

# Airy 传递矩阵法与偏压下多势垒结构的准束缚能级<sup>\*</sup>

王洪梅 张亚非<sup>†</sup>

(上海交通大学薄膜和微细技术教育部重点实验室, 微纳米科学技术研究院, 上海 200030)

(2004 年 9 月 15 日收到, 2004 年 10 月 12 日收到修改稿)

使用 Airy 函数和传递矩阵方法精确计算了一维定态薛定谔方程, 并推广到多势垒结构, 求解出有/无偏压作用的 2, 3 势垒结构的准束缚能级, 进一步研究了有/无偏压作用的 2, 3 势垒结构的准束缚能级与有效质量和外加电压的关系, 并对结论的正确性进行了验证. 另外, 文中还指出了有些文章中关于 Airy 传递矩阵法与计算偏压下多势垒结构的准束缚能级的错误陈述.

关键词: 准束缚能级, 有/无偏压作用的多势垒结构, Airy 函数, 透射系数

PACC: 7115P, 7335C

## 1. 引 言

分子束外延 (MBE) 和金属有机物化学气相沉积 (MOCVD) 技术极大地推动了现代半导体器件的发展. 目前, 多势垒结构是组成现代半导体器件的基础, 多势垒结构的电子输运现象主要是电子隧穿问题. 载流子通常被束缚在结构中并受外加电场的作用. 要设计器件并优化器件的性能, 详细了解有/无外加偏压作用的多势垒结构的准束缚能级变得非常重要.

借助低温光吸收测量<sup>[1-3]</sup>, 已经观察到隧穿时  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  双势垒结构中电子和空穴的量子态. 为了说明实验现象, 理论问题的重点在于正确解一维定态薛定谔方程. 对于这个问题人们提出几种方法: Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) 近似法<sup>[4, 5]</sup>, 变化法<sup>[6, 7]</sup>, 蒙特卡罗法<sup>[8]</sup>, 有限元法<sup>[9, 10]</sup>, 传递矩阵法<sup>[11-16]</sup>, 包洛(线)函数近似<sup>[17]</sup>, Airy 函数近似<sup>[18]</sup>, 量子化学稳态法<sup>[19]</sup>, 矩阵法<sup>[20]</sup>. 众所周知, 只有简单结构, 如方势阱, 抛物线势阱等, 这种问题才可以获得精确解析解. 然而, 如果有微扰如电场、磁场等, 就不能获得精确解. 在以上方法中, 有一些方法采用了近似, 如 WKB 近似, 包洛(线)函数近似和 Airy 函数近似, 得出的结果不够精确. 蒙特卡罗方法和有限元方法要求有专业计算机方面的知识且应用繁复; 变化

法只在简单结构和弱电场时适用; 矩阵方法涉及反复运算并且不能给出准束缚能级寿命. 通过对比, 传递矩阵方法能广泛应用在任意势能形状的多势垒结构中, 并能简单快速准确地给出一维定态薛定谔方程的解.

目前, 人们做了一些关于利用传递矩阵方法计算有/无外加偏压作用的多势垒结构中准束缚能级的工作<sup>[13-16]</sup>. 他们用不同方法处理外加电场对势能的影响, 如 Airy 函数法<sup>[14]</sup>, Bessel 函数法<sup>[13]</sup>, 和辅角原理法<sup>[15]</sup>, 其中 Airy 函数法更简单更直接且容易推广到多势垒结构, 如可变空间超晶格能量滤波器 (VSSEF)<sup>[21, 22]</sup>就是这种方法的一个应用. 然而, 对同种问题文献 [14] 得出相差甚远的结果, 差异使 Airy 函数法的可靠性受到质疑. 经过仔细研究, 本文发现文献 [14] 中存在严重错误, 另外文献 [13] 和 [16] 中也有错误. 鉴于这种方法的重要性和应用的广泛性, 故指出文献 [13, 14, 16] 中的错误, 进一步研究了有/无偏压作用的 2, 3 势垒结构的准束缚能级与有效质量和外加电压的关系并验证了本文结论的正确性.

