

任意两个相干态的叠加及其量子统计性质^{*}

马志民¹⁾ 马爱群²⁾³⁾⁴⁾ 曾 然²⁾ 王 衢²⁾ 刘树田^{2)†}

¹⁾ 哈尔滨师范大学呼兰学院物理系, 哈尔滨 150500)

²⁾ 哈尔滨工业大学应用物理系, 哈尔滨 150001)

³⁾ 珠海市城市职业技术学院, 珠海 519015)

⁴⁾ 黑龙江大学物理科学与技术学院, 哈尔滨 150080)

(2004 年 6 月 14 日收到, 2004 年 8 月 11 日收到修改稿)

研究了由两个任意相干态构成的叠加态 $|\psi\rangle = a|\beta\rangle + be^{i\varphi}|m\rangle\beta e^{i\delta}$ 的量子统计性质, 结果表明此种叠加态普遍存在着压缩效应或光子反群聚效应. 叠加态的量子效应依赖于 β^2 和振幅系数 m , 同时改变相干态间的位相差 δ 和叠加系数间的位相差 φ 也将对叠加态的压缩效应或反群聚效应起着重要的作用.

关键词: 相干态, 叠加态, 压缩效应, 反群聚效应

PACC: 4250, 4225K, 0530, 0365

1. 引 言

光的相干性理论以及相干态^[1]是量子光学的基础, 也是现代物理学中一个重要研究领域. 相干态表象理论可以方便地解决诸多量子力学问题, 与此同时相干态的线性和非线性叠加以及 q 变形叠加态已经成为制备具有不同性质的量子态光场的重要手段^[2-12]. 近年来的研究表明非经典光场将在量子信息的理论和实践中占有重要的地位. Knill 等人^[13]证明单光子光源和单光子探测通过线性光学系统可以实现量子计算, 而 Ralph 等人^[14]则提出可以利用相干态的叠加 $\mu|\alpha\rangle \pm \nu|-\alpha\rangle$ 实现量子计算. Kim 等人^[15]证明, 利用含有分束器的线性光学系统实现量子纠缠的先决条件为输入的光场必须是非经典场. 因而相干态的叠加态的量子特性就显得尤为重要.

相干态叠加存在多种形式, 其中包括不同类型的非线性叠加态. 最基本的一种叠加形式是两个单模相干态的叠加. Schleich 等人^[16]研究了实轴对称的位相不同但具有相同平均光子数的两个相干态的叠加, 证明该叠加态具有非经典的亚泊松分布和压缩效应. Schleich 等人^[17]也证明了具有相同位相且有不同的平均光子数的两个相干态的叠加可以呈现出

压缩效应. 然而, 我们可以证明任意的两个单模相干态的相干叠加 $a|\beta\rangle + b|\gamma\rangle$ 在普遍情况下存在着非经典场的量子效应. 如果把复数 γ 写成 $m\beta e^{i\delta}$, 则两个相干态的一般叠加就可以定义为

$$|\psi\rangle = a|\beta\rangle + be^{i\varphi}|m\rangle\beta e^{i\delta}, \quad (1)$$

其中 $|\beta\rangle$ 和 $|\gamma\rangle$ 是相干态, 其满足 $\hat{a}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$, \hat{a} 是光场的湮没算符. 系统 m 可以认为是两个相干态的振幅倍数, 表征两个相干态具有不同的平均光子数. δ 表示两个相干态的位相差, 而 φ 则表示叠加系数间的位相差. 为了方便起见, 不考虑 $|\beta\rangle$ 的绝对位相, 因此可以取 β, a, b 为实数, 而 $m \in (-\infty, \infty)$. 一般相干态的叠加态的归一化条件是

$$a^2 + b^2 + 2ab \exp\left[-\frac{1}{2}(m^2 + 1)\beta^2 + m\beta^2 \cos\delta\right] \times \cos(\varphi + m\beta^2 \sin\delta) = 1. \quad (2)$$

很显然在一定条件下(1)式可化为奇偶相干态 $\mathcal{K}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$ 以及 Schleich 等人所研究的“镜像”叠加态 $\mathcal{K}(|\alpha e^{i\phi}\rangle + |\alpha e^{-i\phi}\rangle)$. 本文所给出的一般相干态的叠加态可以将两个相干态叠加扩展到具有不同位相差, 不同平均光子数, 不同叠加系数等最普遍情况. 研究的结果表明, 这种一般相干态的叠加态普遍存在着压缩或光子反群聚等非经典效应.

^{*} 黑龙江省教育厅项目(批准号: 10541277)资助的课题.

[†] E-mail: stliu@hit.edu.cn

2. 一般相干态的叠加态的非经典特性

下面研究由(1)式所定义的一般相干态叠加态的一般压缩和反群聚效应等非经典特性.

2.1. 一般压缩特性

如所周知,光场复振幅算符的两个正交分量为

$$\begin{aligned} X_1 &= (\hat{a}^\dagger + \hat{a})/2, \\ X_2 &= (\hat{a}^\dagger - \hat{a})/2. \end{aligned} \quad (3)$$

这两个厄米算符满足对易关系 $[X_1, X_2] = \frac{i}{2}$ 和不确定关系 $(\Delta X_1)^2 (\Delta X_2)^2 \geq \frac{1}{16}$, 场的某个正交分量的均方差满足

$$(\Delta X_j)^2 < \frac{1}{4} \quad (j = 1, 2), \quad (4)$$

则称光场在 X_j 分量上存在二阶压缩效应, 即一般压缩效应. 为表征这种压缩程度, 可定义其压缩度为

$$D_j(1) = 4(\Delta X_j)^2 - 1 \quad (j = 1, 2), \quad (5)$$

即

$$D_1(1) = 2(\hat{a}^\dagger \hat{a} + (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2) - (\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2), \quad (6a)$$

$$D_2(1) = 2(\hat{a}^\dagger \hat{a} - (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2) + (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2), \quad (6b)$$

式中 $-1 < D_j(1) < 0$ 表示光场在 X_j 分量上存在一般压缩效应; $|D_j(1)|$ 的绝对值表示其被压缩的程度, 当 $D_j(1) = -1$ 时表示光场在 X_j 分量上 100% 被压缩.

