第 54 卷 第 5 期 2005 年 5 月
1000-3290/2005/54(05)/2007-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.54,No.5,May,2005

Landau-Lifschitz 铁磁方程的 Hamilton 理论和规范变换*

何进春[1)†] 史丽娜[2)] 陈 化[1)] 黄念宁[2)]

1)(武汉大学数学与统计学院,武汉 430072)

2)(武汉大学物理学院,武汉 430072)

(2003 年 11 月 21 日收到;2004 年 10 月 9 日收到修改稿)

对完全各向同性 Heisenberg 铁磁链的 Landau-Lifschitz 方程的 Hamilton 理论建立中,Hamilton 量的坐标积分和谱参数积分两种表示式不能协调地从单一守恒量导出的问题,利用规范变换完善地解决了.并可推广后处理非各向同性铁磁链的 Landau-Lifschitz 方程的 Hamilton 理论.

关键词:规范变换,Landau-Lifschitz 方程,守恒量,Hamilton 理论

PACC:0547,0290,7510J

1. 引 言

Landau-Lifschitz 铁磁方程(L-L 方程)的 Hamilton 理论早已有人研究过[1—8],但存在一个基本问题一直没解决好.在引入自旋的 Lie-Poisson 括号后,将 L-L 方程写成以 Lie-Poisson 括号表出的 Hamilton 方程的形式,就唯一地定出了 Hamilton 量的坐标积分的形式[4].

另一方面,由自旋的 Lie-Poisson 括号出发,可以求出单式矩阵元的 Lie-Poisson 括号,因而在连续谱情况下,也唯一地定出系统的角变量和作用变量.反散射法给出的角变量的时间相依,就决定了连续谱情况下 Hamilton 量的谱参数积分表示,即被积函数是作用变量乘以谱参数的确定函数.于是 Hamilton 量的两种积分表示,坐标积分表示和谱参数积分表示,都是确定的[4].

在反散射法中传输系数 $a(k)$ 在 k-上半平面解析,当它又无零点时 $\ln a(k)$ 在 k-上半平面解析,且在 $|k|\to\infty$ 时趋于 0,所以满足周知的色散关系

$$\ln a(k)=\frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k'\,\frac{\ln|a(k')|^2}{k'-k}.$$

又因 $\ln a(k)$ 是独立于时间的,由此立即看到,在 $|k|^{-1}\to 0$ 时展开的各阶项就是守恒量,0 阶项为 0,而 1 阶项恰正比于已经定出的连续谱情况下 Hamilton 量的谱参数积分表示.所以问题变成,如何求出此等定恒量的坐标积分表示,使 0 阶项的坐标积分为 0,而 1 阶项确实符合 Hamilton 量的坐标积分表示.

反散射法用相容性对的第一个来导出守恒量,由此得到传输系数 $a(k)$ 在 $|k|^{-1}\to 0$ 时展开的各阶项所对应的对 x 的积分表示.但简单用通常的相容性对表示式,将得到 0 阶项并不为 0,而 1 阶项与 Hamilton 量的坐标积分表示也相去甚远.对此 Fogedby 回避了进一步讨论[4].Faddeev 提出的解决办法是,传输系数应当还有一附加相 φ,即 $a(k)$ 要换成 $a(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,用这一附加相 φ 来抵消上述 0 阶项.不久,Takhtajan 指出既然已证明各向同性的 L-L 方程与 NLS 方程是规范等价的,它们的传输系数的函数形式应当是一样的,则此附加相的引入是不正确的[2].因此,此二方程的 Hamilton 量的谱参数积分表示一致,而二方程的 Hamilton 量的坐标积分表示是规范等价的,即可以将 NLS 方程的 Hamilton 量的坐标积分表示中的场量,用与它规范等价的 L-L 方程的自旋函数来替换,就得到 L-L 方程的 Hamilton 量的坐标积分表示.但这种解决方案似不够完善,因为难以推广到非完全各向同性的 L-L 方程的 Hamilton 理论的建立.本文将利用L-L方程的自旋空间中适

* 国家自然科学基金(批准号:10375041,10025107)资助的课题.