## 2. 公式推导及错误纠正

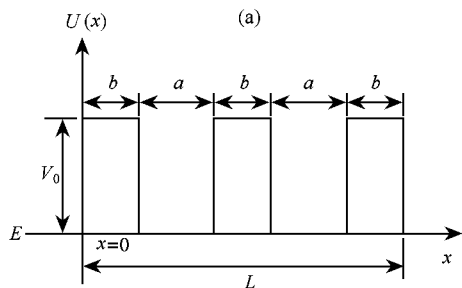
我们以对称三势垒结构为例, 其势阱宽度为  $a$ , 势垒宽度为  $b$ , 势垒高度为  $V_0$ , 外加电压为  $V_a$ .

在每个势垒和势阱区中直接解一维定态薛定谔

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号 50272039), 上海市科技发展基金(批准号 0215nm030)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: yfzhang@mail.sjtu.edu.cn

方程并在每个边界处应用边界条件,即波函数及其



一阶导数连续. 三势垒结构如图 1 所示(未按比例).

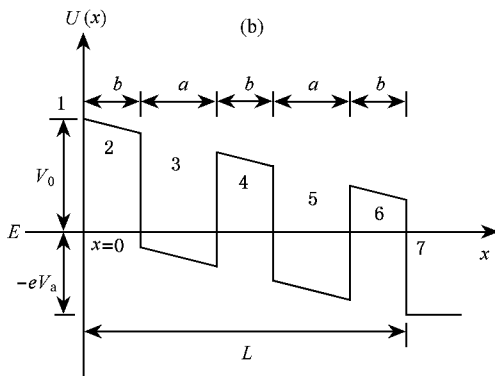


图 1 (a)无外加偏压和(b)有外加偏压作用的三势垒结构示意图(未按比例)

在区域 1 Schrödinger 方程的解是入射波和反射波的简单线性叠加,

$$\varphi_1 = \exp(ik_1x) + R\exp(-ik_1x), \quad (1)$$

其中  $k_1 = \sqrt{2m_1^*E/\hbar^2}$ ,  $m_1^*$  是窄带隙材料的有效质量.

在区域 2 处 Schrödinger 方程表示为

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_2^2} - y_2 \varphi_2 = 0, \quad (2)$$

其中

$$y_2 = \left( -\frac{2m_2^*eV_a}{L\hbar^2} \right)^{1/3} \left[ \frac{L}{eV_a}(E - V_0) + x \right],$$

令

$$\beta_2 = \left( -\frac{2m_2^*eV_a}{L\hbar^2} \right)^{1/3}, \quad \eta_2 = \frac{L(E - E_0)}{eV_a},$$

则

$$y_2 = \beta_2(\eta_2 + x),$$

其中  $x$  从区域 1 到区域 2 之间界面为零点算起,此时解表示成 Airy 函数的形式

$$\varphi_2 = a_2 A_i(y_2) + b_2 B_i(y_2), \quad (3)$$

其中  $A_i(y_2)$  和  $B_i(y_2)$  是众所周知的线性独立 Airy 函数,且  $a_2$  和  $b_2$  是待定常数.

注:对照本文等式(2),由于推导过程疏忽,文献[14]中等式(3)前面少一负号.

在区域 3 处 Schrödinger 方程表示为

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y_3^2} - y_3 \varphi_3 = 0, \quad (4)$$

其中

$$y_3 = \left( -\frac{2m_3^*eV_a}{L\hbar^2} \right)^{1/3} \left( \frac{LE}{eV_a} + b + x \right).$$

