第 54 卷 第 6 期 2005 年 6 月
1000-3290/2005/54(06)/2463-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.54,No.6,June,2005
©2005 Chin. Phys. Soc.

广义随机 KdV 方程新的精确类孤子解*

韦才敏[1)†] 夏尊铨[1)] 田乃硕[2)]

[1)](大连理工大学应用数学系,大连 116024)

[2)](燕山大学理学院,秦皇岛 066004)

(2004 年 8 月 31 日收到;2004 年 10 月 27 日收到修改稿)

利用厄米(Hermite)变换求出了广义随机 KdV 方程新的类孤子解.这种方法的基本思想是通过厄米变换把 Wick 类型的广义随机 KdV 变成广义变系数 KdV 方程,利用特殊的截断展开方法求出方程的解,然后通过厄米的逆变换求出方程的随机解.

关键词:随机 KdV 方程,随机孤子解,白色噪音,截断展开方法,厄米变换

PACC:0250,0340K,0290

1. 引 言

本文将考虑如下形式的广义随机 KdV 方程的精确解

$$U_t + 2H_2(t)\diamond U + (H_1(t) + H_2(t)x)\diamond U_x - 3cH_3(t)\diamond U\diamond U_x + H_3(t)\diamond U_{xxx} = 0, \quad (1)$$

其中 $H_i(t)(i=1,2,3)$ 是白色噪声泛函,◇是 Hida 分布空间$(S(R^d))^*$ 上的 Wick 乘(这将在下一节给出定义).而方程(1)可以看成带有变系数 KdV 方程(2)的一个推广,

$$u_t + 2\beta(t)u + (\alpha(t) + \beta(t)x)u_x - 3c\gamma(t)uu_x + \gamma(t)u_{xxx} = 0, \quad (2)$$

其中 c 是常量,$\alpha(t)\beta(t)$,$\gamma(t)$ 是 R_+ 上的积分函数.

近十多年来,变系数非线性演化方程的研究也引起了数学家和物理学家的高度关注,已有许多文献报道了相关的研究成果[1—17],张解放等用的截断展开方法[16]给出了方程(2)的精确解.随机波是随机偏微分方程一个重要课题,当前已经有许多人从事随机 KdV 方程的研究[18—23],在[21]中 Holden 等给出了用白色噪声泛函来研究 Wick 形式的随机偏微分方程.本文将用白色噪音分析方法来给出广义的 Wick 类型随机 KdV 方程(1)的精确解.

2. 预备知识

假设$(S(R^d))$和$(S(R^d))^*$ 分别是 R^d 上 Hida 试验函数空间和 Hida 分布空间,而 $h_n(x)$ 是 n- 重厄米多项式.设 $\xi_n(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}h_n(\sqrt{2}x)/(\pi(n-1)!)^{1/2}$,$n\geqslant 1$.则 $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ 组成 $L^2(R)$ 上的一个正交基.如果定义 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)$ 是 d- 维多重指标,$\alpha_1,\cdots,\alpha_d\in N$,那么张量乘族 $\xi_\alpha=\xi_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)}=\xi_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{\alpha_d}(\alpha\in N^d)$ 在 $L^2(R)$ 上构成一个正交基.假设 $\alpha^{(i)}=(\alpha_1^{(i)},\cdots,\alpha_d^{(i)})$ 是 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)\in N^d$ 上某个固定排序的第 i 个指标,并假定这排序有性质:$i<j\Rightarrow\alpha_1^{(i)}+\cdots+\alpha_d^{(i)}\leqslant\alpha_1^{(j)}+\cdots+\alpha_d^{(j)}$.定义 $\eta_i=\xi_{\alpha^{(i)}}=\xi_{\alpha_1^{(i)}}\otimes\cdots\otimes\xi_{\alpha_d^{(i)}}$,$i\geqslant 1$.用 $j=(N_0^N)_c$ 表示对所有 $\alpha_i\in N_0$ 的 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$ 及其紧支撑组成的空间,也就是仅有有限多个 $\alpha_i\neq 0$.对 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in j$,定义 $H_\alpha(\omega)=\prod_{i=1}^\infty h_{\alpha_i}(\langle\omega,\eta i\rangle)$,$\omega\in(S(R^d))^*$.对于固定的 $n\in N$,令$(S)_1^n$ 是由 $x=\sum_\alpha c_\alpha H_\alpha\in\bigoplus_{k=1}^n L^2(\mu)$,$c_\alpha\in R^n$ 使得 $\|x\|_{1,k}^2=\sum_\alpha c_\alpha^2(\alpha!)^2(2N)^{k\alpha}<\infty$,$\forall k\in N$,$c_\alpha^2=|c_\alpha|^2=\sum_{k=1}^n(c_\alpha^{(k)})^2$,$c_\alpha=(c_\alpha^{(1)},\cdots,c_\alpha^{(n)})\in R^n$ 组成的空

* 国家自然科学资金项目(批准号:10001007)和高校博士学科点专项科研基金项目(批准号:20020141013)资助的课题.