† E-mail:he_jc@sohu.com

当的规范变换,在不涉及别的方程的情况下,完善地解决这一问题.

2. Hamilton 量的坐标积分表示

各向同性自旋链的 Landau-Lifschitz 方程是

$$S_t = S \times S_{xx}, \; |S| = 1, \tag{1}$$

对自旋系统,力学量是 S,所以不能像别的力学系统那样引入通常的广义坐标和共轭动量.因此引入 Lie-Poisson 括号,它是量子自旋对易关系的经典对应.经典自旋满足下列 Lie-Poisson 括号

$$\{S_\alpha(x), S_\beta(y)\} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma(x)\delta(x-y), \tag{2}$$

这里 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 是完全反对称的张量,α,β,γ 可取值 1,2,3.以下凡重复指标表示对 1,2,3 求和.

用 Lie-Poisson 括号,写下 Hamilton 方程

$$S_{\alpha t} = \{S_\alpha, H\}, \tag{3}$$

要它给出 L-L 方程(1),则 H 应为

$$H = \int \mathrm{d}x \mathscr{H}(x), \mathscr{H} = \frac{1}{2} S_{\beta x} S_{\beta x}, \tag{4}$$

式中 Hamilton 量密度 $\mathscr{H}$ 除相差一个散度项和常数项以外应是唯一的.

3. 单式矩阵元的 Lie-Poisson 括号

L-L 方程的相容性对是

$$L = -\mathrm{i}k S_\alpha \sigma_\alpha, \tag{5}$$

$$M = 2\mathrm{i}k^2 S_\alpha \sigma_\alpha - \mathrm{i}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} k \sigma_\alpha S_\beta S_{cx}. \tag{6}$$

k 是谱参数.它们的相容性条件给出 L-L 方程(1).

这样第一个相容性方程可写作

$$\partial_x F(x,k) = L(x,k) F(x,k). \tag{7}$$

当 $|x| \to \pm\infty$,取 $S \to (0,0,1)$,即沿 3 轴.自由 Jost 解是 $E(x,k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\sigma_3}$.定义 Jost 解

$$\Psi(x,k) = (\tilde{\psi}(x,k), \psi(x,k)) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\sigma_3}, \quad \text{当 } x \to \infty,$$

$$\Phi(x,k) = (\phi(x,k), \tilde{\phi}(x,k)) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\sigma_3}, \quad \text{当 } x \to -\infty. \tag{8}$$

为表征方程(7)只有两个独立的二分量解.引入单式矩阵 $T(k)$,

$$\Phi(x,k) = \Psi(x,k) T(k),$$

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & -\tilde{b}(k) \\ b(k) & \tilde{a}(k) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

容易得到

$$a(k) = -\psi(x,k)^{\mathrm{T}} \mathrm{i}\sigma_2 \phi(x,k),$$

$$b(k) = \tilde{\psi}(x,k)^{\mathrm{T}} \mathrm{i}\sigma_2 \phi(x,k), \tag{10}$$

等等.

$a(k)$,$b(k)$ 的 Poisson 括号按(2)为

$$\{a(k), b(k')\} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \int \mathrm{d}z \frac{\delta a(k)}{\delta S_\alpha(z)} \otimes \frac{\delta b(k')}{\delta S_\beta(z)} S_\gamma(z). \tag{11}$$

由(5)式得

$$\frac{\delta L(x,k)}{\delta S_\alpha(z)} = -\mathrm{i}k\delta(z-x)\sigma_\alpha, \tag{12}$$

所以当 $x \to z+0$ 时,即 x 从 z 的正方趋于 z 可得

$$\lim_{x \to z+0} \frac{\delta \phi(x,k)}{\delta S_\alpha(z)} = -\mathrm{i}k\sigma_\alpha \phi(z,k). \tag{13}$$