令  $\beta_3 = \left( -\frac{2m_3^*eV_a}{L\hbar^2} \right)^{1/3}$ ,  $\eta_3 = \frac{LE}{eV_a} + b$ , 则  $y_3 =$

$$\beta_3(\eta_3 + x).$$

在此区域,  $x$  从第二个界面为零点算起. 此时解表示成 Airy 函数的形式

$$\varphi_3 = a_3 A_i(y_3) + b_3 B_i(y_3). \quad (5)$$

从区域 4 到 6,用同样方法解薛定谔方程,并假定  $x$  从相应区域左边界算起. 解分别为

$$y_4 = \left( -\frac{2m_4^*eV_a}{L\hbar^2} \right)^{1/3} \left[ \frac{L(E - V_0)}{eV_a} + b + a + x \right],$$

$$\beta_4 = \left( -\frac{2m_4^*eV_a}{L\hbar^2} \right)^{1/3}, \quad \eta_4 = \frac{L(E - V_0)}{eV_a} + b + a,$$

$$y_5 = \left( -\frac{2m_5^*eV_a}{L\hbar^2} \right)^{1/3} \left( \frac{LE}{eV_a} + 2b + a + x \right),$$

$$\beta_5 = \left( -\frac{2m_5^*eV_a}{L\hbar^2} \right)^{1/3}, \quad \eta_5 = \frac{LE}{eV_a} + 2b + a,$$

$$y_6 = \left( -\frac{2m_6^*eV_a}{L\hbar^2} \right)^{1/3} \left[ \frac{L(E - V_0)}{eV_a} + 2b + 2a + x \right],$$

$$\beta_6 = \left( -\frac{2m_6^*eV_a}{L\hbar^2} \right)^{1/3}, \quad \eta_6 = \frac{L(E - V_0)}{eV_a} + 2b + 2a.$$

在区域 7 处,只有透射波存在,波函数表示为

$$\varphi_7 = \tau \exp(ik_7x), \quad (6)$$

其中  $k_7 = \sqrt{2m_7^*(E + eV_a)/\hbar^2}$ .

区域  $i$  和  $i+1$  的边界处连续性条件为

$$\varphi_i(x_i) = \varphi_{i+1}(x_i), \quad (7)$$

$$\frac{1}{m_i^*} \frac{d\varphi_i}{dx} \Big|_{x=x_i} = \frac{1}{m_{i+1}^*} \frac{d\varphi_{i+1}}{dx} \Big|_{x=x_i}. \quad (8)$$

通过满足波函数及其一阶导数的连续性,在每一个边界形成一个  $2 \times 2$  矩阵. 这些矩阵连续相乘,接着结合异质结堆垛的入射波矢与出射波矢. 然后,通过传递矩阵,可以获得隧穿透射系数.

注:对照本文等式(8),由于整个推导过程中对有效质量考虑不清楚,文献[14]中等式(7)中没有加

上不同有效质量的影响.

第一个界面处的边界条件为

$$\begin{aligned} 1 + R &= a_2 A_i(\beta_2 \eta_2) + b_2 B_i(\beta_2 \eta_2), \\ 1 - R &= \frac{m_1^* \beta_2}{ik_1 m_2^*} \left[ a_2 \frac{dA_i(\beta_2 \eta_2)}{dx} + b_2 \frac{dB_i(\beta_2 \eta_2)}{dx} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{m_1^*}{ik_1} \\ 1 & -\frac{m_1^*}{ik_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i(\beta_2 \eta_2) & B_i(\beta_2 \eta_2) \\ \frac{\beta_2}{m_2^*} \frac{dA_i(\beta_2 \eta_2)}{dx} & \frac{\beta_2}{m_2^*} \frac{dB_i(\beta_2 \eta_2)}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