† E-mail:wcm1234460@sohu.com

间,其中 μ 是 $(S^*(R), B(S^*(R)))$ 上的白色噪声测度,对于 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots) \in j$ 有 $\alpha ! = \prod_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 和 $(2N)^{\alpha} = \prod_j (2j)^{\alpha_j}$.

另外,$(S)_{-1}^n$ 是由所有展开式 $X = \sum_{\alpha} n_{\alpha} H_{\alpha}$, $b_{\alpha} \in R^n$ 使得对某个 $q \in N$, $\| X \|_{-1,-q} = \sum_{\alpha} b_{\alpha}^2 (2N)^{-q\alpha} < \infty$ 组成的空间. 而半泛数族 $\| x \|_{1,k}$, $k \in N$ 在 $(S)_1^n$ 上产生一个拓扑,并且由 $\langle X, x \rangle = \sum_{\alpha} (b_{\alpha}, c_{\alpha}) \alpha !$ 可以把 $(S)_{-1}^n$ 看作是 $(S)_1^n$ 的对偶. 其中 (b_{α}, c_{α}) 是 R^n 上的内积. 把 $X \diamondsuit Y = \sum_{\alpha,\beta} (a_{\alpha}, b_{\beta}) H_{\alpha+\beta}$ 为定义 X 和 Y 的 Wick 乘积,其中 $X = \sum_{\alpha} a_{\alpha} H_{\alpha}$, $Y = \sum_{\alpha} b_{\alpha} H_{\alpha} \in (S)_{-1}^n$, $a_{\alpha}, b_{\alpha} \in R^n$. 可以证明空间 $(S(R^d))$, $(S(R^d))^*$, $(S)_1$ 和 $(S)_{-1}$ 在 Wick 乘积下是封闭的.

用 $\mathscr{H}(X) = \tilde{X}(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} z^{\alpha} \in C^n$(收敛时)来定义 X 的厄米变换,其中 $X = \sum_{\alpha} a_{\alpha} H_{\alpha} \in (S)_{-1}^n$, $a_{\alpha} \in R^n$ 和 $z = (z_1, z_2, \cdots) \in C^N$,对于 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots) \in j$, $z^{\alpha} = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n} \cdots$. 对于 $X, Y \in (S)_{-1}^N$ 及所有的 z 使得 $\tilde{X}(z)$, $\tilde{Y}(z)$ 存在,由厄米变换定义我们有 $\widetilde{X \diamondsuit Y}(z) = \tilde{X}(z) \cdot \tilde{Y}(z)$. 等式右边是由 $(z_1^1, \cdots, z_n^1) \cdot (z_1^2, \cdots, z_n^2) = \sum_{k=1}^n z_k^1 z_k^2$ ($z_k^j \in C$) 定义在 C^N 上两元素之间复双线性乘积.

假定 $X = \sum_{\alpha} a_{\alpha} H_{\alpha} \in (S)_{-1}^n$,那么向量 $c_0 = \tilde{X}(0) \in R^n$ 叫做 X 的广义期望值,用 $E(X)$ 来表示. 假若 $f: V \to C^m$ 是一个分析函数,其中 V 是 $E(X)$ 的一个临域,并假定 f 在 R^n 中沿着 $E(X)$ 的泰勒展开有系数,那么其 Wick 形式为 $f^{\diamondsuit}(X) = \mathscr{H}^{-1}(f \circ \tilde{X}) \in (S)_{-1}^m$.