由(1)式可算出

$$\begin{aligned} \psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi &= \beta^2 \left\{ a^2 + m^2 b^2 + 2mab \exp \left[-\frac{1}{2}(m^2 + 1)\beta^2 + m\beta^2 \cos \delta \right] \right. \\ &\quad \left. \times \cos(\psi + \delta + m\beta^2 \sin \delta) \right\}, \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \psi | (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2) | \psi &= \beta^2 \left\{ 2a^2 + 2m^2 b^2 \cos 2\delta + 2ab \exp \left[-\frac{1}{2}(m^2 + 1)\beta^2 + m\beta^2 \cos \delta \right] \right. \\ &\quad \left. \times [\cos(\psi + m\beta^2 \sin \delta) + m^2 \cos(\psi + 2\delta + m\beta^2 \sin \delta)] \right\}, \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} \psi | (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) | \psi &= \beta^2 \left\{ 2a^2 + 2mb^2 \cos \delta + 2ab \exp \left[-\frac{1}{2}(m^2 + 1)\beta^2 + m\beta^2 \cos \delta \right] \right. \\ &\quad \left. \times [\cos(\psi + m\beta^2 \sin \delta) + m \cos(\psi + \delta + m\beta^2 \sin \delta)] \right\}, \end{aligned} \quad (7c)$$

$$\begin{aligned} \psi | (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) | \psi &= -i\beta^2 \left\{ 2mb^2 \sin \delta + 2ab \exp \left[-\frac{1}{2}(m^2 + 1)\beta^2 + m\beta^2 \cos \delta \right] \right. \\ &\quad \left. \times [m \sin(\psi + \delta + m\beta^2 \sin \delta) - \sin(\psi + m\beta^2 \sin \delta)] \right\}. \end{aligned} \quad (7d)$$

我们分如下几种情况来讨论这种叠加态的压缩特性:

2.1.1. $\delta = 2n\pi$ 和 $\delta = (2n+1)\pi$ 时情形

此时对应两个相干态的态矢量同向或反向, 归一化条件为

$$a^2 + b^2 + 2ab \exp \left[-\frac{1}{2}(m-1)\beta^2 \right] \cos \varphi = 1.$$

对于 $\delta = 2n\pi$ 则(7)式化简为

$$\psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi = \beta^2 [a^2(1-m) + b^2 m(m-1) + m], \quad (8a)$$

$$\psi | (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2) | \psi = \beta^2 [a^2(1-m^2) + b^2(m^2-1) + 1 + m^2], \quad (8b)$$

$$\psi | (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) | \psi$$

$$= \beta [a^2(1-m) + b^2(m-1) + 1 + m],$$

$$\psi | (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) | \psi$$

$$= -i2ab(m-1) \exp \left[-\frac{1}{2}(m-1)\beta^2 \right] \sin \varphi \quad (8d)$$

根据(6)式得到

$$D_1(1) = \beta^2(m-1)[(a^2+b^2) - (a^2-b^2)], \quad (9)$$

$$D_2(1) = \beta^2(m-1)[(a^2+b^2-1) - 4a^2b^2 \exp \left[-(m-1)\beta^2 \right] \sin^2 \varphi] \quad (10)$$

对于 $\delta = (2n+1)\pi$ 时的情形, 只要将(8)式中的 m 换成 $-m$ 即可.

很显然当 $\delta = 2n\pi, m=1$ 或 $\delta = (2n+1)\pi, m=-1$ 时, 两个相干态完全相同, 从而仍然得到相干

态,此时 $D_1(1) = D_2(1) = 0$, X_1 和 X_2 分量不存在压缩,光场是 X_1 和 X_2 的最小测不准态.但是当 $m \neq 1$ 或 $m \neq -1$ 时,叠加态不再是完全经典场态.选取适当的耦合系数 $a(b)$,我们发现在 X_1 或 X_2 分量上均可以存在一般压缩效应.

下面仅考虑 $\delta = 2n\pi$ 时的情形.根据归一化条件(2)式可知系数 $a(b)$ 满足一个以 m, β, φ 为参量的二次方程,该方程解的轨迹将给出一个椭圆.因此当给定一个 a (或 b) 将对应两个 b (或 a) 值.当 $a = 0$ 或 $b = 0$ 时叠加态显然化为相干态.从(10)式可以明显看出,只要 $m \neq 1$ 且 $a^2 + b^2 < 1$, 总有 $D_2(1) < 0$ 即光场的 X_2 分量总是被压缩的.

确定系数 a, b 的取值范围比较复杂,因为取值范围与 $m, \beta, \delta, \varphi$ 有关系.不失一般性,令 $a \in [-1, 1]$, 因此 b 的选取要由(2)式所表示的二次方程给出.由于 $a^2 \leq 1$, 此时 b 具有两个实数解,即 $b_- \leq 0$ 和 $b_+ \geq 0$.通过数值的方法可以证明,一般情况下存在着 $a \in [-\epsilon, \epsilon]$ $\epsilon \leq 1$ 的区域,使得在 $a < 0, b = b_+$ 以及 $a > 0, b = b_-$ 时场的 X_1 分量存在一般压缩.压缩的宽度 2ϵ 和压缩程度取决于参数 m 以及 β^2 .本质上,叠加态的量子性取决于在此态上的平均

光子数.当平均光子数 $\langle \psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi \rangle$ 较小时,其量子特性表现愈加明显.从(8a)式的平均光子数表达式可以看出,它形式上取决于 β^2 和 m 的二次函数(实际上 b 也与 m 和 β^2 有关).对于 δ 为 π 的整数倍时,其依赖关系变得非常明显(见(9)式).

由于 b 与 $a, m, \beta^2, \delta, \varphi$ 等参数有关(归一化条件决定),使得(9)式中的 $[a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)^2] < 0$ 成为可能.图1给出了在 $\delta = 2n\pi$ 时, X_1 分量压缩与 β^2 以及 m 变换关系.从图中可以看出 β^2 逐渐增大时,其压缩的区域逐渐变窄,同时压缩的幅度减小(图1(a)).随着 $(m-1)^2$ 的增大,压缩的区域也同样逐渐变窄,压缩的幅度减小(图1(b)).图中标注的 b_- 和 b_+ 分别表示 b 取负值和正值时的解.因而 X_1 分量压缩出现在 $a > 0, b > 0$ 和 $a < 0, b > 0$ 两个区域.与此相反, X_2 分量压缩总是出现在 $a > 0, b > 0$ 和 $a < 0, b < 0$ 两个区域,且该分量上的一般压缩总是存在的.