由(8)式,当 x 小于 z 时,$\psi(x,k)$ 对 $S_\alpha(z)$ 的变分为 0.又因为表示式(10)中的 x 是任意的,所以可取 $x \to z+0$,得

$$\frac{\delta a(k)}{\delta S_\alpha(z)} = -k\psi(z,k)^{\mathrm{T}} \sigma_2 \sigma_\alpha \phi(z,k). \tag{14}$$

同理

$$\frac{\delta b(k')}{\delta S_\beta(z)} = k' \tilde{\psi}(z,k')^{\mathrm{T}} \sigma_2 \sigma_\beta \phi(z,k'). \tag{15}$$

这样就得到

$$\{a(k), b(k')\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \int \mathrm{d}z k k' \psi(z,k)^{\mathrm{T}} \sigma_2 \sigma_\alpha \phi(z,k) \times \tilde{\psi}(z,k')^{\mathrm{T}} \sigma_2 \sigma_\beta \phi(z,k') S_\gamma(z). \tag{16}$$

为了使右方可以简单地算出,其被积函数应为全微分.为此由(7)和(5)式,可算出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \psi(z,k)^{\mathrm{T}} \sigma_2 \tilde{\psi}(z,k') \phi(z,k')^{\mathrm{T}} \sigma_2 \phi(z,k). \tag{17}$$

其中含 S_1 之项为

$$S_1(-\mathrm{i}k + \mathrm{i}k')(\psi(z,k)^{\mathrm{T}} \mathrm{i}\sigma_3 \tilde{\psi}(z,k') \psi(z,k')^{\mathrm{T}} \sigma_2 \phi(z,k) - \psi(z,k)^{\mathrm{T}} \sigma_2 \tilde{\psi}(z,k') \phi(z,k')^{\mathrm{T}} \mathrm{i}\sigma_3 \phi(z,k)). \tag{18}$$

(16)式右端被积函数中含 S_1 之项为

$$S_1 k k' (\psi(z,k)^{\mathrm{T}} \phi(z,k) \tilde{\psi}(x,k')^{\mathrm{T}} \mathrm{i}\sigma_1 \phi(x,k') - \psi(z,k)^{\mathrm{T}} \mathrm{i}\sigma_1 \phi(z,k) \tilde{\psi}(x,k')^{\mathrm{T}} \phi(x,k')). \tag{19}$$

不难看出,(18)式乘 $kk'/(k-k')$ 即得(19).从(16)和(17)式中的 S_2 和 S_3 也得出同样的关系,所以

$$\{a(k), b(k')\} = \frac{kk'}{k-k'} \psi(z,k)^{\mathrm{T}} \sigma_2 \tilde{\psi}(z,k') \times \phi(z,k')^{\mathrm{T}} \sigma_2 \phi(z,k) \Big|_{z=-L}^{z=L}. \tag{20}$$

因为 $z\to-\infty$ 时，$\phi(z,k')^{\mathrm T}\sigma_2\phi(z,k)\to 0$，所以上式只有 $z=L\to\infty$ 的项，注意到(9)式可以给出，$\phi(z,k)=a(k)\tilde{\psi}(z,k)+b(k)\psi(z,k)$，得

$$
\begin{aligned}
&\frac{kk'}{k-k'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')L}\left(a(k')\tilde{\psi}(L,k')^{\mathrm T}+b(k')\psi(L,k')^{\mathrm T}\right)\\
&\times\sigma_2\left(a(k)\tilde{\psi}(L,k)+b(k)\psi(L,k)\right)\\
=&\frac{kk'}{k-k'}\left(a(k)b(k')\right)+a(k')b(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(k-k')L}\big)\\
=&a(k)b(k')\left(\frac{kk'}{k-k'}-\mathrm{i}\pi k^2\delta(k-k')\right),
\end{aligned}
$$

