第 54 卷 第 5 期 2005 年 5 月
1000-3290/2005/54(05)/1994-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.5, May, 2005

基于特定混沌系统微弱谐波信号频率检测的理论分析与仿真*

李 月[1)] 杨宝俊[2)†] 林红波[1)] 刘晓华[1)]

[1)](吉林大学信息工程系,长春 130012)

[2)](吉林大学地球物理系,长春 130026)

(2004 年 8 月 31 日收到;2004 年 9 月 27 日收到修改稿)

为更完整地研究一类特定的 Duffing-Holmes 方程所建立的混沌系统用于确定微弱谐波未知频率,论证了方程存在周期解并且该解唯一.利用稳定相态周期轨迹特征成功地进行了确定谐波频率的仿真实验;从 1Hz 至 200Hz 变阻尼比(α)计算了检测误差$|\Delta\omega|$.结果表明,不同频率带宽、不同频率相应的 α 值选择需要经过细致仿真实验去加以确定.

关键词:特定混沌系统,混沌系统周期解,稳定相态周期,阻尼比

PACC:0545

1. 引 言

混沌测量方法是一种与现有的各种信号测量方法(以下简称常规信号测量方法)完全不同的崭新的信号处理方法,它一经问世,就受到世界各国信号处理工作者的高度重视[1—3].1992 年 Birx 率先用 Duffing 方程进行了检测谐波信号的实验[4];随后一些学者对混沌检测问题进行了研究,涉及到的测量范围相当广泛,其测量精度也达到了较高水平[5—15];但是上述混沌检测方法仅适用于混沌噪声背景.基于混沌动力学行为的相变进行微弱信号检测是混沌理论用于弱信号检测的一个突破性进展[16—19],打破了以往混沌检测只能用于混沌噪声背景的局限性,具有极高的测量灵敏度和对任何零均值噪声均具有极强的'免疫'力是这一混沌检测方法的特点.这一特点决定了混沌测量方法特别适合于在复杂混合噪声(即相关和不相关的加性噪声,以下同)背景和极低信噪比条件下的信号测量,而这正是常规信号测量方法中的一个长期以来一直未能得到很好解决的尖端问题和信号处理领域中研究的焦点问题.因此,开展混沌测量的理论及方法研究具有重要的理论和应用意义.我国学者已对强噪声背景下谐波、方波信号幅值的混沌检测取得一些结果,其信噪比门限达到约 -60dB[20,21].但是目前混沌检测工作还仅限于检测频率已知的微弱信号.实际中大量存在的谐波信号频率未知.用混沌振子技术检测微弱周期信号频率的机理大致等同于混沌轨道控制[3];为了实现混沌控制的准确性和高效性,先后提出不同的分阶段技术,例如利用弱耗散把 Lyapunov 指数从零变至负数,形成稳定轨道[22];鉴于控制平均时间随周期的快速增长,使用周期拍(periodic pulse)技术[3,23],先控制一个低周期轨道,然后转换扰动,实现对高周期轨道的控制.这些理论和方法也是混沌检测技术的重要基础.本文就一类 Duffing-Holmes 方程所构成的混沌检测系统其周期解的存在性与唯一性进行理论分析;用这类系统成功进行了确定谐波信号未知频率的仿真实验;以及分析阻尼比对谐波频率检测结果的影响,提出实际应用中应注意阻尼比的合适选择.

2. 未知频率混沌检测的理论分析

频率混沌检测的理论分析包括系统存在周期解,并且该周期解唯一.

* 国家自然科学基金(批准号:40374045)资助的课题.