2.1.2. $\delta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ 时情形

当两个相干态的位相差 $\frac{\pi}{2}$ 时,由(7)式得到

$$\langle \psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi \rangle = \beta^2 \left\{ a^2 + m^2 b^2 - 2mab \exp \left[-\frac{1}{2}(1+m^2)\beta^2 \right] \sin(\varphi + m\beta^2) \right\}, \quad (11a)$$

$$\langle \psi | (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2) | \psi \rangle = \beta^2 \left\{ 2a^2 - 2m^2 b^2 - \chi(m^2 - 1)ab \exp \left[-\frac{1}{2}(m^2 + 1)\beta^2 \right] \cos(\varphi + m\beta^2) \right\}, \quad (11b)$$

$$\langle \psi | (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) | \psi \rangle = \beta \left\{ 2a^2 + 2ab \exp \left[-\frac{1}{2}(m^2 + 1)\beta^2 \right] [\cos(\varphi + m\beta^2) - m \sin(\varphi + m\beta^2)] \right\}, \quad (11c)$$

$$\langle \psi | (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) | \psi \rangle = -i\beta \left\{ 2mb^2 + 2ab \exp \left[-\frac{1}{2}(m^2 + 1)\beta^2 \right] [m \cos(\varphi + m\beta^2) - \sin(\varphi + m\beta^2)] \right\}. \quad (11d)$$

令 $\varphi + m\beta^2 = 0$, 上式结合(2)式和(6)式得到

$$D_1(1) = \beta^2 [4a^2 + (m^2 - 1)(a^2 + b^2 - 1) - (1 + a^2 - b^2)^2], \quad (12)$$

$$D_2(1) = \beta^2 [4m^2 b^2 + (m^2 - 1)(1 - a^2 - b^2) - m^2(1 + b^2 - a^2)^2]. \quad (13)$$

在该条件下 X_1 分量的一般压缩与 β^2 和 m 的二次函数有关.从(12)式似乎觉得当 m 很大时 $(m^2 - 1)$ 可以放大式中小于0的项 $(a^2 + b^2 - 1)$.但是当 β 确定时,增大 m 值反而会减小 X_1 分量的压缩程度.原因很显然,当 m 很大时,归一化条件

$$a^2 + b^2 + 2ab \exp \left[-\frac{1}{2}(m^2 + 1)\beta^2 \right] = 1$$

将意味着 $a^2 + b^2 \approx 1$.这将使得 $(a^2 + b^2 - 1) \approx 0$, 同时

$$4a^2 - (1 + a^2 - b^2)^2 \approx 4(a^2 - a^4) > 0.$$

所以增大 m 很难达到 X_1 分量的压缩.由图2(a)可以看出当 m 逐渐增大时, X_1 分量上的压缩逐渐减小.同时,增大 β^2 值也将使得压缩效应减弱,见图2(b).从(13)式可见,当 $m < 1$ 时,可以有很大的范围使得 $(1 - a^2 - b^2) > 0$, 而此时 $(m^2 - 1) < 0$.所以 $D_2(1) < 0$ 可以在很大的范围得以满足,这一点可以从图2看出.当 $m \geq 1$ 时 X_1 和 X_2 分量都不存在压缩效应.

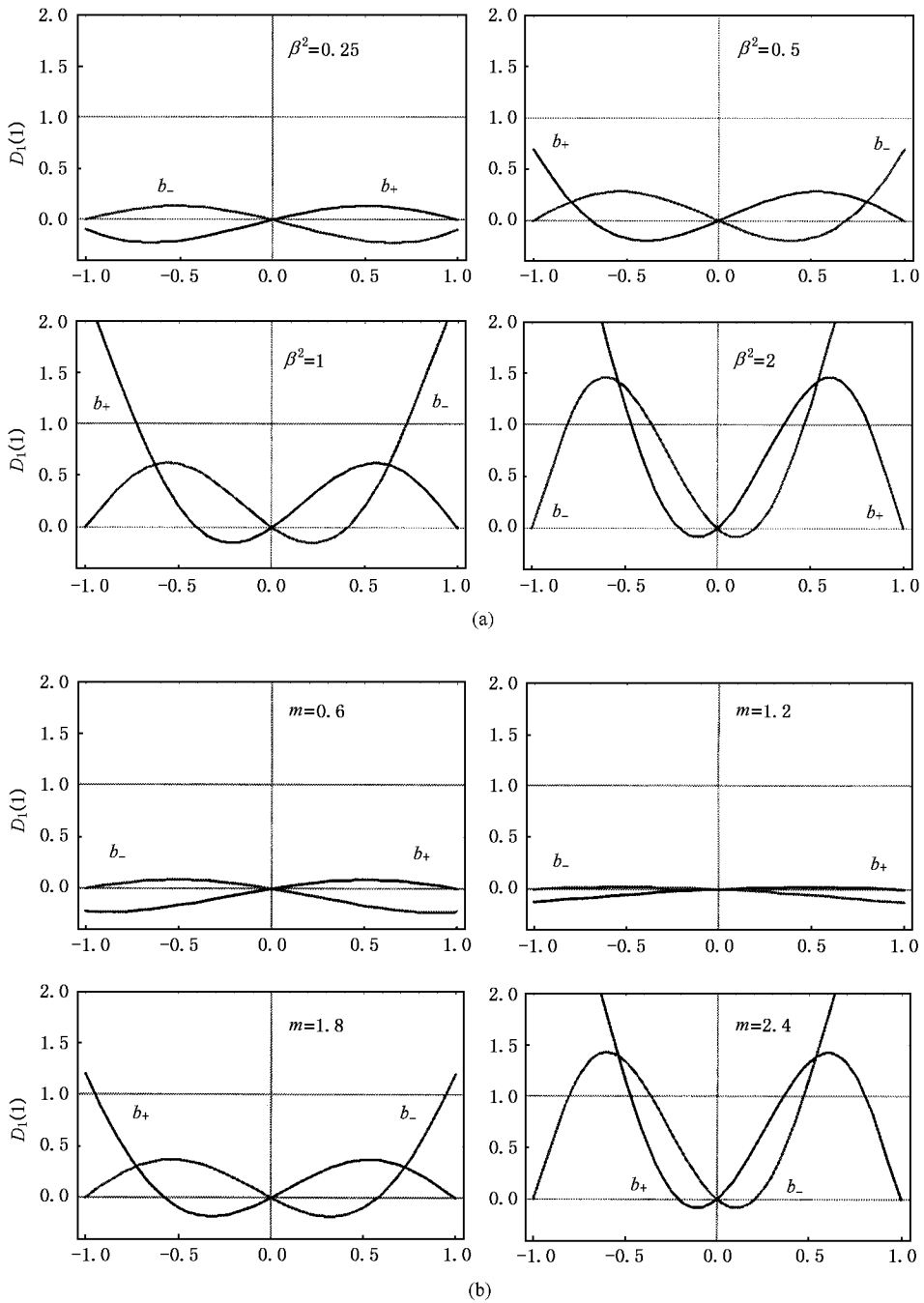


图 1 $\delta = 2n\pi, \phi = 2n\pi$ 时 X_1 分量的压缩效应. (a) $m = 2$ 时压缩效应随 β^2 的变化关系曲线, 随着 β^2 的增大, 压缩区域和压缩程度均在减小; (b) $\beta^2 = 1$ 时压缩效应随 m 的变化关系, 同样增大 m 也使得压缩效应减小