即

$$
\{a(k),b(k')\}=a(k)b(k')\frac{kk'}{k-k'+\mathrm{i}\epsilon},\tag{21}
$$

类似地可得 $\{\tilde{a}(k),b(k')\}$，最后有

$$
\begin{aligned}
&\{|a(k)|^2,b(k')\}\\
=&-\mathrm{i}2\pi k^2\delta(k-k')|a(k)|^2b(k').
\end{aligned}\tag{22}
$$

4. Hamilton 量 H 的连续谱部分的谱参数积分表示

反散射法给出

$$
b(t,k)=b(0,k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}4k^2t},\quad a(t,k)=a(0,k),\tag{23}
$$

所以引入角变量

$$
Q(k)=\arg b(k)=\frac{1}{\mathrm{i}2}\frac{\ln b(k)}{\ln\tilde{b}(k)}\tag{24}
$$

和作用变量

$$
P(k)=F(|a(k)|^2),\tag{25}
$$

可以通过选择 F 而使

$$
\{P(k),Q(k')\}=-\delta(k-k').\tag{26}
$$

现在通过证明(26)式来确定函数 F 的形式. 由于

$$
\begin{aligned}
&\{P(k),\ln b(k')\}\\
=&\frac{F'(|a(k)|^2)}{b(k')}\{|a(k)|^2,b(k')\}\\
=&-\frac{F'(|a(k)|^2)}{\mathrm{i}}\mathrm{i}2\pi k^2\\
&\times\delta(k-k')|a(k)|^2,
\end{aligned}\tag{27}
$$

式中 F' 表示 F 对宗量的微商. 若要求右方等于 $-\delta(k-k')$，则得

$$
F'(|a(k)|^2)2\pi k^2|a(k)|^2=1,\tag{28}
$$

积分得

$$
P(k)=F(|a(k)|^2)=\frac{1}{2\pi k^2}\ln|a(k)|^2.\tag{29}
$$

所以 Hamilton 量的谱参数积分表示式为

$$
H=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k4k^2P(k).\tag{30}
$$

因为由 $Q(k)$ 的 Hamilton 方程和(24)，得

$$
Q_t(k)=\{Q(k),H\}=4k^2.\tag{31}
$$

再以(29)式代入，得

$$
H=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\ln|a(k)|^2,\tag{32}
$$

这就是 Hamilton 量 H 的连续谱部分的谱参数积分表示.

5. $\ln a(k)$ 的色散关系

若 $|k|\to\infty$ 时 $\ln a(k)\to 0$，由 $a(k)$ 在 k 的上半平面解析，若设 $a(k)$ 在上半平面无零点，则 $\ln a(k)$ 在 k 的上半平面解析，由此就可得到周知的色散关系

$$
\ln a(k)=\frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k'\frac{\ln|a(k')|^2}{k'-k}.\tag{33}
$$

当 $|k|\to\infty$ 时，此式展开的 0 阶项 I_0 和 -1 阶项 I_1 分别为

$$
I_0=0,\quad I_1=-\frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k'\ln|a(k')|^2.\tag{34}
$$

我们看到 Hamilton 量的谱参数积分表示 H 和 I_1 之间有正比关系：

$$
H=-\mathrm{i}4I_1.\tag{35}
$$

6. 过去导出的守恒量的失误

在反散射法中守恒量是由第一个相容性方程(5)和(7)得到

$$
\begin{aligned}
v_{1x}&=-\mathrm{i}kS_3v_1+(-\mathrm{i}kS_1-kS_2)v_2,\\
v_{2x}&=\mathrm{i}kS_3v_2+(-\mathrm{i}kS_1+kS_2)v_1.
\end{aligned}\tag{36}
$$

这里 v 可表示 $\psi(x,k)$. 消去 v_1 得

$$
\begin{aligned}
&v_{2xx}-\mathrm{i}kS_{3x}v_2-\frac{(-\mathrm{i}kS_1+kS_2)_x}{-\mathrm{i}kS_1+kS_2}(v_{2x}-\mathrm{i}kS_3v_2)\\
=&-(k^2S_3^2v_2+k^2S_1^2+k^2S_2^2)v_2.
\end{aligned}\tag{37}
$$

