

声波在一维易膨胀介质中传播的计算机模拟^{*}

韩汝取²⁾ 史庆藩²⁾¹⁾ 孙 刚¹⁾

¹⁾中国科学院物理研究所,北京 100080)

²⁾北京理工大学物理系,北京 100081)

(2005 年 1 月 10 日收到,2005 年 1 月 13 日收到修改稿)

建立了一种新的介质模型,其弹性模量在声波处于压缩状态时较大,而在膨胀状态时较小.在这种介质中,纯的压缩或膨胀波的传播特性与一般弹性介质类似,只是它们分别以压缩声速或膨胀声速传播.但当它们在某一区域中同时存在时,它们之间会相互耦合,产生非常强的非线性效应.对这两种波在对行和追赶两种情况的耦合特性作了详细地模拟计算.结果显示在两种情况下,压缩波和膨胀波的耦合均会造成体系的膨胀.体系的膨胀与压缩弹性模量和膨胀弹性模量的相对差有关.此外,还对弹性模量随声波压力连续变化的体系进行了模拟计算.结果证实由非连续变化的弹性模量所得的结论可由连续变化的弹性模量的极限情况得到.

关键词:颗粒物质,声波,弹性介质

PACC:6230,6120J,5235D,6265

1. 引 言

颗粒物质在自然界、日常生活及生产和技术中普遍存在.例如,自然界中沙石、土壤、浮冰、积雪等;日常生活中的粮食、糖、盐等.生产和技术中的煤炭、矿石、建材以及不少药品、化工品也为颗粒物质.很多其他离散态物质体系,例如散装货物输送、地球板块运动及公路上车辆的流动等也常作为颗粒体系来处理.可以说,颗粒物质是地球上存在最多、最为人们所熟悉的物质类型之一.颗粒物质不但广泛存在,而且与工业技术和人们生活密切相关.对颗粒物质的深入认识将会对全球工业与经济的发展有极大助益.由于颗粒物质具有不同于其他物质的许多奇特性质,其基本规律至今还没有被认识清楚,因此吸引了许多物理学家的兴趣,近十年来成为凝聚态物理中的活跃研究领域^[1-8].

近年来,虽然开展了关于颗粒物质的多方面的实验和模拟计算,获得了许多有意义的结果,但对其运动规律研究得还很肤浅,描述颗粒物质的基本理论尚未建立,有关颗粒物质的一些最基本问题还在困扰人们.现在对颗粒物质的研究手段主要为实验和模拟计算.利用连续介质的特性并通过解方程来

处理颗粒体系的方法现在还很不成熟,但这种传统的方法具有物理概念清晰,计算速度快,结果准确等优点,仍是对颗粒物质研究的重要目标之一.本文通过一个非常简单的近似对声波在颗粒物质中的传播性质作了尝试性的研究.

对比一般弹性介质,我们发现对颗粒物质而言,使其压缩与膨胀所需的力或能量是不对称的,这是颗粒物质的典型特征之一^[9,10].为了讨论颗粒物质,我们按照发生形变的状态将其区分为压缩状态和膨胀状态.在一般的弹性介质中,使其压缩与膨胀所需的能量是对称的,因而,体弹性模量不随其所处的状态而改变,是一常数.对这类体系的研究可归结为求解连续介质的弹性力学方程,并已经形成非常成熟的理论^[11,12].对于颗粒物质,由于其压缩与膨胀所需的力或能量是不对称的,其体弹性模量将随所处的状态而改变.特别地,体弹性模量在膨胀与压缩状态下是不相同的.本文着重讨论这种在压缩状态与膨胀状态下体弹性模量不同的介质.这种介质的体弹性模量可写为

$$\kappa(p) = \begin{cases} \kappa_+ & (p < 0), \\ \kappa_- & (p > 0), \end{cases} \quad (1)$$

其中 p 为介质产生形变后的压强, κ_+ (κ_-) 为压缩

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10374111)资助的课题.