现在我们来考虑表达式为 $A(t, x, \partial t, \nabla x, U, \omega) = 0$ 的随机偏微分方程,其中 A 为某个给定的函数,而 $U = U(t, x, \omega)$ 则是一个未知(或广义)的随机过程,算子 $\partial t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\nabla x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_d}\right)$, $x = (x_1, \cdots, x_d) \in R^d$. 首先我们给出上面随机偏微分方程的 Wick 形式为

$$A^{\diamondsuit}(t, x, \partial t, \nabla x, U, \omega) = 0. \tag{3}$$

其次,我们通过厄米变换把公式(3)的 Wick 乘积变成普通的乘积,也就是

$$\tilde{A}(t, x, \partial t, \nabla x, \tilde{U}, z_1, z_2, \cdots) = 0, \tag{4}$$

其中 $\tilde{U} = \mathscr{H}(u)$ 是 U 的厄米变换,而 $z_1, z_2, \cdots$ 是复数. 假定我们能找到方程 $\tilde{A}(t, x, \partial t, \nabla x, u, z) = 0$ 的一个解 $u = u(t, x, z)$,其中对某些 q, r,使得 $z = (z_1, z_2, \cdots) \in K_q(r)$,而 $K_q(r) = \{z = (z_1, z_2, \cdots) \in C^N$ 且 $\sum_{\alpha \neq 0} |z^{\alpha}|^2 (2N)^{q\alpha} < r^2\}$. 那么在一定的条件下,我们取其厄米的逆变换 $U = \mathscr{H}^{-1} u \in (S)_{-1}$,从而我们获得原 Wick 方程(3)的一个解 U. 因而我们得到下面的定理,其详细证明可见文献[20].

定理 2.1. 假定 $u(t, x, z)$ 是方程(4)的一个解(普通强的、逐点指向的),其中 (t, x) 是在某一个 $G \subset R \times R^d$ 的有界开集的元素和对某些 q, r,使得 $z \in K_q(r)$. 此外,假设 $u(t, x, z)$ 及方程(4)中所有它的偏导对于 $(t, x, z) \in G \times K_q(r)$ 是有界的,而对所有 $z \in K_q(r)$ 关于 $(t, x) \in G$ 是连续的和对所有 $(t, x) \in G$ 关于 $z \in K_q(r)$ 是连续的. 所以存在 $U(t, x) \in (S)_{-1}$ 对所有 $(t, x, z) \in G \times K_q(r)$ 使得 $u(t, x, z) = (\tilde{U}(t, x))(z)$,从而在 $(S)_{-1}$ 中用 $U(t, x)$ 来解方程(3)(在 $(S)_{-1}$ 中是强指向的).

3. 广义随机 KdV 方程的类孤子解

在这一节里面,我们将给出方程(1)的精确解. 对方程(1)取厄米变换得

$$\tilde{U}_t + 2\tilde{H}_2(t)\tilde{U} + (\tilde{H}_1(t) + \tilde{H}_2(t)x)\tilde{U}_x - 3c\tilde{H}_3(t)\tilde{U}\tilde{U}_x + \tilde{H}_3(t)\tilde{U}_{xxx} = 0, \tag{5}$$

其中 $z = (z_1, z_2, \cdots) \in (C^N)_c$ 是参数. 现在我们用截断展开方法[16]来解方程(5),为了方便起见,令 $u(t, x, z) = \tilde{U}(t, x, z)$, $H_i(t, z) = \tilde{H}_i(t, z)$ $(i = 1, 2, 3)$. 而方程(5)有如下形式的解:

$$u = u(t, x, z) = \sum_{i=0}^{n} v_i(t, z) F^i,$$

$$F = F(\xi) = \frac{1}{1 + e^{\xi}},$$

$$\xi = f(t, z)x + g(t, z). \tag{6}$$

$v_i(t, z)$ $(i = 1, \cdots, n)$, $f(t, z)$, $g(t, z)$ 是待定函数. 把方程(6)代入方程(5),根据领头项分析,对于方程(5)可知 $n = 2$,从而得到

$$u = v_0(t, z) + v_1(t, z)F + v_2(t, z)F^2. \tag{7}$$

由方程(5)和方程(7),可得

$$u_t = v_{0t} + v_{1t}F + v_1\xi_t F^2 - v_1\xi_t F + v_{2t}F^2 + 2v_2\xi_t F^3 - 2v_2\xi_t F^2, \tag{8}$$

$$u_x = v_1\xi_x F^2 - v_1\xi_x F + 2v_2\xi_x F^3 - 2v_2\xi_x F^2, \tag{9}$$

$$u_{xxx}=6v_1\xi_x^3F^4-12v_1\xi_x^3F^3+7v_1\xi_x^3F^2-v_1\xi_x^3F+24v_2\xi_x^3F^5-54v_2\xi_x^3F^4+38v_2\xi_x^3F^3-8v_2\xi_x^3F^2. \tag{10}$$