2.1.3. 其他情形

数值计算表明, 该叠加态在一般的条件下存在光场分量的一般压缩. 虽然很难用解析表达式判定存在场分量 X_1 存在的区域和程度, 利用数值计算却比较容易寻找. 叠加态可以改变的参数除了两个相干态的位相差 δ 之外, 改变叠加系数的位相差 φ 也可以改变叠加态的性质. 例如, 叠加态 $a|\beta +$

$ib|m\rangle e^{i\theta}$ 可以被证明在 $\delta = 2n\pi$ 以及 $\delta = (2n + 1)\pi$ 时不存在 X_1 分量的压缩效应. 此时 $\varphi = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ 以及 $a^2 + b^2 = 1$. 根据 (9) 式得到

$$D_1(1) = \beta^2(m^2 - 1)[1 - (a^2 - b^2)^2] \geq 0.$$

故 X_1 分量的一般压缩将不存在, 但却存在着 X_2 分量上的一般压缩. 当 δ 和 φ 取任意组合时, 很容易找到出现场的 X_1 分量一般压缩效应的区域. 图 3 给

出了三种不同参数组合下出现分量的一般压缩效应的情况.

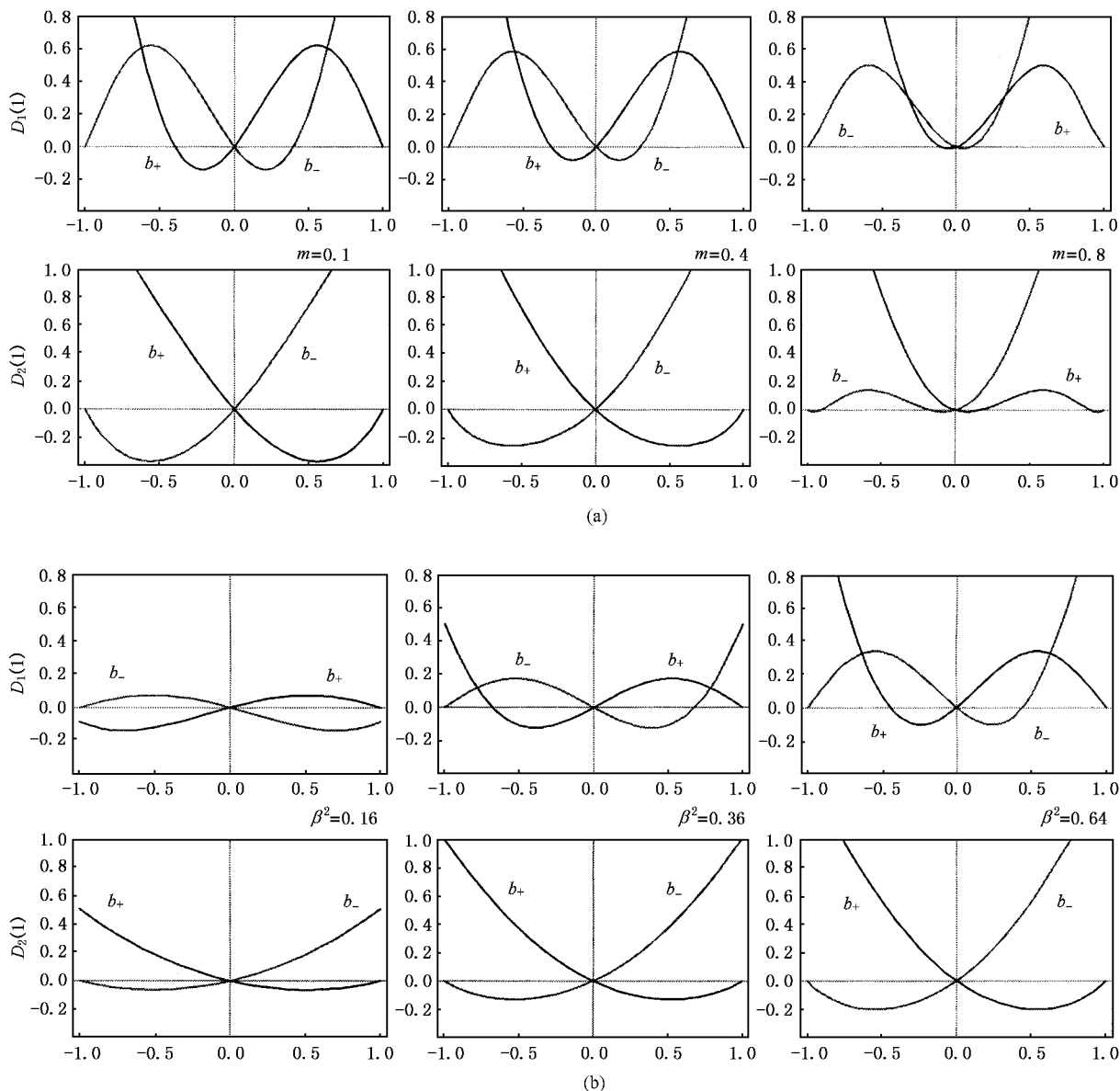


图 2 $\delta = \frac{\pi}{2}, \varphi = -m\beta^2$ 时叠加态的一般压缩效应.(a) $\beta^2 = 1$ 时压缩效应随 m 的变化 (b) $m = 0.4$ 时压缩效应随 β^2 的变化

2.2. 光子反群聚效应

光子的反群聚效应是区分经典光场和非经典光场的主要判据之一,由场的二阶相干度函数表示.单模光场的二阶相干度定义为

$$g^{(2)}(0) = \frac{\hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2}{\hat{a}^\dagger \hat{a}^2}. \quad (14)$$