† E-mail:yangbaojun@jlu.edu.cn

2.1. 证明系统存在$\frac{2\pi}{\omega}$为周期的周期解

对于 Duffing-Holmes 方程

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} - x^3 + x^5 = \gamma\cos\omega t, \quad (1)$$

设

$$g(x) = x^5 - x^3 = x^3(x^2 - 1),$$

$$g(x)\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} x^3(x^2-1) & x > 0 \quad \text{当 } x \to +\infty \text{ 时}, x^3 \to +\infty, x^2 - 1 \to \infty, \\ -x^3(x^2-1) & x < 0 \quad \text{当 } x \to -\infty \text{ 时}, -x^3 \to +\infty, x^2 - 1 \to +\infty, \end{cases}$$

所以当$|x| \to +\infty$时,$g(x)\mathrm{sgn}(x) \to +\infty$.又设

$$F(y) = 0.5y, y = \dot{x},$$

$$F(y)\mathrm{sgn}(y) = \begin{cases} 0.5y, & y > 0 \quad \text{当 } y \to +\infty \text{ 时}, 0.5y \to +\infty \\ -0.5y, & y < 0 \quad \text{当 } y \to -\infty \text{ 时}, -0.5y \to +\infty, \end{cases}$$

所以当$|y| \to +\infty$时,$F(y)\mathrm{sgn}(y) \to +\infty$.

若 $P(t) = \gamma\cos(\omega t)$,$\gamma > 0$ 且有界,显然 $P(t)$ 连续且以$\frac{2\pi}{\omega}$为周期,根据 Mizohata-Yamaguti[24] 周期解存在定理,(1)式至少存在一个以$\frac{2\pi}{\omega}$为周期的周期解.需要指出,周期解是指混沌系统进入稳定周期相态条件下的系统解.这一方面要求系统存在周期解,另一方面并不是满足 $\gamma > 0$ 且有界的所有 γ 都能使系统进入稳定周期相态.所以,混沌系统的动力学行为与 γ 的大小有关,只有通过 γ 使混沌系统进入大尺度周期状态,才能借助于混沌系统的周期状态确定待检测信号的未知频率.

2.2. 利用 Yoshizawa[24] 关于周期解唯一性的三组充要条件,证明系统周期解的唯一性

(1)式可等价为方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 0.5x, \\ \dot{y} = x^3 - x^5 + \gamma\cos(\omega t). \end{cases} \quad (2)$$

1) $f(t,x,y) = y - 0.5x$,$g(t,x,y) = x^3 - x^5 + \gamma\cos(\omega t)$,显然 f,g 在 Δ_1:$|x| < +\infty$,$|y| < +\infty$ 以及 $0 \leqslant t \leqslant +\infty$ 上连续,Yoshizawa[24] 关于周期解唯一性的定理中,假设(1)(第一组条件)满足.

2) Hreuter 有界性定理[24],给定方程

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + g(x) = P(t), \quad (3)$$

其中 $g(x)$ 连续,当$|x| \to +\infty$ 时,$g(x)\mathrm{sgn}(x) \to +\infty$,$F(y)$ 连续,当$|y| \to +\infty$ 时,$F(y)\mathrm{sgn}(y) \to +\infty$,$P(t)$ 在$(0,+\infty)$内连续有界,则存在常数 $A > 0$,$B > 0$,使得对于方程的任意解 $x = x(t)$,存在相应的 T_0,当 $t \geqslant T_0$ 时,

$$|x(t)| \leqslant A, |\dot{x}(t)| \leqslant B. \quad (4)$$

对于 Duffing-Holmes 方程(1)式,$P(t) = \gamma\cos\omega t$,很明显$|P(t)| \leqslant |\gamma|$,所以 $P(t)$ 有界结合存在周期解的讨论,可知存在常数 $A > 0$,$B > 0$,使得对于方程的任意解 $x = x(t)$,存在相应的 T_0,当 $t \geqslant T_0$ 时,$|x(t)| \leqslant A$,$|\dot{x}(t)| \leqslant B$.

对于 Duffing-Holmes 方程(1)的等价方程组(2)

$$|x(t)| \leqslant A; |y(t)| = |\dot{x}(t) + 0.5x| \leqslant |\dot{x}(t)| + 0.5|x(t)| \leqslant B + 0.5A = C,$$

满足假设条件(2)(第二组条件),即(4)式.

