第 54 卷 第 5 期 2005 年 5 月
1000-3290/2005/54(05)/2453-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.5,May,2005

任意变速参考系中引力场的温度*

张靖仪†

(北京师范大学物理系,北京 100875)

(2003 年 10 月 15 日收到)

给出了任意变速参考系中引力场的事件视界方程.利用赵峥改进了的 Damour-Ruffini 方法,导出了温度公式,所得结果支持文献[1]的结论.

关键词:任意变速参考系,Hawking 辐射,温度

PACC:9760L,0420

1. 引 言

文献[1]指出,从一个时轴正交的零温时空通过作分离变量型的坐标变换,变到一个新的稳态时轴正交时空,将导致热效应的产生,并推测这种分离变量型的坐标变换是导致纯态变成混合态的根源.本文作为印证,讨论了任意变速参考系中引力场中的热效应.该时空描述一个坐标系作任意加速运动的引力场[2],可以从闵氏时空作广义 Mϕller 变换而得出.通过研究发现,新的时空具有事件视界,对应有 Hawking 辐射.利用赵峥发展了的 Damour-Ruffini 方法,求出了温度表达式.特别是当描述坐标系加速度的时间函数 $g(t)$ 为常数时,Hawking 温度与 g 成正比,广义 Mϕller 变换变成分离变量型,所得结果支持文献[1]的结论.

2. 任意变速参考系中引力场的温度

闵氏时空是一个时轴正交的零温时空,其时空线元的表达式为

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}X^2 + \mathrm{d}Y^2 + \mathrm{d}Z^2, \tag{1}$$

作广义 Mϕller 变换[2—4]

$$\begin{aligned} X(x,t) &= c\int_{t'_0}^{t}\sinh\left[\int_{t_0}^{t} g(t)/c\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t \\ &\quad + x\cosh\int_{t_0}^{t} g(t)/c\,\mathrm{d}t, \\ T(x,t) &= \int_{t'_0}^{t}\cosh\left[\int_{t_0}^{t} g(t)/c\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t \\ &\quad + (x/c)\sinh\int_{t_0}^{t} g(t)/c\,\mathrm{d}t, \\ Y &= y, \quad Z = z. \end{aligned} \tag{2}$$

得新时空线元为

$$ds^2 = -c^2\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2, \tag{3}$$

式中 c 为真空中的光速;$g = g(t)$ 对应为坐标系的加速度,方向沿 x 轴正向.当 $g(t)$ 取不同的表达式,可以描述坐标系作加速平移、振动以及更广泛形式的运动[2,5],由等效原理,对应描述的引力场为惯性力场.

与(3)式表示的线元对应,不为零的逆变度规分量以及度规行列式为

$$\begin{aligned} &g^{00} = -\frac{1}{(1+gx/c^2)^2}, \quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1, \\ &g = -(1+gx/c^2)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

2.1. 视界方程

事件视界为零曲面,满足的方程为

$$g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial F}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x^\nu}\right) = 0, \tag{5}$$

即

$$\begin{aligned} &g^{00}\left(\frac{\partial F}{\partial x^0}\right)^2 + g^{11}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \\ &+ g^{22}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + g^{33}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10375051,10373003)资助的课题.

† E-mail:physicz@263.net

因时空中存在 Killing 矢量$(\partial/\partial y)^a$ 和$(\partial/\partial z)^a$，且事件视界为保有时空内部对称性的超曲面[6]，故有$\partial F/\partial y=\partial F/\partial z=0$.方程(6)变为

$$-\frac{1}{c^2(1+gx/c^2)^2}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2=0. \quad (7)$$

将视界位置写成显函数形式 $x=x_{\mathrm{H}}(t)$，有

$$-\frac{1}{c^2(1+gx_{\mathrm{H}}/c^2)^2}\left(\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}t}\right)^2+1=0, \quad (8)$$

此即视界位置所满足的方程.作为特例，当 g 为常数时，可容易得出视界位置在

$$x_{\mathrm{H}}=-\frac{c^2}{g}. \quad (9)$$

当 g 为时间 t 的任意函数，即坐标系作任意加速运动时，方程(8)可以写成

$$\dot{x}_{\mathrm{H}}=c(1+gx_{\mathrm{H}}/c^2), \quad (10)$$

$$\dot{x}_{\mathrm{H}}=-c(1+gx_{\mathrm{H}}/c^2), \quad (11)$$

式中 $\dot{x}_{\mathrm{H}}=\mathrm{d}x_{\mathrm{H}}/\mathrm{d}t$.解上面的两个一阶微分方程得对应的视界位置分别为

$$x_{\mathrm{H}}=\exp\left(\int g/c\,\mathrm{d}t\right)\left[\int c\exp\left(-\int g/c\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\right], \quad (12)$$

$$x_{\mathrm{H}}=\exp\left(-\int g/c\,\mathrm{d}t\right)\left[\int -c\exp\left(\int g/c\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\right]. \quad (13)$$

其中(12)式对应为 $\dot{x}_{\mathrm{H}}>0$；(13)式对应 $\dot{x}_{\mathrm{H}}<0$.