(膨胀)状态的体弹性模量. 由一般颗粒物质的特性有 $\kappa_+ > \kappa_-$, 我们称这种介质为易膨胀介质. 此外, 为了描写体弹性模量在压缩与膨胀状态下的差异程度, 我们还定义了一个压缩膨胀差异系数,

$$\Delta = (\kappa_+ - \kappa_-) / \kappa_+. \quad (2)$$

此后, 我们将用此系数来度量压缩与膨胀状态下弹性模量的差异程度.

为简单起见, 我们只讨论声波在一维易膨胀介质中传播的特性. 声波在这种体系中传播的波动方程可写为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p(x, t) - \kappa(p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t) = f(x, t), \quad (3)$$

这里, $p(x, t)$ 是介质中的压强, $\kappa(p)$ 是体弹性模量, $f(x, t)$ 是外部声源. 值得注意的是这里的体弹性模量不是常数, 而是与压强 $p(x, t)$ 有关的. 虽然按照(1)式, 体弹性模量只是 p 的阶梯函数, 但它使方程变为非线性方程, 因而大大增加了求解的难度. 在该体系中, 当声波以纯膨胀状态的波(膨胀波)或纯压缩状态的波(压缩波)的形式传播时, 体弹性模量将是单一的, 因而其结果与一般弹性介质类似, 不同点仅仅体现在膨胀波或压缩波分别以不同的波速传播. 在易膨胀介质中, 压缩波的波速高于膨胀波的波速. 如果体系中同时出现膨胀波和压缩波的成分, 且相互离得很近, 此时, 介质自身的弹性系数随压强状态而改变的特性将体现出来, 此时声波的传播性质会变得非常复杂.

本文介绍压缩波追赶膨胀波的过程和压缩波与膨胀波对行的过程. 结果显示在这两种情况下, 压缩波和膨胀波的耦合均会造成体系的整体膨胀. 我们将讨论体系的整体膨胀的强度与介质的压缩与膨胀的差异程度的关系. 用一种连续变化的体弹性模量代替不连续的阶梯函数的弹性模量, 并进行模拟计算. 我们的结果显示, 在体弹性模量是连续的情况下, 体系的整体膨胀仍然存在.

2. 压缩波追赶膨胀波的情况

为使问题简化, 我们考虑一个无源的体系. 在初始状态下, 介质中存在有两个向同方向(+x)传播的高斯形式的脉冲波, 一个为压缩波(C波)而另一个为膨胀波(E波), 且C波在E波之后. 在 t 较小的时段, 它们相隔有一定的距离. 这样, 两波各自所在的区域分别属于压缩状态和膨胀状态, 它们之间并

无相互影响, 分别以压缩波速和膨胀波速前进. 由于C波的波速要比E波的波速快, 随着时间的推移, C波与E波将逐渐靠近. 这时, 压缩状态和膨胀状态下弹性模量的差异对两脉冲波的影响就会表现出来. 我们利用计算机数值模拟的方法计算了在易膨胀介质中上述C波追赶E波的整个过程. 在计算中, 体系的边界条件设定为等压边界条件, 并取体系足够大, 使两脉冲波均远离边界.

图1给出的是C波追赶E波的演化过程. 两波相遇后, 在C波的尾端会衍生出一支向两侧同时传播的新的膨胀波(BE波), 而C波则逐渐被削弱. 从图1(a)至(e), 我们可清晰地看到C波逐步向BE波转化直至最后消失的整个过程. 在C波消失后, 整个体系中将只有膨胀状态的波存在, 因而体系将变为只有膨胀弹性模量的均匀体系, 这样体系会到达一个新的稳定传播状态(图1(f)). 此时整个体系中存在有两个膨胀状态的波, 一是单向传播的E波, 另一个为双向传播的BE波. 值得注意的是BE波会使整个体系膨胀. BE波在一般弹性介质中也是存在的, 但它不会由单向传播的C波和E波的碰撞而得到. 在整个过程中, E波只是一般地向前传播, 自身并无明显的变化.