把(7)—(10)式代入方程(5),并比较 F 各次幂项前的系数,得到

$$F^5:24H_3v_2\xi_x^3-6cH_3v_2^2\xi_x=0, \tag{11}$$

$$F^4:6H_3v_1\xi_x^3-54H_3v_2\xi_x^3-3cH_3v_1v_2\xi_x+6cH_3v_2^2\xi_x^3-6cH_3v_1v_2\xi_x=0, \tag{12}$$

$$F^3:2v_2\xi_t-12H_3v_1\xi_x^3+38H_3v_2\xi_x^3-6cH_3v_0v_2\xi_x-3cH_3v_1^2\xi_x+9cH_3v_1v_2\xi_x+2(H_1+H_2x)v_2\xi_x=0, \tag{13}$$

$$F^2:v_1\xi_t+v_2t-2v_2\xi_t+7H_3v_1\xi_x^3-8H_3v_2\xi_x^3-3cH_3v_0(v_1-2v_2)\xi_x-3cH_3v_1^2\xi_x-(H_1+H_2x)(v_1-2v_2)\xi_x+2H_3v_2=0, \tag{14}$$

$$F:v_{1t}-v_1\xi_t+H_3v_1\xi_x^3+3cH_3xv_0v_1\xi_x-(H_1+H_2x)(v_1-2v_2)v_1\xi_x+2H_2v_1=0, \tag{15}$$

$$F^0:v_{0t}+2H_3v_0=0. \tag{16}$$

由于 $\xi=f(t,z)x+g(t,z)$,我们有 $\xi_x=f(t,z)$,$\xi_t=f_t(t,z)x+g_t(t,z)$.再由方程(11)和(12),则得到

$$v_2(t,z)=-v_1(t,z)=\frac{4}{c}\xi_x^2=\frac{4}{c}f(t,z)^2. \tag{17}$$

解方程(16)得到

$$v_0(t,z)=c_0\exp\left(-\int^t 2H_2(s,z)\mathrm{d}s\right), \tag{18}$$

其中 c_0 是一个积分常数.由方程(13),则得

$$\xi_t=-H_2x\xi_x-H_3\xi_x^3-H_1\xi_x+3cH_3v_0\xi_x, \tag{19}$$

又因为 $\xi_x=f(t,z)$,$\xi_t=f_t(t,z)x+g_t(t,z)$,所以有

$$f_t(t,z)=-H_2(t,z)f(t,z), \tag{20}$$

$$g_t(t,z)=-H_3(t,z)f(t,z)^3+(3cH_3(t,z)v_0(t,z)-H_1(t,z))f(t,z). \tag{21}$$

解方程(20)和方程(21)得

$$f(t,z)=\lambda\exp\left(-\int^t H_2(s,z)\mathrm{d}s\right), \tag{22}$$

$$g(t,z)=\int^t\Big\{-H_3(s,z)\lambda^3\exp\left(-\int^s 3H_2(\tau,z)d\tau\right)+\lambda\Big[3cc_0H_3(s,z)\exp\left(-\int^s 3H_2(\tau,z)\mathrm{d}\tau\right)-H_1(t,z)\exp\left(-\int^s H_2(\tau,z)\mathrm{d}\tau\right)\Big]\Big\}\mathrm{d}s+c_1, \tag{23}$$

其中 λ,c_1 也是积分常数.

把方程(22)和方程(23)代入方程(6)得

$$\xi=\lambda\exp\left(-\int^t H_2(s,z)\mathrm{d}s\right)x+\int^t\Big\{-H_3(s,z)\lambda^3\exp\left(-\int^s 3H_2(\tau,z)\mathrm{d}\tau\right)+\lambda\Big[3cc_0H_3(s,z)\exp\left(-\int^s 3H_2(\tau,z)\mathrm{d}\tau\right)-H_1(t,z)\exp\left(-\int^s H_2(\tau,z)\mathrm{d}\tau\right)\Big]\Big\}\mathrm{d}s+c_1. \tag{24}$$

注意到

$$\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\xi\right)=1-2F,$$

$$\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\xi\right)=4F-4F^2,$$

$$\frac{1}{1+\mathrm{ch}(\xi)}=2F-2F^2, \tag{25}$$

因此,截断展开解可以用 $\mathrm{th}(0.5\xi)$,$\mathrm{sech}^2(0.5\xi)$,$1/[1+\mathrm{ch}(\xi)]$ 多项式表示.由方程(7)和方程(24),我们可以得到方程(5)的类孤子解

$$u(t,x,z)=c_0\exp\left(\int^t 2H_2(s,z)\mathrm{d}s\right)-\frac{1}{c}\lambda^2\exp\left(-\int^t 2H_2(s,z)\mathrm{d}s\right)\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\xi\right), \tag{26}$$

其中 ξ 由方程(24)给出.