2.2. Klein-Gordon 方程

时空中，静止质量为 μ 的标量粒子满足 Klein-Gordon 方程为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}\right)-\mu^2\phi=0, \quad (14)$$

将(4)式代入方程(14)，Klein-Gordon 方程可进一步写成

$$\frac{1}{c^2(1+gx/c^2)^2}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{1+gx/c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{g}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right\}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\mu^2\phi=0. \quad (15)$$

令 $\phi=\psi(x,t)Q(y,z)$，(15)式可以分解为如下两个方程：

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}-\lambda Q=0, \quad (16)$$

$$-\frac{1}{c^2(1+gx/c^2)^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\frac{xg'}{c^4(1+gx/c^2)^3}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{g}{c^2(1+gx/c^2)}\frac{\partial\psi}{\partial x}+(\lambda-\mu^2)\psi=0, \quad (17)$$

式中 $g'=\mathrm{d}g/\mathrm{d}t$，$\lambda$ 为分离变量常数.

2.3. 温度公式

为了讨论温度表达式，只需考虑(17)式.定义广义乌龟坐标

$$x_*=x+\frac{1}{2\kappa}\ln[x-x_{\mathrm{H}}(t)], \quad (18)$$
$$t_*=t-t_0.$$

式中 κ 为一可调参数.由(18)式可求得

$$\frac{\partial}{\partial x}=\left[1+\frac{1}{2\kappa(x-x_{\mathrm{H}})}\right]\frac{\partial}{\partial x_*},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t_*}-\frac{\dot{x}_{\mathrm{H}}}{2\kappa(x-x_{\mathrm{H}})}\frac{\partial}{\partial x_*},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\left[1+\frac{1}{2\kappa(x-x_{\mathrm{H}})}\right]^2\frac{\partial^2}{\partial x_*^2}-\frac{1}{2\kappa(x-x_{\mathrm{H}})^2}\frac{\partial}{\partial x_*}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t_*^2}-\frac{2\dot{x}_{\mathrm{H}}}{2\kappa(x-x_{\mathrm{H}})}\frac{\partial^2}{\partial t_*\partial x_*}+\frac{(\dot{x}_{\mathrm{H}})^2}{[2\kappa(x-x_{\mathrm{H}})]^2}\frac{\partial^2}{\partial x_*^2}-\frac{2\kappa(x-x_{\mathrm{H}})\ddot{x}_{\mathrm{H}}+2\kappa(\dot{x}_{\mathrm{H}})^2}{[2\kappa(x-x_{\mathrm{H}})]^2}\frac{\partial}{\partial x_*},$$

式中 $\ddot{x}_{\mathrm{H}}=\frac{\mathrm{d}^2x_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}t^2}$.将(19)式代入(17)式得

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t_*^2}+\frac{2\dot{x}_{\mathrm{H}}}{2\kappa(x-x_{\mathrm{H}})}\frac{\partial^2\psi}{\partial t_*\partial x_*}+\frac{[2\kappa(x-x_{\mathrm{H}})+1]^2c^2(1+gx/c^2)^2-(\dot{x}_{\mathrm{H}})^2}{[2\kappa(x-x_{\mathrm{H}})]^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_*^2}+\frac{xg'}{c^2(1+gx/c^2)}\frac{\partial\psi}{\partial t_*}$$
$$+\left\{\frac{\ddot{x}_{\mathrm{H}}}{2\kappa(x-x_{\mathrm{H}})}+\frac{(\dot{x}_{\mathrm{H}})^2-c^2(1+gx/c^2)^2}{2\kappa(x-x_{\mathrm{H}})^2}-\frac{xg'}{c^2(1+gx/c^2)}\frac{\dot{x}_{\mathrm{H}}}{2\kappa(x-x_{\mathrm{H}})}+g\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)\left[1+\frac{1}{2\kappa(x-x_{\mathrm{H}})}\right]\right\}\frac{\partial\psi}{\partial x_*}$$
$$+(\lambda-\mu^2)c^2\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)^2\psi=0. \quad (20)$$

将(20)式两边同乘以$\frac{2\kappa(x-x_{\mathrm{H}})}{\dot{x}_{\mathrm{H}}}$，并令 $x\to x_{\mathrm{H}}$，得

$$2\frac{\partial^2\psi}{\partial t_*\partial x_*}+\alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial x_*^2}-G\frac{\partial\psi}{\partial x_*}=0,\tag{21}$$

式中

$$\alpha=\lim_{x\to x_H}\frac{[2\kappa(x-x_H)+1]^2c^2(1+gx/c^2)^2-(\dot{x}_H)^2}{\dot{x}_H2\kappa(x-x_H)},\tag{22}$$

$$G=\lim_{x\to x_H}\left\{-\frac{\ddot{x}_H}{\dot{x}_H}+\frac{c^2(1+gx/c^2)^2-(\dot{x}_H)^2}{\dot{x}_H(x-x_H)}+\frac{xg'}{c^2(1+gx/c^2)}-\frac{g[2\kappa(x-x_H)+1]}{\dot{x}_H}\times\left(1+\frac{gx}{c^2}\right)\right\}.\tag{23}$$