3) 对 Duffing-Holmes 方程(1)

设

$$\phi(x,u,y,v) = (-x^3 + x^5 + u^3 - u^5)(x - u) + (y - v)^2 - 2C(x - u)(y - v),$$

C 为常数.

证明函数 $\phi(x,u,y,v)$,满足 Yoshizawa[24] 关于周期解唯一性定理的第三组条件.

证　(a)$|x - u| + |y - v| > 0 \Rightarrow x = u$ 和 $y = v$ 不同时成立

$$\begin{aligned} &\phi(x,u,y,v) \\ &= (x-u)^2(x^4 + x^3u + x^2u^2 \\ &\quad + xu^3 + u^4 - x^2 - u^2 - xu) \\ &\quad + (y-v)^2 - 2C(x-u)(y-v) \\ &\geqslant a(x-u)^2 + (y-v)^2 - 2C(x-u)(y-v), \end{aligned}$$

$$0 < a < 5a^4 - 3x^2,$$

当 $C^2 < a$ 时,$\phi(x,u,y,v) > 0$.

(b) 当$|x - u| + |y - v| = 0 \Rightarrow x = u$,$y = v$,代入 $\phi(x,u,y,v)$,得 $\phi(x,u,y,v) = 0$.

(c) 满足 Lipschitz 条件,即存在 $L > 0$,使

$$|\phi(x,u,y,v) - \phi)(x_1,u_1,y_1v_1)|$$

$< L(|x-x_1|+|u-u_1|+|y-y_1|+|v-v_1|)$

成立.

$$
\begin{aligned}
&|\phi(x,u,y,v)-\phi(x_1,u_1,y_1,v_1)| \\
=&|(-x^3+x^5+u^3-u^5)(x-u)+(y-v)^2 \\
&-2C(x-u)(y-v) \\
&-(-x_1^3+x_1^5+u_1^3-u_1^5)(x_1-u_1) \\
&+(y_1-v_1)^2-2C(x_1-u_1)(y_1-v)| \\
\leqslant&(4A|5A^4-3A^2|+2CB)(|x-x_1|+|u-u_1|) \\
&+|4B+2CA|(|y-y_1|+|v-v_1|).
\end{aligned}
$$

取 $L=\max(4A|5A^4-3A^2|+2CB,|4B+2CA|)$,则有

$$
\begin{aligned}
&|\phi(x,u,y,v)-\phi(x_1,u_1,y_1,v_1)| \\
&< L(|x-x_1|+|u-u_1| \\
&\quad+|y-y_1|+|v-v_1|),
\end{aligned}
$$

满足 Lipschitz 条件.

(d)若

$$
\frac{\partial\phi}{\partial x}f(t,x,y)+\frac{\partial\phi}{\partial u}f(t,u,v)+\frac{\partial\phi}{\partial y}g(t,x,y)+\frac{\partial\phi}{\partial v}g(t,u,v)<0,
$$

令

$$
x^4+x^3u+x^2u^2+xu^3+u^4-x^2-u^2-xu=\theta, \tag{5}
$$

则左侧 $=(x-u)^2(20A^3B-6AB-3\theta+2C\theta)+C(x-u)(y-v)-2C(y-v)^2$.

要使左侧 <0,需 $C>0$,且

$$
\Delta=C^2+8C(20A^3B-6AB-3\theta+2C\theta)<0
$$

即可,

$$
\Delta=8C\theta(2C-3)+8C(20A^3B-6AB)+C^2<0.
$$

当 $C>\frac{3}{2}$ 时,只需

$$
\theta<-\frac{8C(20A^3B-6AB)+C^2}{8C(2C-3)}
$$

即可.那么需要

$$
\frac{8C(20A^3B-6AB)+C^2}{8C(2C-3)}\geqslant 5A^4-3A^2
$$

一定可确定出满足此条件的 A ,B, C.当 $C=\frac{3}{2}$ 时,

$$
\Delta=12(20A^3B-6AB)+\frac{9}{4}<0,
$$

也可确定满足条件的 A,B.