为了得到方程(1)的精确解,我们给出条件(a):假设 (t,x) 是属于一个有界开集 $G\subset R_-\times R$ 的元素,并对某些 $q>0,r>0$ 的所有 $z\in K_q(r)$ 使得 $H_i(t,z)$,$i=1,2,3$ 满足 $u(t,x,z)$ 和在方程(5)中所有偏导对 $(t,x,z)\in G\times K_q(r)$ 是一致有界,对所有 $z\in K_q(r)$ 关于 $(t,x)\in G$ 是连续的,对所有 $(t,x)\in G$ 关于 $z\in K_q(r)$ 是解析的.由上面的假设条件,定理 2.1 隐含存在 $U(t,x)\in(S)_{-1}$ 对于所有 $(t,x,z)\in G\times K_q(r)$ 使得 $u(t,x,z)=(\mathscr{H}U(t,x))(z)$,由 $U(t,x)$ 解方程(1).由上面我们知道 $U(t,x)$ 是 $u(t,x,z)$ 的逆厄米变换.因此由(26)式,我们得到方程(1)的一个随机孤子解

$$U(t,x)=c_0\exp^{\diamond}\left(-\int^t 2H_2(s)\mathrm{d}s\right)-\frac{1}{c}\lambda^2\exp^{\diamond}\left(-\int^t 2H_2(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{sech}^{2\diamond}\left(\frac{1}{2}\bar{\xi}\right), \tag{27}$$

其中

$$\bar{\xi}=\lambda\exp^{\diamond}\left(-\int^t H_2(s)\mathrm{d}s\right)x$$

$$+\int^{t}\{-\lambda^{3}H_{3}(s)\diamond\exp^{\diamond}(-\int^{s}3H_{2}(\tau)\mathrm{d}\tau)$$
$$+\lambda[3cc_{0}H_{3}(s)\diamond\exp^{\diamond}(-\int^{s}2H_{2}(\tau)\mathrm{d}\tau)$$
$$-H_{1}(s)]\diamond\exp^{\diamond}(-\int^{s}H_{2}(\tau)\mathrm{d}\tau)\}\mathrm{d}s+c_{1}. \quad (28)$$

设 $h(t)$是 R_{-}上的可积函数,并令

$$H_{1}(t)=b_{1}W(t),$$
$$H_{2}(t)=h(t)+b_{2}W(t),$$
$$H_{3}(t)=b_{3}W(t),$$

其中 $W(t)$是高斯白色噪声,也就是 $W_{t}=\dot{B}_{t}$,而 B_{t} 是布朗运动.我们得到它们的厄米变换为

$$H_{1}(t,z)(t)=b_{1}\widetilde{W}(t,z),$$
$$H_{2}(t,z)=h(t)+b_{2}\widetilde{W}(t,z),$$
$$H_{3}(t,z)=b_{3}\widetilde{W}(t,z),$$

其中 $\widetilde{W}(t,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{t}\eta_{k}(s)\mathrm{d}sz_{k}$. 又因为 $\exp^{\diamond}\{B(t)\}=\exp\{B(t)-\frac{1}{2}t^{2}\}$(详细的推导可以看文献[20]的引理 2.6.16),从而我们得到方程(1)的随机解为

$$U(t,x)=c_{0}\exp\Big(-\int^{t}h(s)\mathrm{d}s-b_{2}B(t)+\frac{b_{2}}{2}t^{2}\Big)$$
$$-\frac{1}{c}\lambda^{2}\exp\Big(-\int^{t}h(s)\mathrm{d}s-b_{2}B(t)$$
$$+\frac{b_{2}}{2}t^{2}\Big)\mathrm{sech}^{2}\Big(\frac{1}{2}\theta\Big), \quad (29)$$