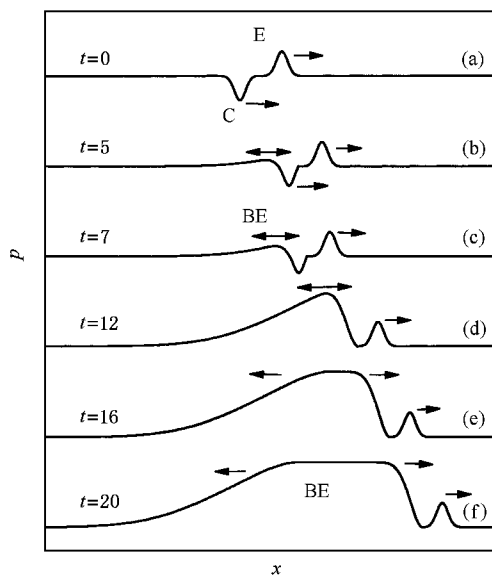


图1 压缩波追赶膨胀波时体系的演化过程(压缩膨胀差异系数 $\Delta = 1/3$)

图2给出了C波、E波和BE波的峰值随时间变化的情况. 图2显示C波在与E波相互作用后逐渐削弱, 并最终消失. 而BE波在C波与E波相互作用后, 其峰值迅速增长, 且增长速度远远快于C波减

弱的速度.在 C 波消失后, BE 波的增长也停止,最后维持在一个明显高于 C 波原始峰值的幅度 p_{BE} 上.在整个过程中 E 波峰值基本没有变化.

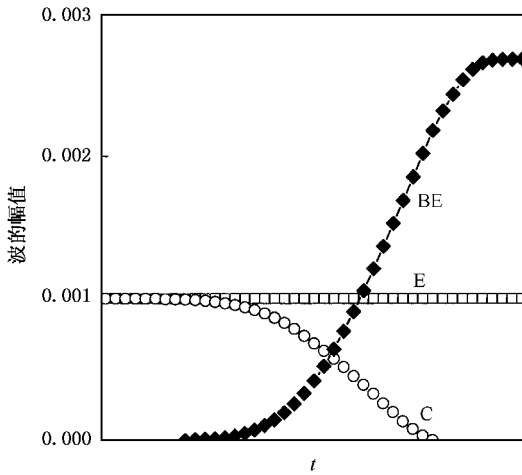


图 2 膨胀波、压缩波、和双向膨胀波的幅值随时间的变化关系 (压缩膨胀差异系数 $\Delta = 1/3$)

下面来分析 BE 波产生的物理原因.在易膨胀介质中, C 波的作用区域与 E 波的作用区域的弹性模量是不同的.因而,它们的分界处可被看作存在有一个等效的界面.图 3 中所标出的 A 点即为等效界面的位置.我们知道在一般弹性介质中,当有声波入射到界面上时,该声波将受到界面对其的散射.在一维体系中,入射波的一部分将被界面反射回来,而另一部分将透射过界面.其反射系数和透射系数可由界面两侧声波的传播速度通过下式求出:

$$r = (v_2 - v_1) / (v_2 + v_1), \quad (4)$$

$$t = 2v_1 / (v_2 + v_1). \quad (5)$$

这里 r 和 t 分别为该界面对声波的反射和透射系数.当声波是由较密介质向较疏介质传播时($v_1 > v_2$),其反射波与入射波的幅值符号相反(即,压缩变为膨胀,膨胀变为压缩),反之幅值符号相同.而透射波的幅值符号总是与入射波相同.

