 .以上两种形式的电位在点 $(0.04 \text{ m}, 45^\circ, 45^\circ)$ 处的收敛情况如图 2 所示 .对于本文 (5) 式所得电位 ,当 n 的上限取 10 时 ,相对收敛误差为 0.001 ,当 n 的上限取 15 时 ,相对收敛误差为 1.5×10^{-5} ,而采用球谐函数展开形式的电位 ,当 n 的上限取 100 时 ,相对收敛误差为 0.028 .由此可见 ,本文所得电位解析式的收敛速度 ,明显快于球谐函数展开形式电位的收敛速度 .

表 1 某些位置的电位仿真结果

(r, θ, φ)	ψ_j/V
$(0 \text{ m}, 0^\circ, 0^\circ)$	$\psi_4 = -0.2034$
$(0.04 \text{ m}, 45^\circ, 45^\circ)$	$\psi_4 = 0.0785$
$(0.03\sqrt{2} \text{ m}, 45^\circ, 45^\circ)$	$\psi_4 = -5.2886$
$(0.06 \text{ m}, 75^\circ, 60^\circ)$	$\psi_4 = \psi_3 = -0.1996$
$(0.07 \text{ m}, 75^\circ, 60^\circ)$	$\psi_3 = \psi_2 = -0.1763$
$(0.08 \text{ m}, 75^\circ, 60^\circ)$	$\psi_2 = \psi_1 = -0.0086$
$(0.09 \text{ m}, 75^\circ, 60^\circ)$	$\psi_1 = \psi_0 = -0.0078$
$(0.12 \text{ m}, 120^\circ, 150^\circ)$	$\psi_0 = -0.0249$

6.2. 等位线图和流线图

从图 3 可以看出 ,由于第 2 层(颅骨)的低电导率不但削弱了表层(头皮)电位的强度 ,而且使得头皮电位变得模糊 ,其作用相当于对电位分布施加了

低通空间滤波. 图 3 中, 颅骨层内的点 $P_1(0.07 \text{ m}, 45^\circ, 90^\circ)$ 处的电位为 0.6484 V , 而与其相距 0.01 m 同一半径上的点 $P_2(0.08 \text{ m}, 45^\circ, 90^\circ)$ 处的电位则为 0.0631 V , 相对 P_1 点处的电位降低了 90.3% . 同时, 从图 4 也可以看出, 第 2 层(颅骨)的低电导率使电流的流向发生了很大的改变. 从图 4 还可以看出, 头内的电流线均为闭合线.

