

Λ 型三能级原子与数态单模光场相互作用系统的纠缠特性*

周青春¹⁾²⁾ 祝世宁^{1)†}

¹⁾ (南京大学物理系, 固体微结构国家重点实验室, 南京 210093)

²⁾ (华东船舶工业学院数理系, 镇江 212003)

(2004 年 5 月 31 日收到, 2004 年 9 月 17 日收到修改稿)

通过计算场的量子力学熵讨论了 Λ 型三能级原子与数态单模光场相互作用系统的纠缠和退纠缠时间演化规律. 结果表明, 系统的纠缠呈现周期性, 最大纠缠度依赖于原子初态、初始场光子数及场失谐量与耦合系数之比. 一周期内出现最大纠缠和退纠缠的次数与初始场光子数无关. 近简并下能级初始相对位相影响场熵演化, 而激发态和基态之间的初始相对位相场熵演化无影响.

关键词: 数态, von Neumann 熵, 量子纠缠, Λ 型三能级原子

PACC: 4250

1. 引 言

原子与光场间的纠缠特性对研究原子和光场量子态制备以及量子信息处理至关重要^[1], 而场熵能够量度场与原子间纠缠程度^[2,3], 场熵的时间演化反映了原子与场之间纠缠程度的演化, 所以有必要研究原子-场系统的场熵性质. 原子和光场作为子系统的 von Neumann 熵由约化密度矩阵定义为 $S_{A(F)} = -\text{Tr}_{A(F)}[\rho_{A(F)} \ln \rho_{A(F)}]$, 其中下标 A(F) 代表原子(场). 根据 Araki-Lieb 定理, 如果原子-场系统初始处于纯态, 则 $t > 0$ 时刻原子与场两子系统熵严格相等, 且复合系统熵永远为零^[4]. 在文献[4]基础上, 各种 Jaynes-Cummings 模型中光场熵的时间演化特性得到广泛研究^[5-17], 但基本上是考虑初始光场为相干场情况或压缩真空场情况, 很少有人详细讨论原子与初始处于数态光场作用情况下的场熵特性. 由于一般光场可表示为数态叠加, 研究原子与数态光场作用的场熵时间演化有利于深入理解复杂光场与原子作用的纠缠性质, 因此本文考虑 Λ 型三能级原子与数态单模光场相互作用系统的熵演化特性, 在这种情况下场熵演化也展现出丰富的物理现象.

2. 系统态矢量和场熵

本文讨论的 Λ 型三能级原子能级结构如图 1 所示, 其中单模光场(频率 ω)与两近简并下能级失谐量均为 Δ . 在以角频率 ω 旋转的坐标系中, 偶极近似和旋波近似下系统 Hamiltonian

$$H = \hbar g(|c\rangle\langle b| + |c\rangle\langle a|)a + \hbar g(|b\rangle\langle c| + |a\rangle\langle c|)a^\dagger + \hbar \Delta(|b\rangle\langle b| - |a\rangle\langle a|), \quad (1)$$

其中 $a(a^\dagger)$ 为光场湮没(产生)算符, $|j\rangle\langle j| (j = a, b)$ 为能级 j 的布居算符, $|i\rangle\langle j| (i, j = a, b, c, i \neq j)$ 为跃迁算符, g 为原子-场耦合系数. 设初始时原子处于相干叠加态 $C_a|a\rangle + C_b|b\rangle + C_c|c\rangle$, 场处于光子数为 m 的数态 $|m\rangle$, 则原子-场复合系统初态矢

$$|\Psi_{\text{Af}}(0)\rangle = C_a|a, m\rangle + C_b|b, m\rangle + C_c|c, m\rangle. \quad (2)$$

由 Hamiltonian(1), Schrödinger 方程及初始条件得任意时刻 t 系统态矢

$$|\Psi_{\text{Af}}(t)\rangle = \sum_n C_{a,n}(t)|a, n\rangle + C_{b,n}(t)|b, n\rangle + C_{c,n}(t)|c, n\rangle, \quad (3)$$

式中

$$C_{a,n}(t) = \frac{1}{\Omega_n^2} \{ [(g^2 n + \Delta^2) C_a + g^2 n C_b] \mathcal{D}_n \}$$

* 国家自然科学基金(批准号: 90201008)资助的课题.