当 $|k|\to\infty$ 时，设 $v_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx+g}$，代入得

$$
\begin{aligned}
&g_{xx}+g_x^2+2\mathrm{i}kg_x-\mathrm{i}kS_{3x}\\
&-\frac{(-\mathrm{i}kS_1+kS_2)_x}{-\mathrm{i}kS_1+kS_2}(\mathrm{i}k+g_x-\mathrm{i}kS_3)=0.
\end{aligned}\tag{38}
$$

$|k|\to\infty$ 时，作展开

$$
g_x=\nu_0+k^{-1}\nu_1+k^{-2}\nu_2+\cdots\tag{39}
$$

代入(38)式，比较两端同次幂，得

$$\nu_0 = \frac{1}{2}\left(S_{3x} + \frac{(-\mathrm{i}S_1 + S_2)x}{-\mathrm{i}S_1 + S_2}(1 - S_3)\right). \quad (40)$$

和 ν_1 的极复杂的表示式等等.

在(10)式中取 $x \to -\infty$,由此得

$$a(k) = -\psi(-L,k)^{\mathrm{T}}\mathrm{i}\sigma_2\phi(-L,k) = \mathrm{e}^{g(-L,k)}. \quad (41)$$

注意

$$\ln a(k) = g(-L,k) = -\int_{-L}^{L}\mathrm{d}x g_x(x,k)$$
$$= -\int_{-L}^{L}\mathrm{d}x(\nu_0 + k^{-1}\nu_1 + k^{-2}\nu_2 + \cdots), \quad (42)$$

$$I_0 = -\int_{-L}^{L}\mathrm{d}x\nu_0 \neq 0. \quad (43)$$

但这与(34)式导出时要求 $I_0 = 0$ 矛盾. Fogedby 当然知道这一结果,于是他避开讨论这一问题. 而 Faddeev 等则假定存在一个相 φ,并将 $a(k)$ 换成 $a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$. 靠了这个常数相来抵销 I_0. 但即使如此,I_1 的坐标积分表示式也与 H 的坐标积分表示式(4)也不能协调.

不久,引入附加相遭到批评. Takhtajan 指出,由于 L-L 方程与 NLS 方程规范等价,而规范变换不改变单式矩阵,因此也不改变传输系数. 以 NLS 方程的 Hamilton 理论得出的 I_1 与 L-L 方程的 I_1 有同样的谱参数积分表示,并最后调整一下谱参数的取法,NLS 方程的 I_1 的坐标积分表示可以由规范等价换成 L-L 方程相应的坐标积分表示. 但是,此规范等价性造成了如下误解 如对具易磁化轴或具易磁化面的 L-L 方程人们老想找出与此二方程规范等价的类似于某种形式的 NLS 方程或什么别的方程,但一直未能成功. 因此对具易磁化轴或具易磁化面的 L-L 方程长期一直未能建立起 Hamilton 理论.

事实上,规范变换是对同一个方程的相容性对的变换,变换前后的旧的和新的相容性对同样由相容性条件给出原方程,并不涉及别的方程. 所谓完全各向同性的 L-L 方程与 NLS 方程规范等价是指,规范变换后的 L-L 方程的相容性对与 NLS 方程的相容性对函数形式上相同,而不是规范变换使 L-L 方程变成了 NLS 方程.

7. 规范变换

所以,守恒量的问题需要重新解决. 我们知道,$a(k)$的形式不依赖于规范变换,而 Jost 解依赖于规范变换. 但是我们推导 $a(k)$要从 Jost 解出发,因此应当选择一适当的规范变换,使得 Jost 解由先 $x \to \pm\infty$、然后谱参数$|k| \to \infty$时决定的渐近行为与 Jost 解在谱参数$|k|$直接趋于无穷时的渐近行为一致. 因此,作一个适当的规范变换,将相容性对的第一个变成 $-\mathrm{i}k\sigma_3 + O(1)$这种形式,由此导出的守恒量的零阶项为 0,一阶项正好是已知的 Hamilton 量,从而克服了以往推导守恒量时所碰到的困难.