当 $0<C<\frac{3}{2}$ 时, 只需

$$
\theta>-\frac{8C(20A^3B-6AB)+C^2}{8C(2C-3)}
$$

即可,那么需要

$$
\frac{8C(20A^3B-6AB)+C^2}{8C(2C-3)}>\frac{9}{20},
$$

可确定出满足此条件的 A,B, C.

得证函数 $\phi(x,u,y,v)$ 满足 Yoshizawa[24] 关于周期解唯一性定理的第三组条件中的五个方面.于是,可知系统(2)的周期解唯一.所以原系统方程(1)的周期解也唯一.

3. 仿真实验

考虑由数学模型 Duffing-Holmes 方程

$$
\ddot{x}+\alpha\dot{x}-x^3+x^5=\gamma\cos(\omega t)
$$

所构成的特定混沌系统[18],其中 α 为阻尼比,$(-x^3+x^5)$为非线性恢复力,$\gamma\cos(\omega t)$为周期策动力,在这里是待检测谐波信号.设定参数 α 为定值(取为 0.5),将参数 γ 看成变量,随着 γ 值的增大,系统的动力学行为进入混沌状态.当 γ 值足够大,外加策动力的线性振子完全处于控制地位,使系统进入大尺度周期状态.在对微弱谐波信号进行检测时,将待测谐波信号 $\gamma\cos(\omega t)$作为周期策动力加入系统.通过调节 γ,总可以使系统处于大尺度周期状态,此时系统动力学行为的轨迹是周期行为,系统平均运动周期与待测信号的频率近似地满足 $\bar{T}_0=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega}$,其中 $\bar{T}_0$ 为系统在大尺度周期状态下的平均运动周期.

由仿真系统的大尺度轨道相态图,统计一定时间里轨道定向穿过零点的次数,不足一次的按照百分比计算,由固定的仿真时间内得到的周期个数,确定系统稳定时频率.由于所使用的仿真混沌系统具有极低的信噪比门限值[18],本文检测未知频率对谐波信号振幅的要求是使系统处于稳定周期相态(达到信噪比门限值约 −80dB),所以对于微弱谐波信号的频率检测也是可行的.仿真实验结果见表 1.由表 1 数据可知(其中 t_b,t_e 分别表示计数的初始和终止时间,n 表示计数结果,ω' 表示频率检测结果 ;千分点 $=|\Delta\omega|\times1000$),$|\Delta\omega|$与 ω 大小不呈线性关系,$\frac{|\Delta\omega|}{\omega}$与 ω 呈现出一定规律,总的趋势是 $\omega\uparrow\to\frac{|\Delta\omega|}{\omega}\downarrow$ 在 $\omega=5$Hz 处,$\frac{|\Delta\omega|}{\omega}$具有最大值 22.4 万分点.$\omega=200$Hz,$\frac{|\Delta\omega|}{\omega}=1.2$(万分点),表明在考察仿真效果时需要同时分析绝对误差和相对误差的数量.

表 1　检测谐波频率的仿真结果

ω/Hz	t_b	t_e	n	ω'/Hz	$\lvert\Delta\omega\rvert$千分点 ($\Delta\omega=\omega'-\omega$)	$\frac{\lvert\Delta\omega\rvert}{\omega}$(万分点)
1	50	120	11.1748	1.003	3	30
2	50	120	22.274	1.9993	0.7	3.5
3	50	120	33.372	2.9954	4.6	15.3
5	50	120	55.5716	4.9888	11.2	22.4
7	50	120	77.901	6.9924	7.6	10.9
10	50	120	111.566	10.0141	14.1	10.9
20	50	120	223.0637	20.0222	22.2	11.1
30	50	120	334.119	29.9905	9.5	3.2
40	50	120	445.732	40.0088	8.8	2.2
50	50	120	557.0769	50.0033	3.3	0.7
60	50	120	668.672	60.0198	19.8	3.3
70	50	120	780.059	70.0179	17.9	2.6
80	50	120	891.4007	80.0119	11.9	1.5
90	50	120	1003.100	90.0358	35.8	4.0
100	50	120	1114.000	99.9955	4.5	0.5
120	50	120	1337.300	120.0134	13.4	1.1
140	50	120	1560.000	140.0255	25.5	1.8
150	50	120	1673.300	150.0167	16.7	1.1
160	50	120	1782.700	160.0108	10.8	0.7
177	50	120	1972.400	177.0430	43.0	2.4
180	50	120	2005.600	180.021	21.0	1.2
200	50	120	2228.400	200.0236	23.6	1.2