† E-mail: zhushn@nju.edu.cn

$$\begin{aligned}
 & - \Delta g \sqrt{n} C_c \delta_{n-1, m} \rangle \cos \Omega_n t + g^2 n (C_a - C_b) \delta_{n, m} \\
 & + \Delta g \sqrt{n} C_c \delta_{n-1, m} - i \Omega_n (g \sqrt{n} C_c \delta_{n-1, m} \\
 & - \Delta C_a \delta_{n, m} \rangle \sin \Omega_n t \rangle,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{b, n}(t) = & \frac{1}{\Omega_n^2} \{ [(g^2 n + \Delta^2) C_b + g^2 n C_a \rangle \delta_{n, m} \\
 & + \Delta g \sqrt{n} C_c \delta_{n-1, m} \rangle \cos \Omega_n t + g^2 n (C_a - C_b) \delta_{n, m} \\
 & - \Delta g \sqrt{n} C_c \delta_{n-1, m} - i \Omega_n (g \sqrt{n} C_c \delta_{n-1, m} \\
 & + \Delta C_b \delta_{n, m} \rangle \sin \Omega_n t \rangle,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{c, n-1}(t) = & \frac{1}{\Omega_n^2} \{ (C_b - C_a) \Delta g \sqrt{n} \delta_{n, m} \\
 & + 2g^2 n C_c \delta_{n-1, m} \rangle \cos \Omega_n t \\
 & + \Delta [g \sqrt{n} (C_a - C_b) \delta_{n, m} + \Delta C_c \delta_{n-1, m}] \\
 & - i \Omega_n g \sqrt{n} (C_c + C_b) \delta_{n, m} \rangle \sin \Omega_n t \rangle, \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\Omega_n = \sqrt{2g^2 n + \Delta^2}. \quad (5)$$

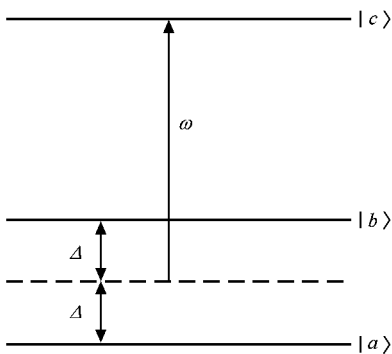


图 1 Λ 型三能级原子能级结构

原子约化密度矩阵

$$\rho_A(t) = \begin{pmatrix} \sum_n |C_{a, n}|^2 & \sum_n C_{a, n} C_{b, n}^* & \sum_n C_{a, n} C_{c, n}^* \\ \sum_n C_{b, n} C_{a, n}^* & \sum_n |C_{b, n}|^2 & \sum_n C_{b, n} C_{c, n}^* \\ \sum_n C_{c, n} C_{a, n}^* & \sum_n C_{c, n} C_{b, n}^* & \sum_n |C_{c, n}|^2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

场和原子两子系统的熵

$$S_f(t) = S_A(t) = - \text{Tr} [\rho_A(t) \ln \rho_A(t)], \quad (7)$$

式中 $\lambda_i(t)$ 是原子密度矩阵(6)的本征值. 由(3)–(7)式可求出子系统的熵时间演化规律.

3. 结果与讨论

以下对几种特殊的原子初态计算场和原子的熵. 因为原子熵与场熵相等, 所以这里只给出原子

熵计算结果.

3.1. 原子初处激发态

将 $C_c = 1, C_a = C_b = 0$ 代入(4)–(6)式得出 $\rho_A(t)$ 其本征值

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 = & \frac{1}{\Omega_{m+1}^4} [\Delta^2 + 2g^2(m+1) \rangle \cos \Omega_{m+1} t \rangle, \\
 \lambda_2 = & 1 - \lambda_1, \lambda_3 = 0. \quad (8)
 \end{aligned}$$