第二个界面处的边界条件为

$$\begin{aligned} a_2 A_i(\beta_2(\eta_2 + b)) + b_2 B_i(\beta_2(\eta_2 + b)) &= a_3 A_i(\beta_3 \eta_3) + b_3 B_i(\beta_3 \eta_3), \\ a_2 \frac{dA_i(\beta_2(\eta_2 + b))}{dx} + b_2 \frac{dB_i(\beta_2(\eta_2 + b))}{dx} &= \frac{m_2^* \beta_3}{m_3^* \beta_2} \left[ a_3 \frac{dA_i(\beta_3 \eta_3)}{dx} + b_3 \frac{dB_i(\beta_3 \eta_3)}{dx} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i(\beta_2(\eta_2 + b)) & B_i(\beta_2(\eta_2 + b)) \\ \frac{\beta_2}{m_2^*} \frac{dA_i(\beta_2(\eta_2 + b))}{dx} & \frac{\beta_2}{m_2^*} \frac{dB_i(\beta_2(\eta_2 + b))}{dx} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_i(\beta_3 \eta_3) & B_i(\beta_3 \eta_3) \\ \frac{\beta_3}{m_3^*} \frac{dA_i(\beta_3 \eta_3)}{dx} & \frac{\beta_3}{m_3^*} \frac{dB_i(\beta_3 \eta_3)}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

其他界面也同理分析,最后得

$$\begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{m_1^*}{ik_1} \\ 1 & -\frac{m_1^*}{ik_1} \end{pmatrix} \times S_2(x=0) \times S_2^{-1}(x=b) \times S_3(x=0) \times S_3^{-1}(x=a) \times S_4(x=0) \\ &\times S_4^{-1}(x=b) \times S_5(x=0) \times S_5^{-1}(x=a) \times S_6(x=0) \times S_6^{-1}(x=b) \times S_7(x=0) \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{ik_7}{m_7^*} & -\frac{ik_7}{m_7^*} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

矩阵  $S_j(x)$  定义为

$$S_j(x) = \begin{pmatrix} A_i(\beta_j(\eta_j + x)) & B_i(\beta_j(\eta_j + x)) \\ \frac{\beta_j}{m_j^*} \frac{dA_i(\beta_j(\eta_j + x))}{dx} & \frac{\beta_j}{m_j^*} \frac{dB_i(\beta_j(\eta_j + x))}{dx} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

注:对照本文等式(14),文献[14]等式(10)中, $S_2(x)$ 和 $S_3(x)$ 中 Airy 函数的一阶导数前面分别缺一个系数,即 $(-2m_2^* eV_a/Lh^2)^{1/3}$ 和 $(-2m_3^* eV_a/Lh^2)^{1/3}$ .

因此

$$\tau = \frac{1}{M_{11}}, \quad (15)$$

其中  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{21}$ ,  $M_{22}$  是  $M$  的元素.

$$T = \frac{k_7}{k_1} \tau \tau^*, \quad (16)$$

$\tau^*$  是  $\tau$  的共轭复数.

注:对照本文等式(16),文献[14]中由于对传递矩阵  $M$  缺乏正确认识,导致其透射系数表示为

$T = \frac{k_0}{k} \frac{1}{M_{11}^2}$ , 由于  $M_{11}$  是复数,  $M_{11}^2$  也是复数,故  $T$  不

可解,这种表示错误,并且系数  $\frac{k}{k_0}$  误推为  $\frac{k_0}{k}$ ,这一错误在文献[13]和[16]中也出现了.

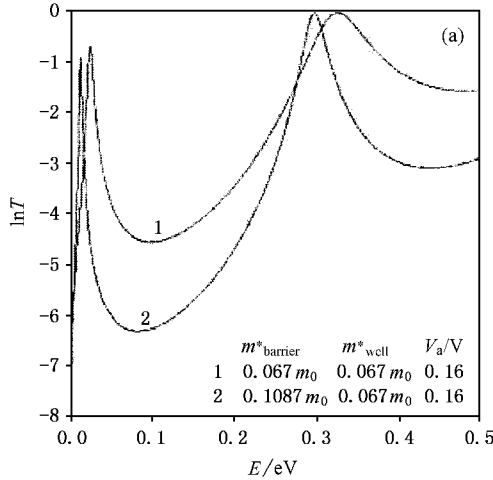
### 3. 结果与讨论

下面使用修正后的公式研究有/无偏压作用的

2.3 势垒结构的准束缚能级与有效质量和外加电压的关系并验证其正确性.