若 $g^{(2)}(0) < 1$, 则光子是反群聚的,此时光场具有非经典效应.对于由(1)式定义的一般相干态的叠加态而言,其二阶相干度函数为

$$g^{(2)}(0) = \frac{a^2 + m^4 b^2 + 2abm^2 \exp[-\frac{1}{2}(m^2 + 1)\beta^2 + m\beta^2 \cos \delta] \cos(\varphi + 2\delta + m\beta^2 \sin \delta)}{\{a^2 + m^2 b^2 + 2abm \exp[-\frac{1}{2}(m^2 + 1)\beta^2 + m\beta^2 \cos \delta] \cos(\varphi + \delta + m\beta^2 \sin \delta)\}^2}. \quad (15)$$

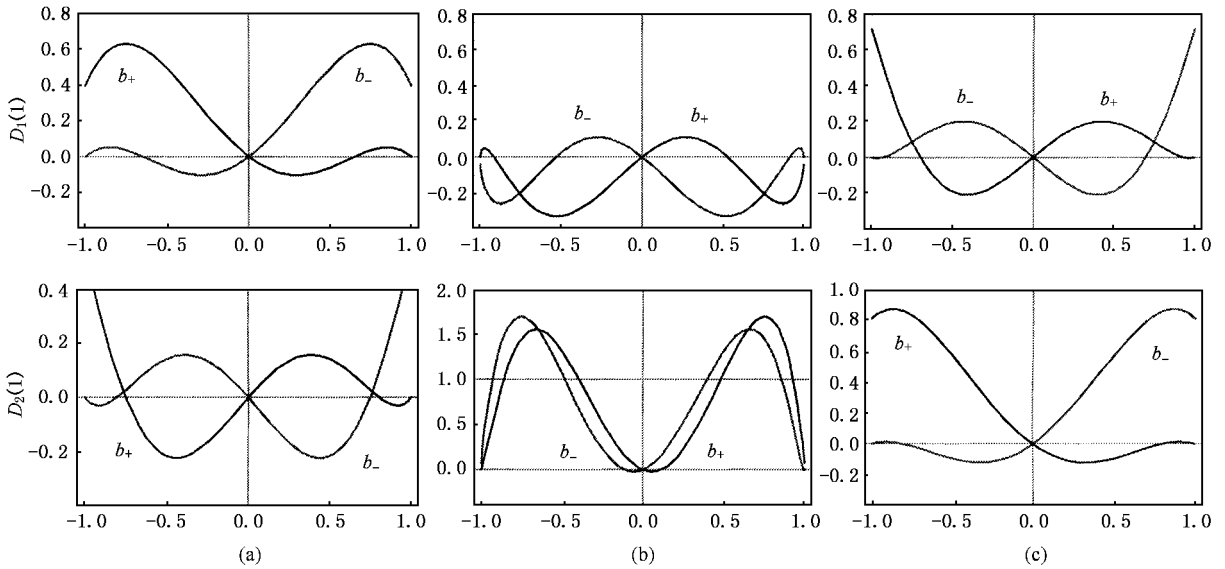


图 3 当 δ, φ, m 和 β^2 任意选取时叠加态出现的一般压缩效应. 图中仅给出了三种情况. (a) $\delta = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{13}, \beta^2 = 1, m = 0.8$ (b) $\delta = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{8}, \beta^2 = 1, m = 1.8$ (c) $\delta = \frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{\pi}{4}, \beta^2 = 0.16, m = -1.2$

同样, 我们分几种情况考虑一般相干态叠加态的光子反群聚效应.

2.2.1. $\delta = 2n\pi$ 以及 $\delta = (2n + 1)\pi$ 时情形

我们仅考虑 $\delta = 2n\pi$ 时的情形, $\delta = (2n + 1)\pi$ 的情况可以由 m 替换成 $-m$ 得到. 从(15)式得到

$$g^{(2)}(\chi(0)) = \frac{a^2 + b^2 m^4 + 2abm^2 \exp[-\frac{1}{2}(m-1)^2 \beta^2] \cos \varphi}{\{a^2 + b^2 m^2 + 2abm \exp[-\frac{1}{2}(m-1)^2 \beta^2] \cos \varphi\}^2} \quad (16)$$

$m = 1$ 时, 根据归一化条件(2)有 $a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi = 1$. 不难看出 $g^{(2)}(\chi(0)) = 1$, 此时叠加等效于一个相干态. 当 $m \neq 1$ 时, 归一化条件为 $a^2 + b^2 + 2ab \exp[-\frac{1}{2}(m-1)^2 \beta^2] \cos \varphi = 1$, 从而(16)式化为

$$g^{(2)}(\chi(0)) = \frac{a^2 + b^2 m^4 + m^2(1 - a^2 - b^2)}{[a^2 + b^2 m^2 + m(1 - a^2 - b^2)]^2} \quad (17)$$

首先我们注意到(17)式中如果 $a^2 + b^2 = 1$, 即 $\varphi = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, 则有

$$g^{(2)}(\chi(0)) = \frac{a^2 b^2 m^4}{(a^2 + b^2 m^2)^2} \quad (18)$$

由于

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 m^4 - (a^2 + b^2 m^2)^2 \\ &= 1 + (m^4 - 1)b^2 - [1 - (m^2 - 1)b^2]^2 \\ &= (m^2 - 1)^2 b^2 (1 - b^2) \geq 0, \end{aligned}$$

故无论 m 和 β 取何值, $g^{(2)}(\chi(0)) \geq 1$ 始终成立. 故叠加

态 $a|\beta + ib|_m\beta$ 不存在光子反群聚效应. 特别地当 $m = -1$ 时, 叠加态 $a|\beta + ib|_{-1}\beta$ 的 $g^{(2)}(\chi(0)) = 1$ 且在 X_2 分量上有压缩效应.

其次考虑 $m = -1$ 时的情况, 即叠加态 $a|\beta + be^{i\varphi}|_{-1}\beta$. 只要取 $a > 0, b < 0$ 或 $a < 0, b > 0$ 以及 $\cos \varphi > 0$ 其二阶相干度 $g^{(2)}(\chi(0)) < 1$ 总是成立的. 此时

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\chi(0)) &= \frac{1}{(2a^2 + 2b^2 - 1)^2} \\ &= \frac{1}{[1 - 4ab \exp(-2\beta^2) \cos \varphi]^2} < 1. \quad (19) \end{aligned}$$

这样的叠加态在 $\beta^2 < 1$ 即平均光子数很小时呈现较强的非经典场特性(见图4(a)). 事实上这种由相干态构成的 Schrödinger 猫态是光场量子纠缠的基础, 使得量子光学在量子信息研究中起到了重要的作用^[18,19].