在易膨胀介质中,当 C 波追赶上 E 波时,界面 A 形成(图 3(b)).C 波的继续前进将使其入射到界面 A 上.这样界面将发挥作用, C 波被散射为透射波和反射波两部分.其中透射波与 E 波混在了一起,减小了 E 波在界面 A 附近的强度或使其转变为压缩波.在本体系中,界面 A 的位置是不断移动的.这种移动来自于两种机理,其一为前边单向传播的膨胀波使膨胀区域的后边界以膨胀波速度向前运动;其二为透射波与 E 波混在一起后使部分边界区域由

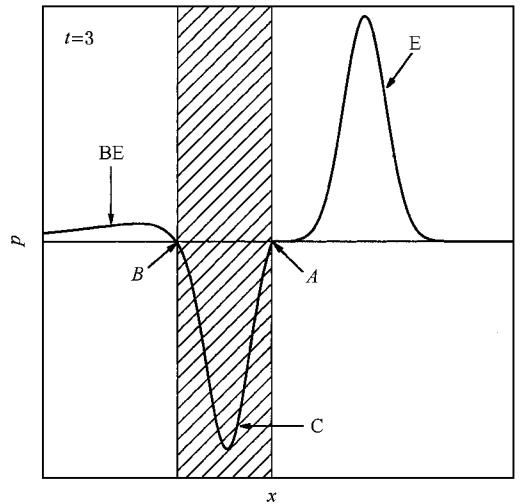


图 3 各个波及界面的示意图(A, B 为等效界面的位置,阴影区域为压缩状态的区域)

膨胀波转变为压缩波.由此可断定界面 A 的速度应比膨胀波波速要快,但比压缩波波速慢.

另一部分在界面 A 处被反射回来的反射波,由于是经较密介质向较疏介质传播时被反射的,这部分反射波的幅值与原 C 波的相反,即由原来的压缩波反转为膨胀波.反射波前部在强度上要小于该区域跟进的 C 波的主峰的强度,此时两波叠加后的效果仅仅是削弱 E 波的强度.但当反射膨胀波继续向反方向传播,到达 E 波的尾部并使总压强由压缩变为膨胀时,新的膨胀波区域产生.同时,在新的膨胀波区域与原压缩波区域之间形成了一个新的等效界面 B.等效界面 B 的位置也是不断移动的.与界面 A 的移动机理类似,界面 B 的移动也来自于两种机理,其一为前边单向传播的压缩波使压缩区域的后边界以压缩波速度向前运动,其二为反射波与 C 波混在一起后使部分边界区域由压缩波转变为膨胀波.由此可断定,界面 B 的速度应略快于压缩波波速.

界面 B 形成后,在界面 B 处也会发生透射和反射两种散射.透射部分为膨胀波,由于它不再碰到其他障碍,它将以膨胀波的形式沿 $-x$ 的方向一直传播下去.反射部分将在此由膨胀波变回压缩波,向 $+x$ 方向传播.这样在 [A, B] 之间将会有多次的反射波出现,其中沿 $+x$ 方向传播的是压缩波,而沿 $-x$ 方向传播的为膨胀波.

我们的计算表明 [A, B] 之间压缩波的强度会逐渐减弱,直至完全消失.[A, B] 之间压缩波强度

的减弱可归结为两个因素. 一个是由于界面 B 在压缩波的尾部的跟进移动时所产生的膨胀波; 另一个是由于不断有透射波离开此区间. 在这两个因素中第一个是主要的. 在后面对压缩波与膨胀波对行的讨论中, 由于第二个因素不存在, 导致压缩波减弱的只剩第一个因素, 但我们看到的情况与这里的非常接近. 界面 B 在向 $+x$ 方向移动的另一个效果是, 它会拉动界面 B 后的膨胀波向 $+x$ 方向传播. 这样一来界面 B 后的膨胀波变为双向传播的膨胀波, 使体系产生整体的膨胀.

从上面的讨论中发现, 等效界面 A 与 B 的形成以及它们的运动规律对最终双向膨胀波的形成起到了决定性的作用. 在图 4 中, 给出了这些等效界面的位置随时间的变化关系, 为了比较我们还同时给出了 E 波和 C 波的波峰位置随时间的变化关系. 图 4 中的各条线均呈线性的变化关系, 其斜率对应它们的运动速度. 显然, E 波和 C 波的波峰的速度应分别为 v_E 和 v_C . 由前面的讨论, 我们知道 $v_B > v_C > v_A > v_E$, 这与图 4 所显示的是一致的.