本文所使用的 Duffing-Holmes 方程(1)包括一个阻尼比系数 α,该参数对检测结果有较大影响.具体 α 变化引起 $\lvert\Delta\omega\rvert$ 与 $\frac{\lvert\Delta\omega\rvert}{\omega}$ 范围见表 2.

表 2　阻尼比(α)对频率检测结果的影响

ω/Hz	$\alpha=0.3$	0.5	0.8	1	1.2	1.5
1	ω'=0.914Hz	1.003	1.002	0.982	0.998	0.986
2	1.820	1.999	1.998	1.989	1.994	1.983
3	2.998	2.995	2.995	2.986	2.991	2.979
5	4.991	4.988	4.987	4.978	4.983	4.972
7	6.995	6.992	6.991	6.982	6.987	6.975
10	9.928	10.014	10.012	9.991	10.005	9.992
20	20.025	20.022	20.022	20.012	20.018	20.007
30	29.993	29.990	29.988	29.980	29.984	29.974
40	40.015	40.009	40.006	39.999	40.005	39.996
50	50.003	50.003	49.999	49.992	49.996	49.985
60	59.951	60.020	60.011	60.003	60.007	59.998
70	69.933	70.018	70.018	69.998	70.013	70.003
80	80.012	80.012	80.006	80.000	80.006	79.995
90	90.036	90.036	90.036	90.023	90.029	90.016
100	100.003	99.995	99.995	99.988	99.995	99.981
120	119.924	120.013	120.013	120.005	120.005	119.996
140	139.946	140.026	140.026	140.016	140.026	140.016
160	160.022	160.011	160.011	159.999	160.011	160.011
177	177.029	177.043	177.030	177.018	177.030	177.018
180	180.020	180.020	180.020	180.007	180.020	180.007
200	199.948	200.024	200.024	200.009	200.024	200.009

分析表2可知：

1)同一阻尼比引起不同 ω 的 $|\Delta\omega|$ 变化差别较大,并大致呈"峰""谷"相间特征;在10Hz范围内 $|\Delta\omega|$ 局部表现类似于 $\omega>10$Hz的区域特征,即呈现"峰""谷"相间特点;局部复杂特征易于被区域特征平滑掉;可以推测,在其他局部频率范围如 $40\leqslant\omega\leqslant50$Hz等亦有类似表现.

2)上述 $|\Delta\omega|$ 表现直接影响应用于实际检测的参数选择.通常选择 $|\Delta\omega|$ 小并且对于不同频率 $|\Delta\omega|$ 变化相对稳定的计算系统,如对于 $0<\omega\leqslant200$Hz的频带而言,选取 $\alpha=1.5$ 较好.此外,对于窄的待检测频带,需要更细致地实验确定 $|\Delta\omega|$ 与 α 之间的关系.

3)参见 $\omega=30$Hz的 $|\Delta\omega|$ 分布,$\alpha=2.2$,2.4与2.8相应的 $|\Delta\omega|$ 值相等且大于 $\alpha=1.5$ 的值.这似乎表明 $|\Delta\omega|$ 有一极限值存在,或者说 α 大到一定程度引起 $|\Delta\omega|$ 变化差别不大.

4.结 论

1.证明了一个特定的Duffing-Holmes方程存在周期解与解唯一;为用该方程建立的混沌系统检测微弱谐波信号的未知频率奠定了理论基础.

2.用这类混沌系统成功地进行了确定谐波信号未知频率的仿真实验;分析阻尼比对检测结果的影响得出,不同频率带宽以及不同主频值相应的阻尼比选择需要经过细致仿真实验加以确定.