(7)和(8)式给出场熵时间演化曲线如图2所示. 场熵时间演化有严格周期性, 当 $\Delta \neq 0$ 时, 周期 $\tau' = 2\pi/\Omega_{m+1}$, 当 $\Delta = 0$ 时, 周期 $\tau'/4$, 周期随初场光子数增大而减小. 场熵最大值出现的时刻和失谐量与耦合系数之比 Δ/g 有密切关系: 当 $0 < \Delta/g \leq (2 - \sqrt{2})\sqrt{m+1}$ 时, 最大场熵出现于时刻

$$t = \frac{\tau'}{2\pi} \cos^{-1} \left\{ - \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sqrt{2} \mp 1) \frac{\Delta^2}{2g^2(m+1)} \pm 1] \right\},$$

最大熵值在一周期内出现四次, 其值为 $\ln 2$. 这是二态系统所能达到的最大熵, 而非三态系统可达到最大熵 $\ln 3$, 其中原因从

$\{ |a\rangle - |b\rangle \sqrt{2}, |c\rangle (|a\rangle + |b\rangle \sqrt{2}) \}$ 作为原子基矢的表象中容易看出, 因为只有后两态布居不为零. 当

$(2 - \sqrt{2})\sqrt{m+1} \leq \Delta/g \leq (2 + \sqrt{2})\sqrt{m+1}$ 时, 最大场熵出现于时刻

$$t = \frac{\tau'}{2\pi} \cos^{-1} \left\{ - \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sqrt{2} - 1) \frac{\Delta^2}{2g^2(m+1)} - 1] \right\},$$

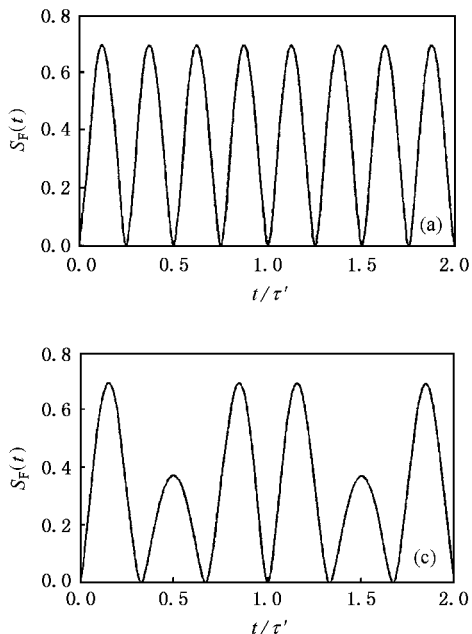
熵值仍为 $\ln 2$, 一周期内出现两次. 当 $\Delta/g > (2 + \sqrt{2})\sqrt{m+1}$ 时, 最大场熵出现于时刻 $t = \frac{\tau'}{2}$, 一周期内出现一次, 熵值小于 $\ln 2$, 且随 Δ/g 增加而下降. 造成该结果的原因可解释为失谐越大, 原子-场耦合越弱, 纠缠越松, 故场熵越小. 由此可见, 在 $\Delta/g \leq (2 + \sqrt{2})\sqrt{m+1}$ 范围内, 原子-场之间最大纠缠度与失谐量及初场光子数无关, 用场熵表示皆为 $\ln 2$.

熵为零时表示原子和场退纠缠, 相应时刻可由 $S_f(t)$ 求出. $t = k\tau' (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时, 不论是否有失谐, 场熵都是零, 系统回到初态. 当 $\Delta/g \leq \sqrt{2(m+1)}$ 时, 时刻 $t = \frac{\tau'}{2\pi} \cos^{-1} \left[- \frac{\Delta^2}{2g^2(m+1)} \right]$ 场熵也为零, 此时原子处两下能级叠加态而场处数态 $|m+1\rangle$. 对 $\Delta = 0$, 除上述零熵点外, 还有 $t = (k+1/2)\tau' (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时刻场熵为零, 该时刻系统处于态 $-|c\rangle \otimes |m\rangle$.

综上所述,一周期内系统出现最大纠缠及退纠缠次数与失谐量和原子-场耦合系数比有关,与初始场光子数无关.