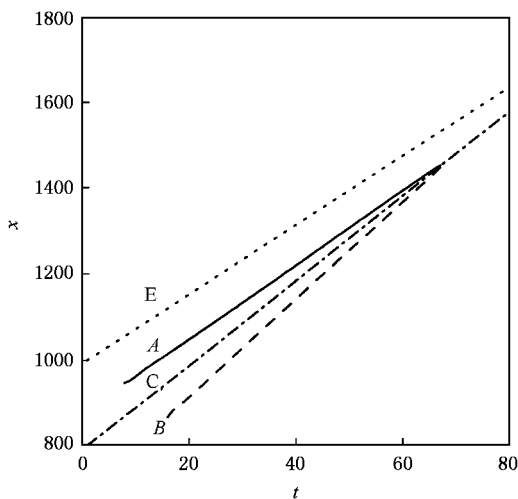


图 4 界面位置及膨胀波和压缩波的峰值位置随时间的变化关系

3. 压缩波与膨胀波对行的情况

图 5 中给出了压缩波与膨胀波对行时的体系的演化过程. 从图中可以看到, 当 C 波与 E 波靠近后, 一个等效界面出现. 两波在入射到界面上后, 均被分成透射与反射两部分. C 波的反射波转化为膨胀波, 它与 E 波的透射部分叠加构成新的膨胀波. 而 C 波的透射部分会与 E 波的反射部分叠加. 由于这个反

射波是经较疏介质向较密介质传播时被反射的, 这部分反射波的幅值与原 E 波的相同, 仍是原来的膨胀波. 因而, 在这个叠加过程中, 压缩波将与膨胀波竞争. 在我们的例子中, 压缩波占优. 因而, 向 $+x$ 方向传播的压缩波将继续维持一段时间(图 5(c), (d)). 此后, 与追赶时的情况类似, 由于界面在压缩波的尾部的跟进移动, 它所产生的膨胀波使前面移动的压缩波不断被减弱, 直至完全消失(图 5(e)). 界面在压缩波的尾部的跟进移动的另一个效果是, 它拉动界面后的膨胀波向 $+x$ 方向传播. 这样, 与追赶时的情况类似界面后的膨胀波变为双向传播的膨胀波, 使体系产生整体的膨胀(图 5(d)–(g)). 与追赶时的情况不同的是此处只有一个界面, 它对应于追赶时的界面 B . 但计算的结果显示, 两种情况下所产生的双向膨胀波是非常接近的. 这表明压缩波的尾部的界面对双向膨胀波的产生起着决定性的作用.

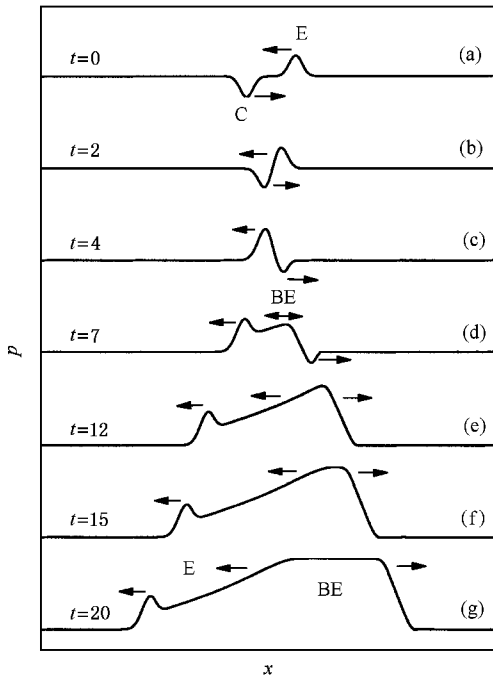


图 5 压缩波与膨胀波对行时体系的演化过程(压缩膨胀差异系数 $\Delta = 5/12$)