光子的反群聚效应同样可以出现在其他 $m \neq 1$ 的情况下. 只要满足 $a > 0, b < 0$ 或 $a < 0, b > 0$ 且 β^2

和 m 很小.由(8a)式可知,平均光子数与 β^2 和 m 有关,增大 β^2 或 m 都会使得光子数增多,从而量子效应减弱.图4给出了 $\delta = 2n\pi, \varphi = 2n\pi$ 时,二阶相干度随 m 以及 β^2 的变化关系.从图4(a)和图4(b)可以看出光子数反群聚效应与平均光子数的关系,由

于平均光子数是 m 的近似二次函数,所以随着 m 的增大,其二阶相干度函数的形状发生变化,反群聚效应逐渐减弱,而平均光子数在 β^2 很小时是 β^2 的近似线性函数,所以 β^2 增大时,反群聚效应减弱但二阶相干态函数 $g^{(2)}(0)$ 的形状基本不变.

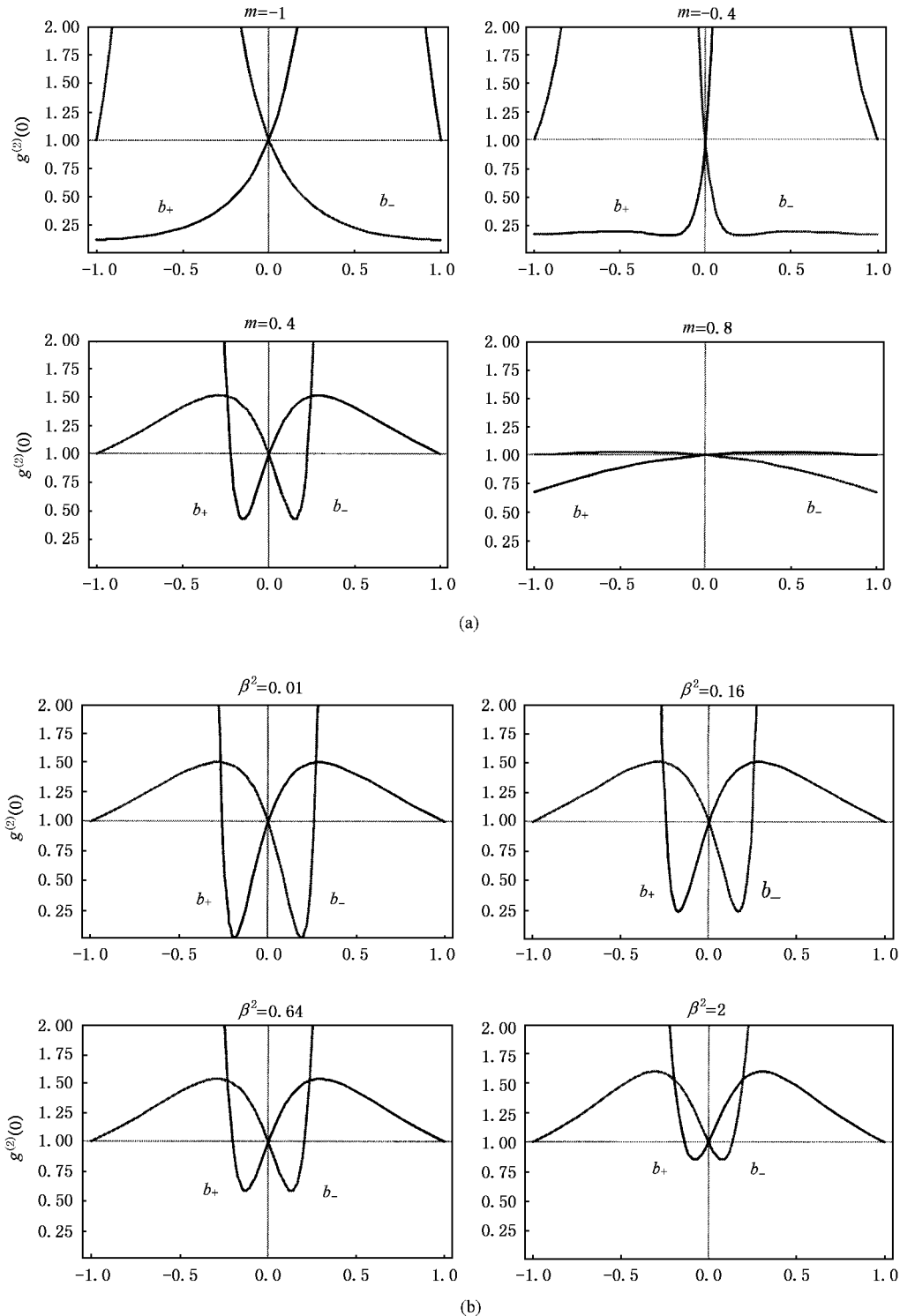


图4 $\delta = 2n\pi, \phi = 2n\pi$ 时二阶相干度.(a) $\delta = 2n\pi, \varphi = 2n\pi, \beta^2 = 0.36$ 时二阶相干度随 m 的变化关系 (b) $\delta = 2n\pi, \varphi = 2n\pi, m = 0.4$ 时二阶相干度随 β^2 的变化关系