3.2. 原子初态为两下能级叠加态

此处考虑两种情况:第一种情况 $C_a = C_b$



$$= 1/\sqrt{2}, C_c = 0.$$

任意时刻 t 系统态矢量及场熵

$$|\Psi_{AF}(t)\rangle = C_{a,m}|a,m\rangle + C_{b,m}|b,m\rangle + C_{c,m-1}|c,m-1\rangle, \quad (9)$$

$$S_F = -\lambda_1 \ln \lambda_1 - (1-\lambda_1) \ln(1-\lambda_1) \quad (10)$$

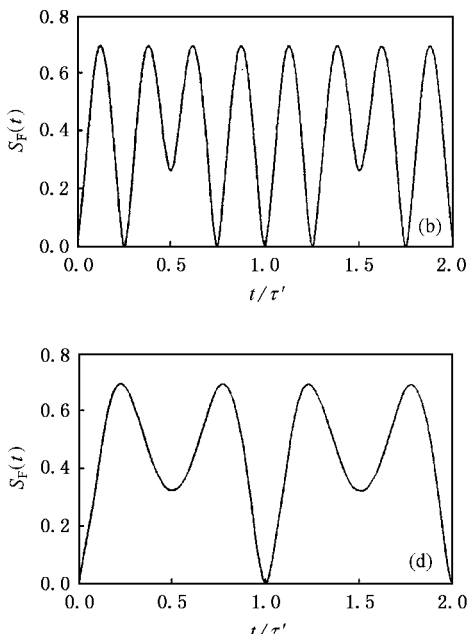


图2 初始原子处激发态、光场光子数 $m=25$ 时的场熵时间演化。(a) $\Delta/g=0$, (b) $\Delta/g=1$ (c) $\Delta/g=5$ (d) $\Delta/g=10$

其中

$$C_{a,m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \Omega_m t + i \frac{\Delta}{\Omega_m} \sin \Omega_m t \right],$$

$$C_{b,m} = C_{a,m}^*,$$

$$C_{c,m-1} = -i \frac{g\sqrt{2m}}{\Omega_m} \sin \Omega_m t, \quad (11)$$

$$\lambda_1 = \frac{2g^2 m}{\Omega_m^2} \sin^2 \Omega_m t. \quad (12)$$

若 $M=0$ 则 $S_F=0$, 系统态不演化. 对 $m \neq 0$, 出现纠缠和退纠缠周期性演化, 如图3所示. $\Delta=0$ 时, 场熵演化周期 $\tau/4$ ($\tau=2\pi/\Omega_m$), 最大熵 $\ln 2$ 出现于时刻 $t=(2k+1)\tau/8$ ($k=0, 1, 2, \dots$), 系统态矢量为

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \cos \frac{(2k+1)\pi}{4} (|a,m\rangle + |b,m\rangle) - i \sin \frac{(2k+1)\pi}{4} |c,m-1\rangle \right\}.$$

零熵出现于时刻 $t=k\tau/4$ ($k=0, 1, 2, \dots$). $\Delta \neq 0$ 时, 场熵演化周期为 τ , 在区间 $0 < \Delta/g \leq \pi$, 一周期内两次出现场熵最大值 $\ln 2$, 出现时刻

$$t = \frac{\tau}{2\pi} \sin^{-1} \left[\pm \frac{\Omega_m}{2g\sqrt{m}} \right].$$

系统退纠缠时刻 $t=k\tau/4$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 的态矢量

$$|\Psi_{AF}(k\tau/2)\rangle = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} (|a\rangle + |b\rangle) \otimes |m\rangle. \quad (13)$$

注意系统永远不会演化到态 $|c\rangle \otimes |m\rangle$. $\Delta/g > \sqrt{2m}$ 时, 零熵出现时刻不变, 但一个周期最大场熵出现一次, 出现时刻 $t=(k+1/2)\tau$ ($k=0, 1, 2, \dots$), 且最大熵随 Δ/g 上升而单调下降.