4. 双向膨胀波与压缩膨胀差异系数的关系

下面我们来看一下介质的压缩与膨胀的差异程度对体系的整体膨胀的影响. 图 6 给出了体系达到稳定传播状态后的双向膨胀波幅随压缩膨胀差异系

数 Δ 的变化关系.如图 6 所示, BE 波的最终幅值随压缩膨胀差异系数 Δ 的变化并不大,基本上位于同一个平台上.但达到这一平台所需的时间却随压缩膨胀差异系数的减少而明显的增长.从图中我们还可看到,在 $\Delta = 0.9$ 附近, BE 波的最终幅值突然开始升高.在压缩波追赶膨胀波和压缩波与膨胀波对行的两种情况下所得的结论基本上是一样的,与前两节所述的双向膨胀波产生的机理在两种耦合情况下基本相同是符合的.

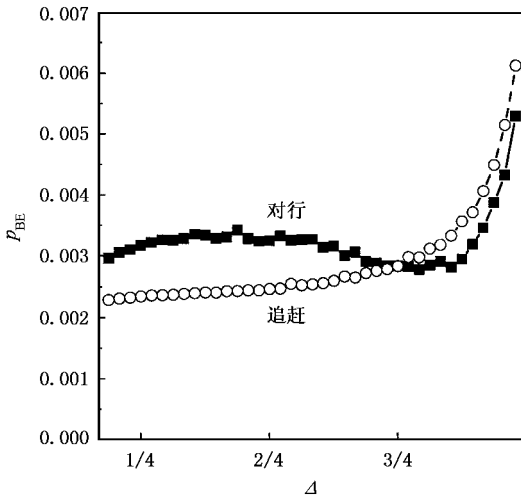


图 6 体系达到稳定传播状态后的双向膨胀波幅值 p_{BE} 随压缩膨胀差异系数 Δ 的变化关系

5. κ 连续变化的情况

在前面的讨论中,我们将介质的体弹性模量 κ 定义为压力的阶梯函数.但这样的处理,由于引入了不连续的函数,有可能造成数值计算上的缺陷.为此,本节考虑一种类似阶梯函数但是连续变化的体弹性模量.我们选定的具体的函数形式是

$$\kappa = \frac{\kappa_+ + \kappa_-}{2} + \frac{\Delta \cdot \kappa_+}{\pi} \cdot \text{arc tan}(k \cdot P), \quad (6)$$

这里,体弹性模量仍然从 κ_- 变化到 κ_+ ,但变化是连续的.参数 k 被用来控制由 κ_- 变化到 κ_+ 的速度.可以看出(1)式是(6)式在 k 趋于无穷大时的极限情况.

图 7 给出了不同 k 值下体系达到稳定传播状态后的波形示意图.从图 7 可以清楚地看到,不论 k 值的大小,最终造成体系整体膨胀的双向膨胀波均存在.且在 k 值很大时,如图(a)所示,所得的结果与由阶梯函数的体弹性模量所得的结果基本上不可分

辩.但在 k 较小时,所得的结果与由阶梯函数的体弹性模量所得的结果的差异变得较大.一般地讲, k 越小,双向膨胀波出现得越早,但其强度却越小.这是由于在 k 较小时,体弹性模量变化的区域较大,从而提前了两种波的耦合时间,因而双向膨胀波出现得较早.但对于连续变化的体弹性模量其界面位置将被分散,总的反射效果会相应的降低,最终使双向膨胀波的强度减弱.