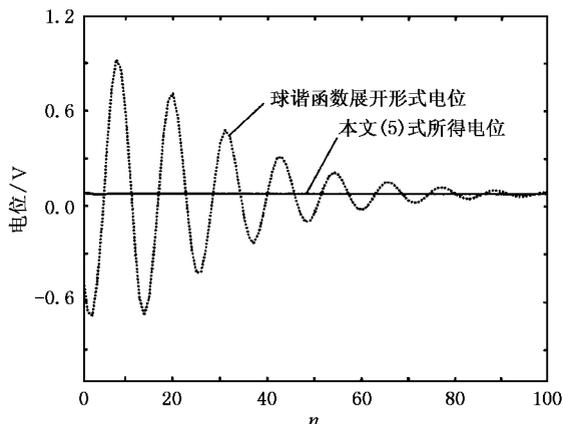


图 2 本文所得的电位与仅用球谐函数展开形式的电位在点 $(0.04 \text{ m}, 45^\circ, 45^\circ)$ 处的收敛情况对比

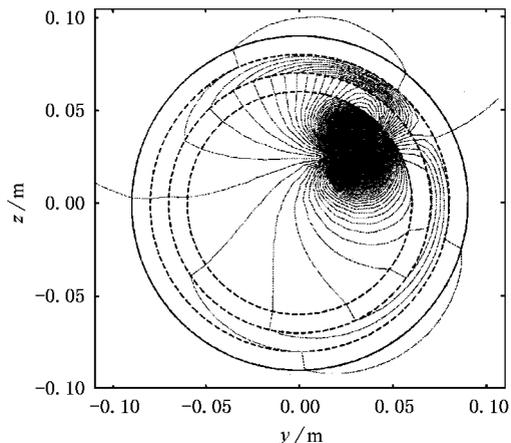


图 3 截面 $\varphi = 90^\circ$ 和 270° 上的等位线

6.3. 球表面等位线

球表面等位线如图 5 所示. 对于位置、大小和方向相同的电流元, 球表面电位是一个相对于电流元所在位置(角度)的函数. 在球表面(头皮)上出现了一个最大(正的)和一个最小(负的)电位值, 即出现了表面电位最大差值, 据此可以确定电流元的大小和方向. 因此, 球表面电位的测量结果依赖于测量位置, 此结果可为求解电流元的方向和大小的大脑电逆

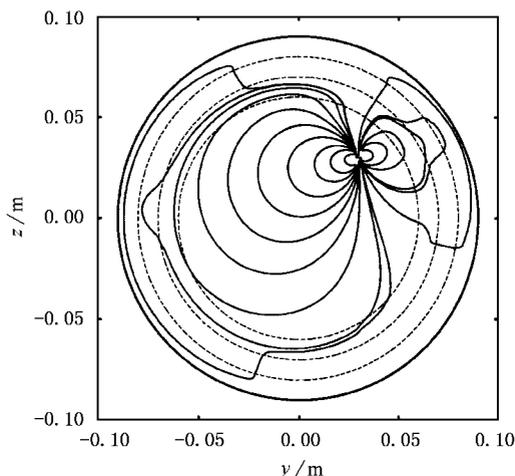


图 4 截面 $\varphi = 90^\circ$ 和 270° 上的流线

问题提供参考.

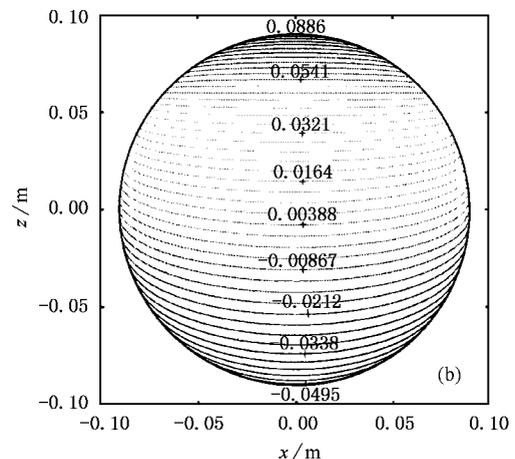
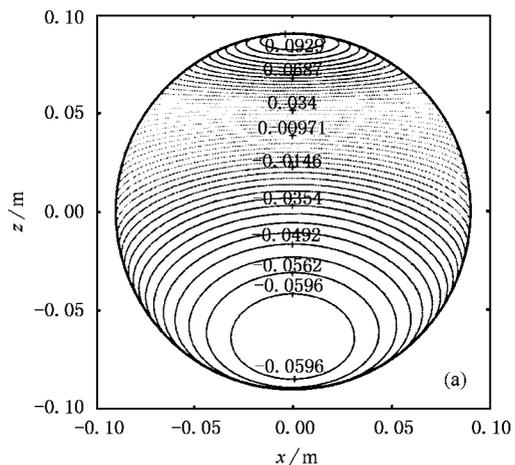


图 5 球表面上等位线在 xoz 平面的投影 (a) $\varphi = 0^\circ - 180^\circ$, (b) $\varphi = 180^\circ - 360^\circ$

7. 结 论

本文给出了多层均匀球形导体中任意位置直流电流元产生电位的解析解. 此结果可用于典型的三层和四层球形导体电位的计算, 也可对头模型的层数进行细分, 为脑电和脑磁正逆问题的研究提供了

便利. 以四层导体模型为例的电位仿真表明, 此结果比球谐函数展开法所得结果的迭代次数少、收敛快, 计算量明显降低. 截面 $\varphi = 90^\circ$ 和 270° 上的等位线图和流线图表明, 颅骨的低电导率削弱了头皮电位, 并使电流流向发生了剧烈变化. 球表面等位线的给出, 可用于脑电测量结果的解释, 并为脑电逆问题的研究提供了参考.