第二种情况 $C_a = -C_b = 1/\sqrt{2}, C_c = 0$. 系统态矢量及场熵仍由(9)和(10)式给出, 但其中

$$C_{a,m} = \frac{1}{\sqrt{2}\Omega_m} \left[2g^2 m + \Delta^2 \cos \Omega_m t + i\Delta\Omega_m \sin \Omega_m t \right],$$

$$C_{b,m} = -C_{a,m}^*,$$

$$C_{c,m-1} = \frac{g\sqrt{2m}}{\Omega_m} \Delta (1 - \cos \Omega_m t),$$

$$\lambda_1 = |C_{c,m-1}|^2. \quad (14)$$

$\Delta = 0$ 时原子初态对应原子相干俘获态,场熵总是零. $\Delta \neq 0$ 的场熵时间演化规律见图 4. $0 < \Delta/g < (2 - \sqrt{2})\sqrt{m}$ 时,场熵在时刻 $t = (k + 1/2)\tau$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 出现最大值,其值由 (10) 式定,其中 $\lambda_1 = 2g^2 m / (2g^2 m + \Delta^2)$,最大熵小于 $\ln 2$,并随 Δ/g 增大而上升.零熵出现于时刻 $t = k\tau$ ($k = 0, 1, 2, \dots$),此时系统回到初态.在 $(2 - \sqrt{2})\sqrt{m} \leq \Delta/g \leq (2 + \sqrt{2})\sqrt{m}$ 区间内,最大场熵为 $\ln 2$,出现在

$$t = (\tau/2\pi) \cos^{-1}(1 \pm \Omega_m^2 / \sqrt{4g^2 \Delta^2 m}).$$

当 $\Delta/g > (2 + \sqrt{2})\sqrt{m}$ 时,最大熵又出现在 $t = (k + 1/2)\tau$ ($k = 0, 1, 2, \dots$),其值随 Δ/g 增大而下降.零熵出现位置同上.

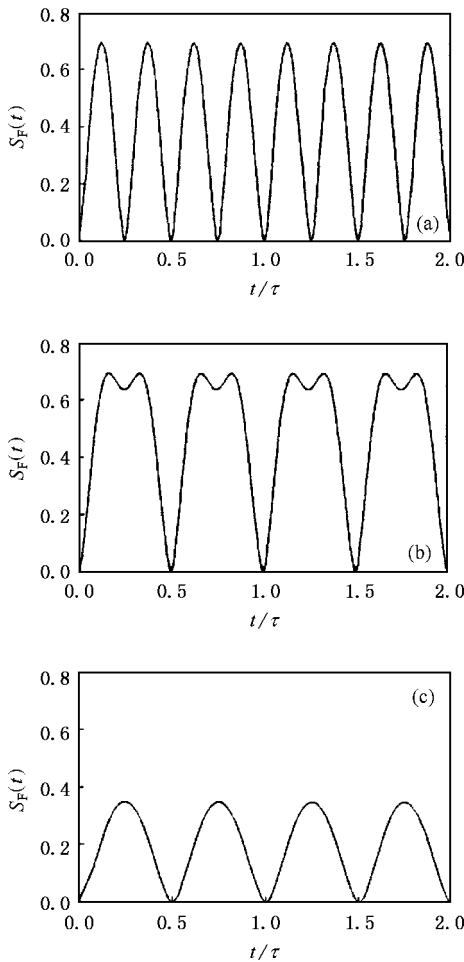


图 3 初始原子处在 $|a + b\rangle/\sqrt{2}$, 光场光子数 $m = 25$ 时的场熵时间演化. (a) $\Delta/g = 0$ (b) $\Delta/g = 5$ (c) $\Delta/g = 20$

上两种情况表明,场熵演化受两下能态初始相对位相的影响.