为了使(21)式在视界附近化为标准的波动方程,则 α 的分子必须趋于 0,分数趋于 1[7—9].令(22)式分子趋于 0,得

$$(\dot{x}_H)^2=c^2(1+gx_H/c^2)^2,\tag{24}$$

此即视界面所满足的方程(8).由 α 趋于 1,可由洛比塔法则求得(18)式中可调节参数为

$$\kappa=\frac{g}{\pm c(1-2\dot{x}_H)},\tag{25}$$

式中正负号分别对应于 $\dot{x}_H>0$ 和 $\dot{x}_H<0$ 两种情况.此时

$$G=-\frac{\ddot{x}_H}{\dot{x}_H}+\frac{g}{c}+\frac{x_Hg'}{c^2(1+gx_H/c^2)}.\tag{26}$$

容易得出方程(21)的入射波解为

$$\psi_{in}=e^{-i\omega t_*},\tag{27}$$

出射波解为

$$\psi_{out}=e^{-i\omega t_*+Gx_*+i2\omega t_*}=e^{-i\omega t_*+Gx_*+i2\omega x}(x-x_H)^{i\omega/\kappa}.\tag{28}$$

(28)式在视界面上不解析,可以通过复延拓到视界内部.利用文献[9]中的方法,可求得出射波谱为

$$N_\omega^2=\frac{1}{e^{\omega/(k_BT_0)}-1},\tag{29}$$

式中

$$T_0=\frac{\pm\kappa}{2\pi k_B}=\frac{g}{2\pi k_Bc(1-2\dot{x}_H)},\tag{30}$$

为 Hawking 辐射温度表达式,k_B 为玻尔兹曼常数.

3.结　　论

1.对于任意变速参考系所描述的引力场,因 g 为时间 t 的任意函数,视界位置 x_H 随时间改变,视界面上的温度也是时间 t 的函数,整个空间不可能达到热平衡.

2.若 $g(t)=\text{const}$,即参考系作均匀加速运动,则很容易得出 $\dot{x}_H=0$,$x_H=-c^2/g$,视界温度 $T_0=\frac{g}{2\pi k_Bc}$,且时轴正交,引力场处于热平衡.此时对应的线元可由闵氏线元作 Mϕller 变换得出.即

$$X=\frac{c^2}{g}\left(\cosh\frac{gt}{c}-1\right)+x\cosh\frac{gt}{c},$$
$$T=\frac{c}{g}\sinh\frac{gt}{c}+\frac{x}{c}\sinh\frac{gt}{c},$$
$$Y=y,\quad Z=z.\tag{31}$$

显然,若将 X 中的常数项 $-c^2/g$ 吸收到 X 中,则 Mϕller 变换实际上是分离变量形的坐标变换,所得结果支持文献[1]的结论.

[1] Zhao Z 1990 *Acta Phys. Sin.* **39** 1854 (in Chinese)[赵峥 1990 物理学报 **39** 1854]

[2] Wang Y J and Tang Z M 1990 *The Theory and Effects of Gravitation* (Changsha:Hunan Science & Technology Press) p167—170 (in Chinese)[王永久、唐智明 1990 引力理论和引力效应(长沙:湖南科学技术出版社)第 167—170 页]

[3] Wu S M and Zhang J Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 724 (in Chinese)[吴胜杳、张靖仪 1998 物理学报 **47** 724]

[4] Tang Z M 1987 *Science Bulletin* (3) 237 (in Chinese)[唐智明 1987 科学通报 (3) 237]

[5] Tang Z M and Wang Y J 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 561 (in Chinese)[唐智明、王永久 1999 物理学报 **48** 561]

[6] Zhao Z,Li Z H and Liu L 1997 *J. Beijing Normal Univ.* (Natural Science) **33** 214 (in Chinese)[赵峥、黎忠恒、刘辽 1997 北京师范大学学报(自然科学版) **33** 214]

[7] Luo Z Q and Zhao Z 1991 *J. Beijing Normal Univ.* (Natural Science) **27** 499 (in Chinese)[罗志强、赵峥 1991 北京师范大学学报(自然科学版) **27** 499]

[8] Luo Z Q and Zhao Z 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 506 (in Chinese)[罗志强、赵峥 1993 物理学报 **42** 506]

[9] Zhao Z 1999 *Thermal Property of Black Hole and Singularity of Spacetime* (Beijing:Beijing Normal University Press) p239—240 (in Chinese)[赵峥 1999 黑洞的热性质与时空奇异性(北京:北京师范大学出版社)第 239—240 页]

Temperature in an arbitrary rectilinearly accelerating spacetime*

Zhang Jing-Yi
(*Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing* 100875, *China*)
(Received 15 October 2003)

Abstract

The event horizon equation is given. Using Damour-Ruffini method improved by Zhao Zheng, the formula of temperature is obtained, which supports the result by Zhao Z (*Acta Phys. Sin*. 1990 **39** 1845) (in Chinese).

Keywords: arbitrary rectilinearly accelerating coordinate system, Hawking radiation, temperature
PACC: 9760L, 0420

* Project supported by the National Natunal Science Foundation of China (Grant Nos. 10375051 and 10373003).