还应指出,本文在推导 Hamilton 量的谱参数积分表示中所用方法具有可操作性. 这种方法可以推广到建立其他方程的 Hamilton 理论中,例如易磁化轴和具易磁化面的 L-L 方程的 Hamilton 理论.

考虑一个规范变换 $A(x,t)$,由(9)式

$$A\Phi(x,k) = A\Psi(x,k)T(k). \quad (44)$$

注意规范变换不依赖 k,而且它是从左乘(9)式,所以不改变 $T(k)$,因而也不改变 $a(k)$, $b(k)$等. 但它改变相容性方程和 Jost 解,变换后的相容性对是

$$L'(k) = -A_xA^{-1} + AL(k)A^{-1}. \quad (45)$$

若要此式有 $-\mathrm{i}k\sigma_3 + \cdots$形式,应取

$$AS_\alpha\sigma_\alpha A^{-1} = \sigma_3. \quad (46)$$

在自旋空间取极坐标,

$$S_3 = \cos\theta, S_1 = \sin\theta\cos\varphi,$$
$$S_2 = \sin\theta\sin\varphi, \quad (47)$$

容易看出

$$A = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\sigma_2\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\sigma_3\varphi},$$
$$A^{-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\sigma_3\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\sigma_2\theta}. \quad (48)$$

这时

$$A_xA^{-1} = -\mathrm{i}\frac{1}{2}\sigma_2\theta_x - \mathrm{i}\frac{1}{2}\sigma_3\varphi_x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma_2\theta}. \quad (49)$$

其对角元并不为 0. 从(46)式可见,规范变换 A 已将 $\boldsymbol{S}$ 转到第 3 轴,再绕第 3 轴转,自旋仍然还是沿第 3 轴. 所以引入一个新的规范变换 B

$$B = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\sigma_3 f}A, B^{-1} = A^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\sigma_3 f}, \quad (50)$$

这时 B_xB^{-1}的对角元为

$$\left(-\mathrm{i}\frac{1}{2}f_x - \mathrm{i}\frac{1}{2}\varphi_x\cos\theta\right)\sigma_3. \quad (51)$$

要它为 0,即

$$f_x = -\varphi_x\cos\theta. \quad (52)$$

此式只有当 φ 和 $\cos\theta$ 有具体表示式才可算出,但是它的存在是没问题的,所以可设 B_xB^{-1} 的对角元为 0,

$$B_xB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -\bar{u} & 0 \end{pmatrix} \equiv U, U_{\sigma_3} = -\sigma_3 U, \quad (53)$$

这里矩阵 U 的对角元为 0，非对角元一为 u，则另一为 $-\bar{u}$. 我们注意它们仍是用自旋变量表出的.

8. 守恒律的正确导出

由规范变换 B 得出的

$$L'' = -\mathrm{i}k\sigma_3 + U. \tag{54}$$

以这里的 L'' 代替(36)式中的 L，重复相同的推导，当 $|x| \to \infty$ 时，设 $v_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx+g}$，代入得

$$g_{xx} + \mathrm{i}2kg_x + g_x^2 - \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}} g_x + |u|^2 = 0. \tag{55}$$

在极限 $|k| \to \infty$ 下，设有展开式为

$$g_x \equiv \mu = \mu_0 + \mu_1 (k)^{-1} + \mu_2 (k)^{-2} + \cdots \tag{56}$$

代入(55)式后，比较两端 k 的同次幂项，得

$$\mu_0 = 0,\quad \mu_1 = -\mathrm{i}\frac{1}{2}|u|^2, \cdots \tag{57}$$

我们立即看到 $I_0 = 0$.