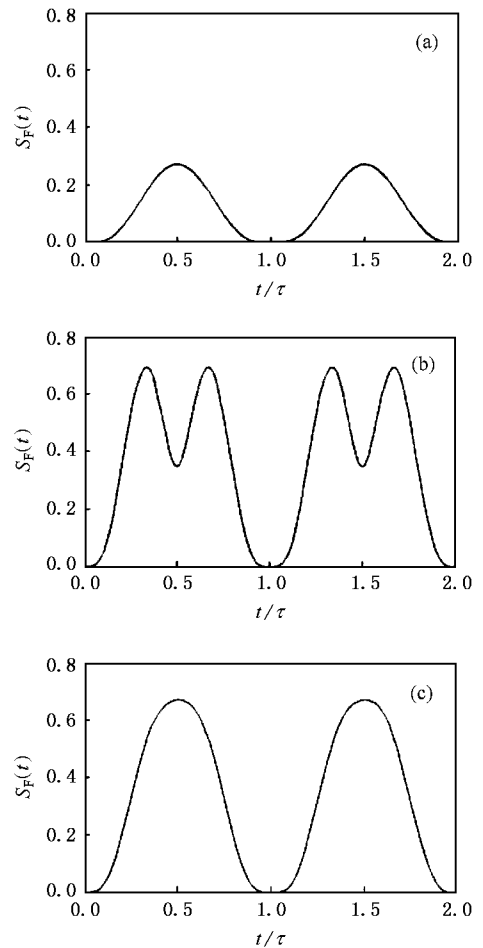


图 4 初始原子处在 $|a - b\rangle/\sqrt{2}$, 光场光子数 $m = 25$ 时的场熵时间演化. (a) $\Delta/g = 0$ (b) $\Delta/g = 5$ (c) $\Delta/g = 20$

3.3. 原子初态为 $|a, c\rangle$ 叠加态

将 $C_a = \exp(i\gamma) \sin(\theta/2)$, $C_b = 0$, $C_c = \cos(\theta/2)$ 代入 (4)–(7) 式可求得场熵,结果示于图 5. 场熵演化呈现调制周期结构,其起因是频率 Ω_m 和 Ω_{m+1} 同时出现在场熵表达式中. $\Delta = 0$ 时, S_F 包络的周期为 $T = [\sqrt{2m} + \sqrt{\chi(m+1)}] \pi/2g$; $\Delta \neq 0$ 时, S_F 包络的周期为

$$T = [\sqrt{2m + (\Delta/g)^2} + \sqrt{\chi(m+1) + (\Delta/g)^2}] \pi/g,$$

随 Δ/g 上升而增长. 计算表明,熵演化不受初始激发态与基态相对位相 γ 影响,但依赖于初态原子分布角 θ . 图 6 给出了最大场熵与 θ 的关系, $\theta \approx 0.608\pi$ 时,最大场熵可达到 $\ln 3$,这是三能级原子与单模光场之间用场熵表示的最大纠缠度.

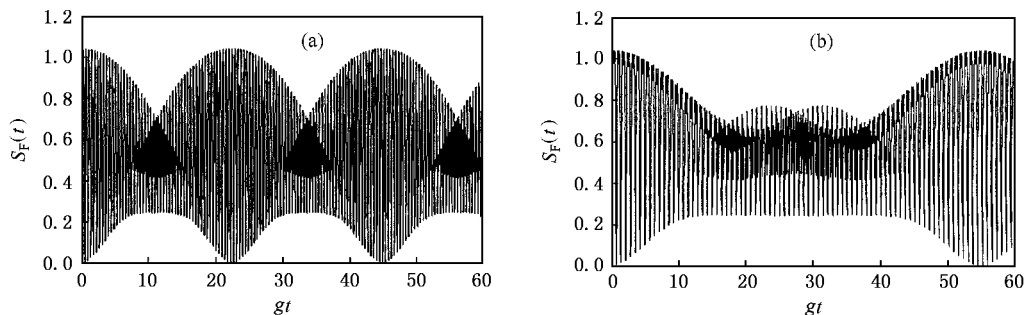


图 5 初始原子处 $e^{i\nu} \sin \frac{\theta}{2} |a\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |c\rangle$ 、光场光子数 $m = 25$ 时的场熵时间演化。(a) $\Delta/g = 0$ (b) $\Delta/g = 5$

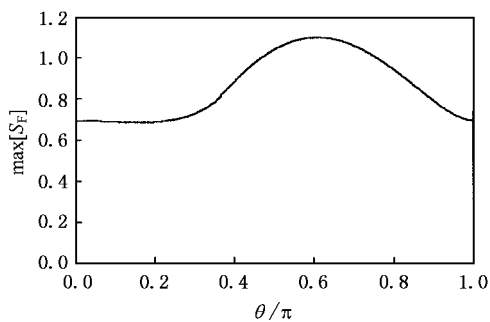


图 6 初始原子处 $e^{i\nu} \sin \frac{\theta}{2} |a\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |c\rangle$ 、光场光子数 $m = 25$ 时的最大场熵与 θ 的关系($\Delta = 0$)