### 3.1. 有效质量对准束缚能级的影响

透射系数与入射电子能量曲线中的共振能量对



应于势阱中的准束缚能级. 另外, 共振能量间距即为准束缚能级间的距离. 下面阐述了双势垒结构的透射共振与有效质量的关系.

双势垒结构中透射系数与入射电子能量间的自然对数关系如图 2 所示. 所采取的结构具有

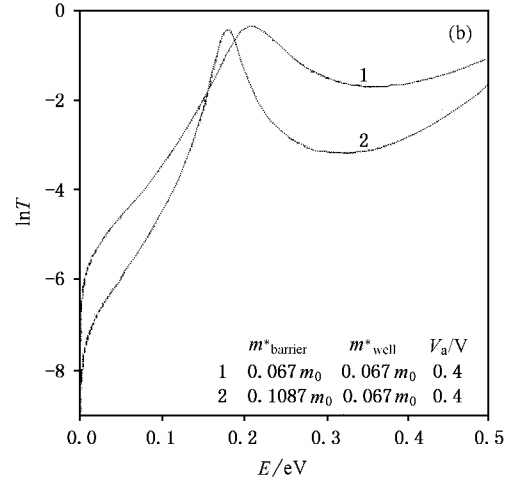


图 2 双势垒结构透射系数与入射电子能量间的自然对数关系 (a)外加偏压 0.16V,(b)外加偏压 0.4V

$Al_xGa_{1-x}As$  势垒和  $GaAs$  势阱, 与 Brennan 等人<sup>[14]</sup>和 Vassell 等人<sup>[16]</sup>所用的结构相同, 势垒宽为 2nm, 高为 0.5eV, 势阱宽为 5nm, 采用两种有效质量情况, 在势垒和势阱区有效质量相同 (equal effective masses, EEM),  $m^*_{\text{barrier}} = m^*_{\text{well}} = 0.067 m_0$  和有效质量不同 (different effective masses, DEM),  $m^*_{\text{barrier}} = 0.1087 m_0$ ,  $m^*_{\text{well}} = 0.067 m_0$ . 图 2(a) 中外加偏压为 0.16V 时, 出

现两个共振峰, 且在不同有效质量条件下共振能量低于采用相同有效质量情况的计算结果, 然而, 在图 2(b) 中只有一个共振峰出现, 这是因为随着外加偏压升高, 准束缚能级下降. 当准束缚能级低于零, 相应的共振峰在图中消失. 对照图 2(a), 2(b) 和文献 [14] 中的图 2.3 可以看出, 本文中有效质量不同时的准束缚能级总是低于有效质量相同时的值. 然而, 文献 [14] 中的图 2.3 则与上述规律相反.

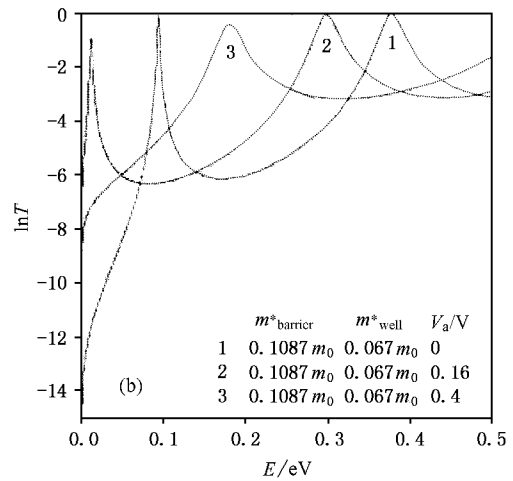
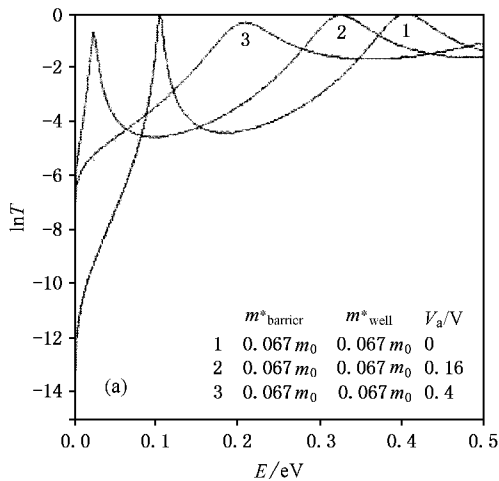