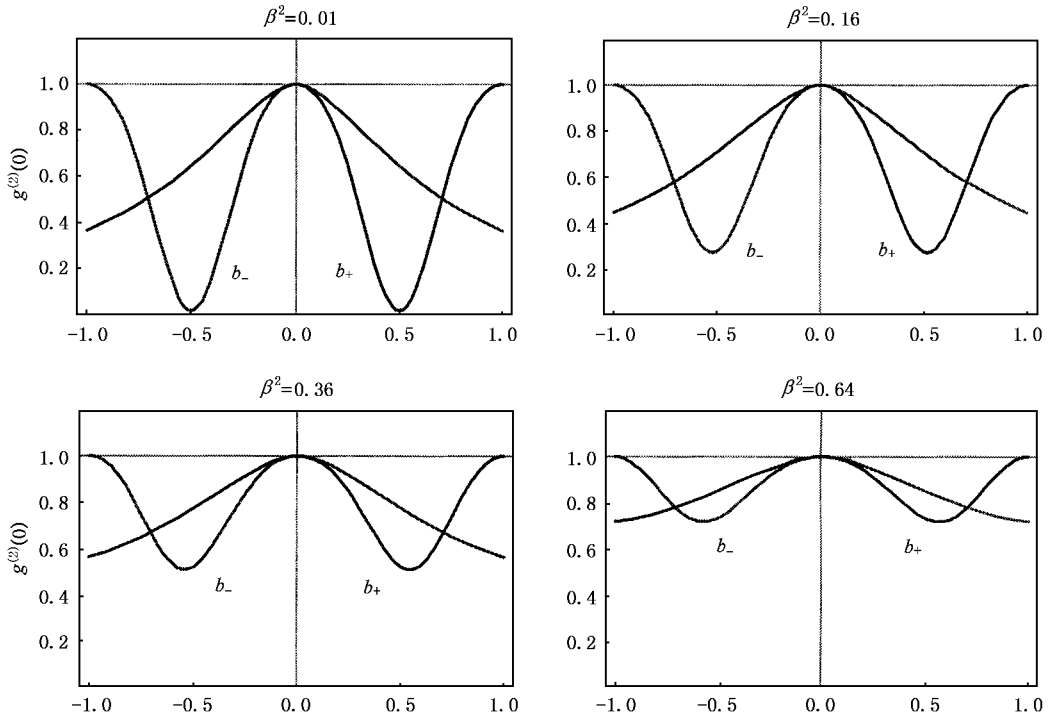


图 5 当 $\delta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \varphi + m\beta^2 = 0$ 且 $m = 1$ 时叠加场的反群聚效应, 此时 $g^{(2)}(\chi(0)) \leq 1$. 随着 β^2 的增大叠加态退到相干态

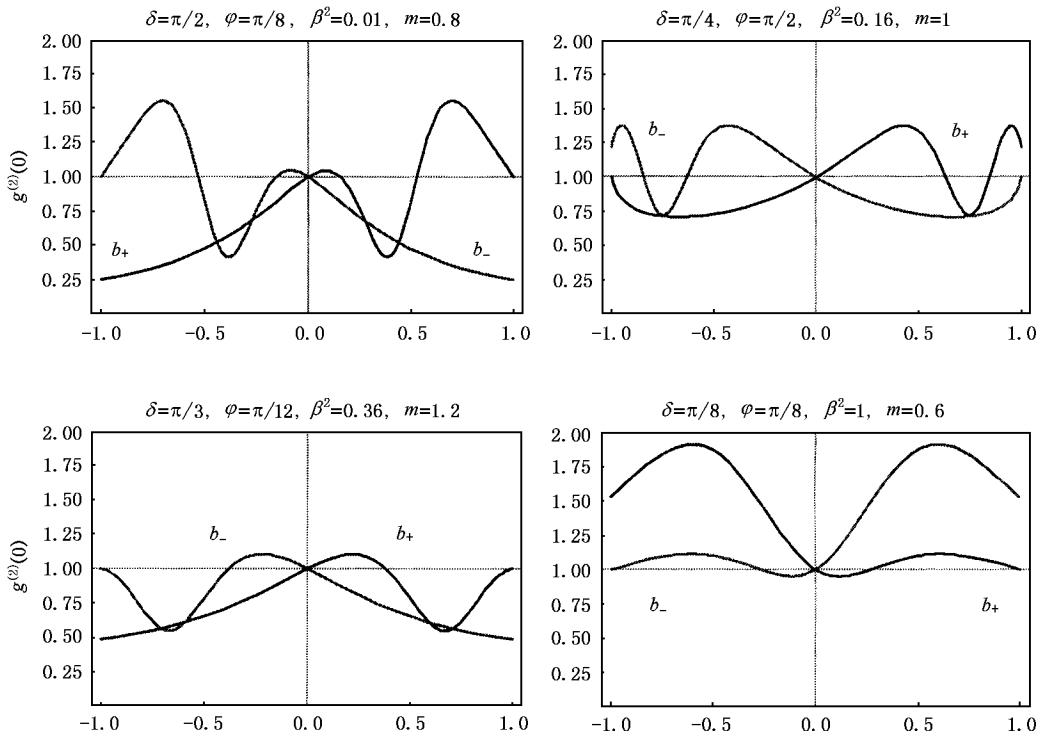


图 6 当 δ, φ, m 和 β^2 在适当范围内随机选取时叠加场的反群聚效应

2.2.2. $\delta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ 时情形

当两个相干态矢量垂直叠加时,其二阶相干度函数为

$$g^{(2)}(0) = \frac{a^2 + b^2 m^4 - 2m^2 ab \exp[-\frac{1}{2}(m^2 + 1)\beta^2] \cos(\varphi + m\beta^2)}{\{a^2 + b^2 m^2 - 2mab \exp[-\frac{1}{2}(m^2 + 1)\beta^2] \sin(\varphi + m\beta^2)\}^2}. \quad (20)$$

此时的归一化条件为

$$a^2 + b^2 + 2ab \exp[-\frac{1}{2}(m^2 + 1)\beta^2] \times \cos(\varphi + m\beta^2) = 1.$$

我们注意到当 $m = 1$ 且 $\varphi + m\beta^2 = 0$ 时(20)式化为

$$g^{(2)}(0) = \frac{2a^2 + 2b^2 - 1}{(a^2 + b^2)^2}. \quad (21)$$

由于

$$\begin{aligned} & \chi(a^2 + b^2) - 1 - (a^2 + b^2)^2 \\ & = -[(a^2 + b^2) - 1]^2 \leq 0, \end{aligned}$$

所以有 $g^{(2)}(0) \leq 1$. 这意味着在我们感兴趣的 $a \in [-1, 1]$ 范围内,将总会得到光子反群聚效应.这意味着叠加态 $a|\beta\rangle + be^{-\beta^2}|\beta\rangle$ 是一个纯非经典场态.当 β^2 足够大的时候,叠加态变为相干态.图5给出了该情形下的 $g^{(2)}(0)$ 随不同的 β^2 值时的变化关系.

2.2.3. δ 和 φ 任意选取时情形

当两个相干态矢量以任意位相差叠加时,采用解析表达式的方式找出其二阶相干度函数小于1的区域同样是困难的.因为系数 b 是所有参数的函数.此时找出含有 a, b, m 和 β 的不等式关系及其复杂.因此采取数值计算的方法寻找 $g^{(2)}(0) < 1$ 的区域并分析他们的特性.

在两个相干态矢量平行叠加时,其耦合系数 a 和 b 必须反符号时才能有非经典的光子反群聚效应.数值解析表明,在非平行叠加态下,这个条件变得非常脆弱.一般情况下光子反群聚效应可以出现在 $a > 0, b > 0$ 或 $a < 0, b < 0$ 的区域,而且范围可以很宽.图6给出了在任意选取 δ 和 φ 情况下 $g^{(2)}(0)$ 的曲线. $g^{(2)}(0) < 1$ 对于 m 的依赖关系很强也比较复杂,这是因为平均光子数是 m 的复杂函数.所以图中可见不同 m 值时,二阶相干度函数的形状变化较大,出现 $g^{(2)}(0) < 1$ 的区域也多种多样.由于平均光子数为 β^2 近似线性函数,所以增大 β^2 只是整体上减弱叠加态的非经典效应.