-
- [1] Zhu H Y, Li J, Luo B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2393 (in Chinese)
[朱红毅、李 军、罗 斌 2002 物理学报 **51** 2393]
- [2] Frank E 1952 *J. Appl. Phys.* **23** 1225
- [3] Brody D A 1973 *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **20** 141
- [4] Yao D Z 1994 *Chin. J. Med. Instrum.* **18** 314 (in Chinese) [尧德中 1994 中国医疗器械杂志 **18** 314]
- [5] Hosek R S, Sances A, Jodat R W *et al* 1978 *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **25** 405
- [6] Cuffin B N, Cohen D 1979 *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol.* **47** 132
- [7] Ary J P, Klein S A, Fender D H 1981 *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **28** 447
- [8] Cuffin B N 1991 *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **38** 871
- [9] Zhou H, van Oosterom A 1992 *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **39** 154
- [10] de Munck J C 1988 *J. Appl. Phys.* **64** 464
- [11] de Munck J C, Peter M J 1993 *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **40** 1166
- [12] Geselowitz D B 1967 *Biophys. J.* **7** 1
- [13] Jackson J D 1999 *Classical Electrodynamics* (3rd ed) (New York : Wiley) p43
- [14] Wang Z Y 1991 *Mathematical and Physical Equation and Special Function* (Beijing : Tsinghua University Press) p339 (in Chinese)
[王载舆 1991 数学物理方程及特殊函数 (北京 : 清华大学出版社) 第 339 页]
- [15] Wang Z X, Guo D R 2002 *Special Function Generality* (Beijing : Peking University Press) p238 (in Chinese) [王竹溪、郭敦仁 2002 特殊函数概论 (北京 : 北京大学出版社) 第 238 页]
- [16] Hobson E W 1931 *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Cambridge : Cambridge University Press) p119
- [17] Jeffreys H, Swirles B *et al* 1956 *Methods of Mathematical Physics* (Cambridge : Cambridge University Press) p634
- [18] Courant R 1962 *Methods of Mathematical Physics* (New York : Interscience Publishers) p270
- [19] Liang C H, Chu Q X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2202 (in Chinese)
[梁昌洪、褚庆昕 2002 物理学报 **51** 2202]

Analytical solution of electric potential produced by a direct current point source located in a multilayered spherical volume conductor *

Xiao Chun-Yan Lei Yin-Zhao

(*School of Automation and Electrical Engineering , Beijing University
of Aeronautics and Astronautics , Beijing 100083 , China*)

(Received 20 August 2004 ; revised manuscript received 16 December 2004)

Abstract

A general analytical solution is derived for an electric potential produced by a direct current point source located at any position in a multilayered spherical volume conductor. Starting from Poisson 's equation , the electric potential whose coefficients are rapidly got in the form of matrix expressions is obtained according to the boundary conditions. Simulation for a four-layered spherical volume conductor denoting the scalp , skull , cerebrospinal fluid and brain tissue proves that electric potential in this paper converges more rapidly in the whole region than that expressed only in spherical harmonics expansion form , and iterative times decrease. Electric potential contour and current streamline figures show that it is important to consider the effect of the low conductivity of skull on electric potential and current flow. The distribution of electric potential on the surface of sphere is discussed , which will be useful in electroencephalography inverse problems , and also in analyzing and interpreting the electric potential measurement.

Keywords : electric potential , electric current point source , multilayered spherical conductor , electroencephalography

PACC : 8770F , 0350D , 0420J

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50377002).