[1] Leung H and Lo T 1993 *IEEE J. Oceanic Engineering* **18**(3) 287

[2] Short K M 1994 *Int. J. Bifur. Chaos* **4** 959

[3] Wang G R *et al* 2001 *Control, Synchronization and Application For Chaos* (Beijing: Publishing House of National Defence Industry) p190—198 (in Chinese) [王光瑞等 2001 混沌的控制、同步与利用(北京:国防工业出版社)第190—198页]

[4] Birx D I 1992 *IEEE Internation Joint Conference on Neural Networds* **22** 881

[5] Haykin S and Li X B 1995 *Processing IEEE* **83** 94

[6] Leung H and Phuang X 1996 *IEEE Trans. Sig. Pig. Proc.* **44** 2456

[7] Kennedy M P 2000 *Signal Processing* **80** 1307

[8] Gay F 2000 *Ph. D. Metiers Paris* France 36—38

[9] Wang F P *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1019 (in Chinese) [汪芙平等 2001 物理学报 **50** 1019]

[10] Chen S H, Zhao L M and Liu J 2002 *Chin. Phys.* **11** 543

[11] Li Z and Han Z C 2002 *Chin. Phys.* **11** 666

[12] Li G H *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 739 (in Chinese) [李国辉等 2002 物理学报 **51** 739]

[13] Tan N, Xu J X and Chen Y H 2002 *Chin. Phys.* **11** 670

[14] Guan X P *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 753 (in Chinese) [关新平等 2002 物理学报 **51** 753]

[15] Zhang S H and Shen K 2002 *Chin. Phys.* **11** 894

[16] Wang G Y *et al* 2002 *Signal Processing* **82** 103

[17] Li Y, Yang B J, Du L Z and Yuan Y 2003 *Chin. Phys.* **12** 714

[18] Li Y and Yang B J 2003 *Chinese Science Bulletin* **48** 508

[19] Zhang Z J 2002 *The processing and interpretation method for the anisotropic media using multi-component seismic data* (Harbin: Publishing House of Heilongjiang Education) p15—35 (in Chinese) [张中杰 2002 多分量地震资料的各向异性处理和解释方法(哈尔滨:黑龙江教育出版社)第15—35页]

[20] Wang G Y *et al* 2002 *Signal Processing* **82** 103

[21] Li Y *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 526 (in Chinese) [李 月等 2003 物理学报 **52** 526]

[22] Li W *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1436 (in Chinese) [李 伟等 2001 物理学报 **50** 1436]

[23] Li W *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1862 (in Chinese) [李 伟等 2001 物理学报 **50** 1862]

[24] Sansone G and Conti R 1964 *Nonlinear Differential Equations* (Florence: Pergamon) [G 桑森, R 康蒂著,黄启昌等译 1983 非线性微分方程(北京:科学出版社)第83页]

Simulation and theoretical analysis on detection of the frequency of weak harmonic signals based on a special chaotic system*

Li Yue[1)]　Yang Bao-Jun[2)†]　Lin Hong-Bo[1)]　Liu Xiao-Hua[1)]

[1)] (*Department of Information Engineering, Jilin University, Changchun* 130012, *China*)

[2)] (*Department of Geophysics, Jilin University, Changchun* 130026, *China*)

(Received 31 August 2004; revised manuscript received 27 September 2004)

Abstract

In order to study a kind of chaotic system which is based on the special Duffing-Homes equation, and use it to detect the unknown frequency of weak harmonious signals, we prove the existence of the periodic solution and the exclusivism of the solution, carry out simulation experiments to detect harmonious frequency using the periodic trajectory of a stable phase state. We also compute the detection error $|\Delta\omega|$, when the damping ratio (α) changes and the frequency changes from 1Hz to 200Hz. The results show that we have to choose the value of α corresponding to the different range of frequency by simulation experiments.

Keywords: special chaotic system, periodic solution of chaotic system, period of stable phase state, damp ratio

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40374045).

† E-mail: yangbaojun@jlu.edu.cn