图 3 双势垒结构在不同外加偏压下透射系数与入射电子能量间的自然对数关系 (a)相同有效质量情况 (b)不同有效质量情况

### 3.2. 外加偏压对准束缚能级的影响

图 3(a)(b)分别为在相同有效质量和不同有效质量情况下双势垒结构在不同外加偏压下透射系数与入射电子能量间的自然对数关系. 双势垒结构的势垒宽为 2nm、高为 0.5eV, 势阱宽为 5nm, 有效质

量相同  $m_{\text{barrier}}^* = m_{\text{well}}^* = 0.067m_0$  和有效质量不同  $m_{\text{barrier}}^* = 0.1087m_0, m_{\text{well}}^* = 0.067m_0$ . 外加偏压分别为 0V, 0.16V, 0.4V. 从图 3(a)中看出, 同一共振能级在低偏压时比在高偏压时高; 图 3(b)也如此. 这也是由于随着偏压升高, 准束缚能级下降.

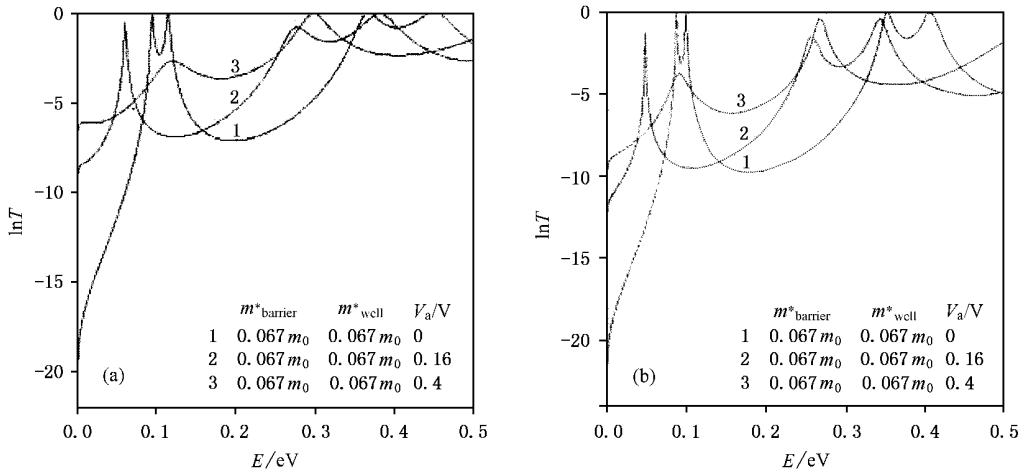


图 4 三势垒结构在不同外加偏压下透射系数与入射电子能量间的自然对数关系 (a)相同有效质量情况 (b)不同有效质量情况

表 1 由透射峰获得的 2, 3 势垒结构准束缚能级与文献 15 中通过辅助原理法、及文献 14 和 16 中获得的值对比

双势垒情况							
偏压/mV	准束缚能级	本文结果/meV		文献 15 ]meV	文献 16 ]meV	文献 14 ]meV	
		EEM	DEM	DEM	DEM	EEM	DEM
0	$E_1$	105.5	93.9	93.9	94		
	$E_2$	405.4	377.6	376.8	380		
160	$E_1$	23.7	11.8	11.6	12	30	40
	$E_2$	326.1	298.0	297.2	300	335	350
400	$E_1$						
	$E_2$	209.7	180.1	178.9	180	220	230
三势垒情况							
偏压/mV	准束缚能级	本文结果/meV		文献 15 ]meV	文献 16 ]meV	文献 14 ]meV	
		EEM	DEM	DEM	DEM	EEM	DEM
0	$E_1$	96.1	88.0	87.9	89		
	$E_2$	116.4	100.4	100.4	100		
	$E_3$	367.5	352.2	351.2	353		
	$E_4$	450.0	406.6	407.2	404		
160	$E_1$						
	$E_2$	61.6	48.8	48.8	54	70	80
	$E_3$	277.7	256.4	255.6	257	290	317
	$E_4$	381.7	343.0	343.1	342		
400	$E_1$						
	$E_2$	7.8					
	$E_3$	121.6	91.8	91.1	90	110	120
	$E_4$	298.8	267.7	267.6	260	310	320