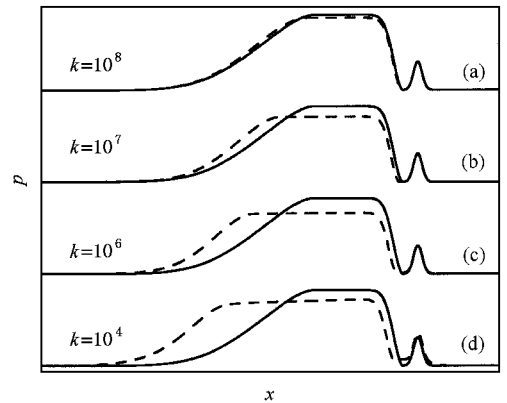


图 7 不同 k 值的连续变化的弹性模量的体系最终达到的稳定传播状态(虚线为由连续变化的弹性模量所得的结果,实线为采用非连续的阶梯函数的弹性模量所得的结果)

6. 结论与讨论

本文首先定义了一种新的介质,在其中弹性模量随声波的压强而改变.特别地,当声波处在压缩区时弹性模量较大,而在膨胀区时弹性模量较小.我们称这种介质为易膨胀介质.在这种介质中,单独的压缩或膨胀波的传播特性与一般弹性介质类似,只是它们分别以压缩声速或膨胀声速传播.但当它们在某一区域同时存在时,它们之间会相互耦合,产生非常强的非线性效应.我们对这两种波在对行和追赶两种情况的耦合特性作了详细地模拟计算.结果显示在这两种情况下,压缩波和膨胀波的耦合均会造成体系的整体膨胀.体系的膨胀特性与压缩状态下和膨胀状态下的弹性模量的相对差异有关,文中给出了它们的具体关系图.本文还对连续变化的弹性模量(准阶梯函数的弹性模量)进行了模拟计算.计算结果证实连续变化的准阶梯函数的弹性模量仍然可导致体系的整体膨胀,且极限情况下它与由非连续变化的弹性模量(阶梯函数的弹性模量)所得的结论一致.本文还对造成体系整体膨胀的具体物理

机理作了解释.

- [1] Wu F G, Liu Z Q and Liu Y Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1434 (in Chinese) [吴福根、刘正猷、刘有延 2002 物理学报 **51** 1434]
- [2] Cao Y and Yang K Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 527 (in Chinese) [曹 禹、杨孔庆 2003 物理学报 **52** 527]
- [3] Wei W, Liu C and Wang C J 1999 *Chin. Phys.* **8** S67
- [4] Zhang X R, Li G H, Zhang T, Gan C M, Zhang L D and Jin Y P 1999 *Chin. Phys.* **8** S234
- [5] Lu K Q and Liu J X 2004 *Physics* **33** 629 (in Chinese) [陆坤权、刘寄星 2004 物理 **33** 629]
- [6] Lu K Q and Liu J X 2004 *Physics* **33** 713 (in Chinese) [陆坤权、刘寄星 2004 物理 **33** 713]
- [7] de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 374
- [8] Kadanoff L P 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 435
- [9] Miller B. O 'Hern C and Behringer R P 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 3110
- [10] Ngadi A and Rajchenbach J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 273
- [11] Wapenaar C P A and Berkhout A J 1998 *Elastic Wave Field Extrapolation* (Elsevier , Amsterdam)
- [12] Landau L D and Lifshits E M 1986 *Theory of Elasticity : Course of Theoretical Physics* Volume 7 (Pergamon Press , Oxford)

Simulation of transmitting sound wave in one-dimensional easy-expanding medium *

Han Ru-Qu²⁾ Shi Qing-Fan²⁾ Sun Gang¹⁾

¹⁾ *Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*

²⁾ *Department of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*

(Received 10 January 2005 ; revised manuscript received 13 January 2005)

Abstract

A new model of medium is established in which the elastic modulus is bigger when the sound wave is in the compressed area while it is smaller in the expanding area. The strong nonlinear coupling effect occurs when the compressed wave and the expanding wave exist in the same area. The calculated results show that the coupling of compressed wave and expanding wave can result in the expanding of the system, which is related to the relative difference between the expanding elastic modulus and compressing elastic modulus. In addition, the results obtained from the elastic modulus of non-continuum are the same as the limit case of continuous elastic modulus.

Keywords : granular matter , sound wave , elastic medium

PACC : 6230 , 6120J , 5235D , 6265

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10374111).