9. I_1 的自旋表示式

因为

$$S_\alpha \sigma_\alpha = B^{-1}\sigma_3 B, \tag{58}$$

所以

$$S_{\alpha x}\sigma_\alpha = -B^{-1}B_x B^{-1}\sigma_3 B + B^{-1}\sigma_3 B_x. \tag{59}$$

由(53)式

$$\begin{aligned} S_{\alpha x}\sigma_\alpha &= B^{-1}\sigma_3 B_x B^{-1} B + B^{-1}\sigma_3 B B^{-1} B_x \\ &= 2S_\alpha\sigma_\alpha B^{-1}B_x = -2B^{-1}B_x S_\alpha \sigma_\alpha. \end{aligned} \tag{60}$$

再次利用(53)式得

$$\begin{aligned} S_{\alpha x}\sigma_\alpha S_{\alpha x}\sigma_\alpha &= -4B^{-1}B_x B^{-1}B_x \\ &= -4B^{-1}B_x B^{-1}B_x B^{-1}B \\ &= -4B^{-1}UUB = -4U^2, \end{aligned} \tag{61}$$

注意这里 U^2 正比于单位矩阵 I. 所以最后得(35)式. 当 $a(k)$ 有零点时需要加上分离谱时的作用变量、角变量和 Hamilton 量部分，这与 Fogedby 的推导一样[4]，这里就不说了.

10. 结　论

本文在完全各向同性的 L-L 方程的 Hamilton 理论的建立上，引用了规范变换克服了过去处理中的不当. 对 L-L 方程和 NLS 方程的规范变换等价性的理解应当是，规范变换后的 L-L 方程的相容性对与 NLS 方程的相容性对有相同的函数形式，而不是什么 L-L 方程变成了 NLS 方程. 在这样正确理解下，对至今未建立的具易磁化轴或具易磁化面的 L-L 方程的 Hamilton 理论，也顺利解决了. 由于推演上不可避免的复杂，将另文发表.

[1] Zakharov V E and Shabat A B 1972 *Sov. Phys. JEPT* **34** 62

[2] Takhtajan L A 1977 *Phys. Lett.* **64**A 235

[3] Zakharov V E and Takhtajan L A 1979 *Teoret. Mat. Fiz.* **38** 26

[4] Fogedby H C 1980 *J. Phys.* A **13** 1467

[5] Faddeev L D 1980 *Mathematical Physics Review Section C*.: *Mathematical Physics Review* (Harwood, Academic)

[6] Chen Z D, Chen X J and Huang N N 1999 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **8** 188

[7] Dong Z H and Feng S P 1998 *Chin. Phys.* **7** 348

[8] Shang Y M and Yao K L 1998 *Chin. Phys.* **7** 864

The Hamiltonian theory of Landau-Lifschitz equation and the gauge transformations*

He Jin-Chun[1)] Shi Li-Na[2)] Chen Hua[1)] Huang Nian-Ning[2)]

[1)] (*School of Mathematics and Statistics*, *Wuhan University*, *Wuhan* 430072, *China*)

[2)] (*School of Physics*, *Wuhan University*, *Wuhan* 430072, *China*)

(Received 21 November 2003; revised manuscript received 9 October 2004)

Abstract

The coordinate and spectral integral representations of Hamiltonian in isotropic Landau-Lifschitz equation are given by a standard procedure. But, the problem of deriving the corresponding conserved quantity to connect two kinds of integral mentioned above is still open.

In this paper, using the gauge invariance properties, the compatibility pair of L-L equation is transformed to the form $-\mathrm{i}k\sigma_3 + O(1)$ by choosing an appropriate transformation. Hence, the conserved quantities are obtained. The zeroth conserved quantity, I_0, is zero. The first one, I_1, which has coordinate and spectral integral representations, coincide with the two desired integral representations of the Hamiltonian.

Keywords: gauge transformation, Landau-Lifschitz equation, conserved quantity, Hamiltonian theory

PACC: 0547, 0290, 7510J

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10375041 and 10025107).