图 4(a)(b)分别表示在相同有效质量和不同

有效质量情况下三势垒结构在不同外加偏压下透射

系数与入射电子能量间的自然对数关系. 三势垒结构的势垒宽为 2nm、高为 0.5eV, 势阱宽为 5nm, 有效质量相同  $m_{\text{barrier}}^* = m_{\text{well}}^* = 0.067m_0$  和有效质量不同  $m_{\text{barrier}}^* = 0.1087m_0$ ,  $m_{\text{well}}^* = 0.067m_0$ , 外加偏压分别为 0V, 0.16V, 0.4V. 从图 4(a) 中看出, 共振峰的数量比双势垒结构时多, 这是由于前者有两个势阱, 故有更多的准束缚能级. 从曲线 1 到 3, 由于外加偏压增加使准束缚能级低于零, 所以共振峰的数量下降, 图 4(b) 也如此.

### 3.3. 结果对照

为了验证结论的正确性, 用这种方法计算的 2, 3 势垒结构的准束缚能级与其他方法<sup>[14-16]</sup>获得的结果对照, 列于表 1 中. 这里讨论的结构与文献<sup>[14-16]</sup>中的相同, 势垒宽为 2nm、高为 0.5eV, 势阱宽为 5nm, 在两种有效质量情况下, 有效质量相同时  $m_{\text{barrier}}^* = m_{\text{well}}^* = 0.067m_0$ , 有效质量不同时  $m_{\text{barrier}}^* = 0.1087m_0$ ,  $m_{\text{well}}^* = 0.067m_0$ . 根据表 1, 通过透射峰得到的准束缚能级与文献<sup>[15]</sup>中辅角原理法获得的结果基本吻合, 与文献<sup>[16]</sup>中的结果稍有不同, 但与文献<sup>[14]</sup>中的结果有很大差异. 从表 1 中数据看到, 在

有/无外加偏压作用的 2, 3 势垒结构中, 本文得到在有效质量相同时准束缚能级高于有效质量不同时的值, 这与文献<sup>[12]</sup>和文献<sup>[23]</sup>的结论相同, 然而文献<sup>[14]</sup>的结论与此恰恰相反, 这说明文献<sup>[14]</sup>中的结论错误. 另外, 文献<sup>[16]</sup>中的数据差异说明在其公式推导中有错误, 且这个错误已在本文指出. 综上所述, 表明本文已经正确地指出了文献<sup>[13]</sup><sup>[14]</sup>和<sup>[16]</sup>中的错误, 并澄清了 Airy 函数法的正确性与可靠性.

## 4. 结 论

利用一维定态薛定谔方程与透射系数表达式可以计算出有/无外加偏压的 2, 3 势垒结构的准束缚能级并与前人的结果对照验证了本文结论的正确性. 这些结果对于理解共振隧穿的物理现象和优化现代半导体器件及开发新型共振隧穿器件有帮助. 研究表明, 这种 Airy 函数和传递矩阵方法对这类问题能给出确切解, 并且便于研究不同有效质量和偏压的影响.