4. 结 论

应用全量子理论研究了哈密顿量(1)表示的 Λ

型三能级原子与初始时刻处于数态的单模光场相互作用系统的场熵(原子-场纠缠度)时间演化特性。结果表明,场熵时间演化具有理想的周期性,简并 Λ 型三能级原子情况的演化周期小于非简并 Λ 型三能级原子情况的演化周期。演化过程中熵最大值(系统最大纠缠度)受原子初态及场的失谐量与耦合系数之比 Δ/g 和初场光子数的影响。当原子初处激发态时,最大场熵不大于 $\ln 2$,而当原子初态处于三能级适当叠加态时最大熵才可能达到 $\ln 3$,该结论与初场光子数无关。如果初始时刻场为真空态且原子处下两能级叠加态或相干俘获态,则系统不出现场和原子间的纠缠。为考虑原子相干性对系统纠缠的作用,我们对任意初原子态计算了场熵,发现场熵时间演化仅受到两下能态初始相对位相的影响,而与激发态与基态之间相对位相无关。

[1] Werner R F 2001 *Springer Tracts in Modern Physics* (Springer, Heidelberg), Vol. 173
 [2] Sanz L, Angelo R M and Furuya K 2003 *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 9737
 [3] Shi M J et al 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 825 (in Chinese) [石名俊等 2000 物理学报 **49** 825]
 [4] Fang M F 1994 *Acta Phys. Sin.* **43** 1776 (in Chinese) [方卯发 1994 物理学报 **43** 1776]
 [5] Huang Y X et al 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 75 (in Chinese) [黄燕霞等 2004 物理学报 **53** 75]
 [6] Phoenix S J D and Knight P L 1990 *J. Opt. Soc. Am. B* **7** 116
 [7] Feng X L and He L S 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1926 (in Chinese) [冯立勋、何林生 1997 物理学报 **46** 1926]
 [8] Fang M F and Zhou P 1993 *Acta Opt. Sin.* **13** 799 (in Chinese) [方卯发、周 鹏 1993 光学学报 **13** 799]

[9] Buzek V et al 1992 *Phys. Rev. A* **45** 8190
 [10] Yi X X and Sun C P 1996 *Chin. Sci. Bull.* **41** 1165 (in Chinese) [衣学喜、孙昌璞 1996 科学通报 **41** 1165]
 [11] Liu X 2000 *Physica A* **286** 588
 [12] Liu X and Fang M F 1996 *Acta Opt. Sin.* **16** 435 (in Chinese) [刘翔、方卯发 1996 光学学报 **16** 435]
 [13] Ao S M et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 52 (in Chinese) [敖胜美等 2001 物理学报 **50** 52]
 [14] Huang C J et al 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1978 (in Chinese) [黄春佳等 2002 物理学报 **51** 1978]
 [15] Fu H and Solomon A I 2002 *J. Mod. Opt.* **49** 259
 [16] Li C X and Fang M F 2003 *Chin. Phys.* **12** 294
 [17] Huang C J et al 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2543 (in Chinese) [黄春佳等 2004 物理学报 **53** 2543]

Entanglement of a Λ -type three-level atom with a single-mode field initially in the number state^{*}

Zhou Qing-Chun^{1,2)} Zhu Shi-Ning¹⁾

¹⁾*Department of Physics and State Key Laboratory of Solid State Microstructures, Nanjing University, Nanjing 210093, China*

²⁾*Department of Mathematics and Physics, East China Shipbuilding Institute, Zhenjiang 212003, China*

(Received 31 May 2004; revised manuscript received 17 September 2004)

Abstract

The time evolution of entanglement and disentanglement between a Λ -type three-level atom and a single-mode field initially in the number state in an ideal cavity are investigated by considering von Neumann entropy of the optical field. Results indicate that entanglement of the system displays periodicity; the maximal degree of entanglement depends on the initial atomic state, the initial photon number and the ratio of detuning to the coupling constant, while the number of times for maximal entanglement and disentanglement in a period is independent of the initial photon number. The initial relative phase between the two lower states have effects on the time evolution of field entropy, while the initial relative phases between the excited state and the ground states of the atom does not.

Keywords : number state, von Neumann entropy, quantum entanglement, Λ -type three-level atom

PACC : 4250

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 90201008).