3. 结 论

本文研究了由两个相干态构成的一般叠加态 $|\psi\rangle = a|\beta\rangle + be^{i\varphi}|\beta\rangle e^{i\delta}$ 的量子统计性质.结果表明除了两个相干态严格相同,即 $\delta = 2n\pi, m = 1$ 以及 $\delta = (2n + 1)\pi, m = -1$ 仍保持相干态特性之外,这种叠加态存在一般的光场压缩效应或光子反群聚效应.解析和计算机计算结果均证明叠加态的非经典效应依赖于两个相干态的位相差 δ , 叠加系数间的位相差 φ , 振幅系数 m 以及 β^2 . 在任意选取 δ 和 φ 时,叠加态一般存在 X_1 和 X_2 分量上的压缩效应或光子反群聚效应.两个相干态间的量子干涉效应在平均光子数较小时变得尤为强烈(一般在 $m \leq 2$ 以及 $\beta^2 \leq 1$), 而叠加态的平均光子又是 m 和 β^2 的复杂函数,所以总可以选取适当的系数 m 和 β^2 使得这种叠加态处于非经典的光场态.研究中我们得到如下几种特例:

1. 两个相干态同相叠加,即 $|\psi\rangle = a|\beta\rangle + be^{i\varphi}|\beta\rangle$, $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ 以及 $m \neq 1$ 时普遍存在着 X_1 分量上的压缩,其压缩的宽度(相对与系数 a)的选取而言)和程度均随着 m 和 β^2 的增大而减小.压缩出现在 $a > 0, b < 0$ 或 $a < 0, b > 0$ 的条件下,同样在此条件下存在光子的反群聚效应,即 $g^{(2)}(0) < 0$. 二阶相干度函数强烈地依赖与参数 m , 随着 m 和 β^2 的增大,反群聚效应减弱.
2. 当两个相干态同相叠加,且 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 即 $|\psi\rangle = a|\beta\rangle + ib|\beta\rangle$, 叠加态不存在光子反群聚效应, $g^{(2)}(0) \geq 1$. 此时不存在 X_1 分量上的压缩,但却总是存在 X_2 分量上的压缩.
3. 当两个相干态矢量垂直叠加,且 $\varphi = -m\beta^2$, $m = 1$, 即 $|\psi\rangle = a|\beta\rangle + be^{-i\beta^2}|\beta\rangle$ 时,叠加态的光子总是反群聚的.此时不存在 X_1 和 X_1 分量上的压缩.量子效应随 β^2 的增大而减弱.

- [1] Glauber R J 1963 *Phys. Rev.* **131** 2766
- [2] Janszky J, Domokos P and Adam P 1993 *Phys. Rev. A* **48** 2213
- [3] Ma A Q, Jiang Z H, Shi W C and Zhang Z M 1993 *Chin. J. Laser B* **2** 257
- [4] Ma A Q, Lei S N and Jiang Z H 1993 *Chin. J. Laser* **20** 53 [In Chinese] 马爱群、雷仕诺、姜作宏 1993 中国激光 **20** 53]
- [5] Dong C H 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 428 [in Chinese] 董传华 1992 物理学报 **41** 428]
- [6] Lu H and Guo G C 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1644 [in Chinese] 路洪、郭光灿 1999 物理学报 **48** 1644]
- [7] Ni Z X 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1687 [in Chinese] 倪致祥 1997 物理学报 **46** 1687]
- [8] Wang Z Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 690 [in Chinese] 汪仲清 2001 物理学报 **50** 690]
- [9] Wang J S, Feng J and Zhan M S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2509 [in Chinese] 王继锁、冯健、詹明生 2002 物理学报 **51** 2509]
- [10] Lu H and Guo G C 1999 *Chin. Phys.* **8** 577
- [11] Tao M X, Lu H and She W L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1996 [in Chinese] 陶孟仙、路洪、余卫龙 2002 物理学报 **51** 1996]
- [12] Ji Y H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 332 [in Chinese] 嵇英华 2003 物理学报 **52** 332]
- [13] Knill E, Laflamme L and Milburn G J 2001 *Nature* **409** 46
- [14] Ralph T C, Munro and Milburn G J 2002 *Proc. SPIE* **4917** 1
- [15] Kim M S, Son W, Buzek V and Knight P L 2002 *Phys. Rev. A* **65** 032323
- [16] Schleich W, Pemigo M and Kien F L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 2172
- [17] Schleich W, Dowling J P, Horowicz R J and Varro S 1990 *New Frontiers in Quantum Optics and Quantum Electrodynamics*, edited by A. Barut (Plenum, New York, 1990)
- [18] van Enk S J and Hirota 2001 *Phys. Rev. A* **64** 022313
- [19] Lvovsky A I and Mlynek J 2002 *Phys. Rev. Letts.* **88** 250401

Superposition of two arbitrary coherent states and its quantum statistical properties ^{*}

Ma Zhi-Min¹⁾ Ma Ai-Qun^{2) 3)} Zeng Ran²⁾ Wang Qu²⁾ Liu Shu-Tian²⁾

¹⁾ Department of Physics, Hulan School of Harbin Normal University, Harbin 150050, China)

²⁾ Department of Applied Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

³⁾ Zhuhai Polytechnic College, Zhuhai 519015, China)

⁴⁾ School of Physical Science and Technology, Heilongjiang University, Harbin 150080, China)

(Received 14 June 2004 ; revised manuscript received 11 August 2004)

Abstract

In this paper, the quantum statistical properties of the superposition state $a|\beta\rangle + be^{i\varphi}|m\beta e^{i\delta}\rangle$, which involves two arbitrary coherent states, are investigated. The results show that this kind of superposition states generally exhibits squeezing effect or anti-bunching effect. The quantum effects of the superposed state depend on β^2 and the amplitude coefficient m , as well as the changes of the phase difference between two coherent states δ , and the phase difference between two superposition coefficients φ also plays an important role in squeezing or anti-bunching effects.

Keywords : coherent states, superposition states, squeezing effect, anti-bunching effect

PACC : 4250, 4225k, 0530, 0365

* Project supported by the Education Bureau of Heilongjiang Province (Grant No. 10541277).