[ 1 ] Dingle R, Gossard A C and Wiegmann W 1975 *Phys. Rev. Lett.* **34** 1327  
 [ 2 ] Miller D A B, Chemla D S and Damen T C 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 2173  
 [ 3 ] Miller D A B, Chemla D S and Damen T C 1985 *Phys. Rev. B* **32** 1043  
 [ 4 ] Osbourn G C 1980 *J. Vac. Sci. Technol.* **17** 1104  
 [ 5 ] Heremans J, Partin D L and Dresselhaus P D 1986 *Appl. Phys. Lett.* **48** 644  
 [ 6 ] Bastard G, Mendez E E, Chang L L and Esaki L 1983 *Phys. Rev. B* **28** 3241  
 [ 7 ] Ahn D and Chuang S L 1986 *Appl. Phys. Lett.* **49** 1450  
 [ 8 ] Singh J 1986 *Appl. Phys. Lett.* **48** 434  
 [ 9 ] Hayata K, Koshiba M, Nakamura K and Shimizu A 1988 *Electron. Lett.* **24** 614  
 [ 10 ] Nakamura K, Shimizu A, Koshiba M and Hayata K 1989 *IEEE J. Quantum Electron.* **25** 889  
 [ 11 ] Lui W W and Fukuma M 1986 *J. Appl. Phys.* **60** 1555

[ 12 ] Jonsson B and Eng S T 1990 *IEEE J. Quantum Electron.* **26** 2025  
 [ 13 ] Peng J, Chen H and Zhou S 1989 *J. Phys: Conden. Matter.* **1** 5451  
 [ 14 ] Brennan K F and Summers C J 1987 *J. Appl. Phys.* **61** 614  
 [ 15 ] Anemogiannis E, Glysis E N, Gaylord T F and Gaylord T K 1993 *IEEE J. QE.* **29** 2731  
 [ 16 ] Vassell M O, Lee J and Lockwood H F 1983 *J. Appl. Phys.* **54** 5206  
 [ 17 ] Austin E J and Jaros M 1985 *Phys. Rev. B* **31** 5569  
 [ 18 ] Ghatak A K, Goyal I C and Gallawa R L 1990 *IEEE J. Quantum Electron.* **26** 305  
 [ 19 ] Borondo F and Sanchez-Dehesa J 1986 *Phys. Rev. B* **33** 8758  
 [ 20 ] Ghatak A K, Thyagarajan K and Shenoy M R 1988 *IEEE J. Quantum Electron.* **24** 1524  
 [ 21 ] Summers C J and Brennan K F 1986 *Appl. Phys. Lett.* **48** 806  
 [ 22 ] Summers C J and Brennan K F 1988 *Appl. Phys. Lett.* **52** 132  
 [ 23 ] Xu H Z and Okada Y 2001 *Phys. B* **305** 113

# Airy function and transfer matrix method in the study of quasi-bound levels of biased multi-barrier quantum structures<sup>\*</sup>

Wang Hong-Mei Zhang Ya-Fei

( *Key Laboratory for Thin Film and Microfabrication of the Ministry of Education , Research Institute of Micro/Nanometer Science & Technology , Shanghai Jiaotong University , Shanghai 200030 , China* )

( Received 15 September 2004 ; revised manuscript received 12 October 2004 )

## Abstract

The quasi-bound levels in biased/unbiased double/triple-barrier quantum structures have been exactly calculated based on the solution of the one-dimensional ( 1D ) time-independent Schrödinger equation using Airy function and transfer matrix method , which is easily extended to multi-barrier quantum structures ; furthermore , the dependence of the quasi-bound levels on the effective masses and bias in biased/unbiased double/triple-barrier quantum structures has also been investigated. In addition , errors of Airy function and transfer matrix method in the study of quasi-bound levels of biased multi-barrier quantum structures in other letters have been pointed out and verified.

**Keywords** : quasi-bound levels , biased/unbiased multi-barrier quantum structures , Airy function , transmission coefficient

**PACC** : 7115P , 7335C

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 50272039 ) and the Developing Foundation of Shanghai Science and Technology ( Grant No. 0215 nm030 ).