其中

$$\theta=\lambda\exp\Big(-\int^{t}h(s)\mathrm{d}s-b_{2}B(t)+\frac{b_{2}}{2}t^{2}\Big)x$$
$$+\int^{t}\{-\lambda^{3}b_{3}W(s)\diamond\exp(-\int^{s}3h(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$-3b_{2}B(s)+\frac{3b_{2}}{2}s^{2})+\lambda[3cc_{0}b_{3}W(s)\diamond$$
$$\times\exp(-\int^{s}2h(\tau)\mathrm{d}\tau-2b_{2}B(s)$$
$$+b_{2}s^{2})-b_{1}W(s)]\diamond\exp(-\int^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$-b_{2}B(s)+\frac{b_{2}}{2}s^{2})\}\mathrm{d}s+c_{1}$$
$$=\lambda\exp\Big(-\int^{t}h(s)\mathrm{d}s-b_{2}B(t)+\frac{b_{2}}{2}t^{2}\Big)x$$
$$+\int^{t}\{-\lambda^{3}b_{3}\exp(-\int^{s}3h(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$-3b_{2}B(s)+\frac{3b_{2}}{2}s^{2})+c_{1}$$
$$+3\lambda cc_{0}b_{3}\exp(-\int^{s}4h(\tau)\mathrm{d}\tau-4b_{2}B(s)$$
$$+2b_{2}s^{2})-\lambda b_{1}\exp(-\int^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$-b_{2}B(s)+\frac{b_{2}}{2}s^{2})\}\delta B(s). \quad (30)$$

在这里我们用到了下面的关系式

$$\int_{R}\Psi(t)\delta B(t)=\int_{R}\Psi(t)\diamond W(t)\mathrm{d}t,$$
$$\Psi(t)\in L^{2}(R),$$

其中随机积分 $\int(\cdot)\delta B(t)$是 Skorohod 积分.

4. 结 论

本文用厄米变换和特殊的截断展开方法来研究广义的随机 KdV 方程,得到新的随机类孤子解.这些方法可以求出一大类随机非线性演化方程的随机类孤子解,也可以推广应用到(2+1)维或更复杂的有物理背景的随机非线性演化方程.此外,方程(1)是否能利用椭圆展开法来求其 Jacobi 椭圆函数解,有待于研究(因为超越函数是否存在厄米逆变换还没有见相关文献报道).由于 Poisson 白色噪声空间与 Wiener 白色噪声空间之间存在单一映射关系,因此,Poisson 随机偏微分方程的解可以把这一映射映射到高斯随机偏微分方程的解而求出来.这简便精确的连接是由 Benth 等[17]给出的,也可以看文献[20]的 4.9 节的论述.从而我们得到在方程(2)中若其系数 $\alpha(t)\beta(t)$,$\gamma(t)$是由 Poisson 白色噪声扰动引起的广义随机 KdV 方程的随机解.

[1] Chan W L and Li K S 1989 *J. Math. Phys.* **30** 2521

[2] Nirmala N, Vedan M J and Baby B V 1986 *J. Math. Phys.* **27** 2640

[3] Brugarino T 1989 *J. Math. Phys.* **30** 1013

[4] Halvaty L 1986 *J. Phys. Soc. Jpn.* **55** 1045

[5] Lou S Y and Ruan H Y 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 182 (in Chinese) [楼森岳、阮航宇等 1992 物理学报 **41** 182]

[6] Zhu Z N 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 1561 (in Chinese) [朱佐农 1992 物理学报 **41** 1561]

[7] Li Y S and Zhu G C 1986 *Chinese Sci. Bull.* **19** 1449 (in Chinese)

[李翊神、朱国城 1986 科学通报 **19** 1449]
[8] Tian C 1987 *J*. *Phys*. A：*Math*. *Gen*. **20** 359
[9] Gazeau J P and Winternitz P 1992 *J*. *Math*. *Phys*. **33** 4087
[10] Lou S Y 1991 *Sci*. *Sinica*（series A）**34** 622（in Chinese）[楼森岳 1991 中国科学（A 辑）**34** 622]
[11] Chan W L and Zhang X 1994 *J*. *Phys*. A：*Math*. *Gen*. **27** 407
[12] Xu B Z and Zhao S Q 1994 *Appl*. *Math*. JCU **9**B 331
[13] Liu X Q 1998 *Appl*. *Math*. JCU **13** B 25
[14] Yan Z Y and Zhang H Q 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1957（in Chinese）[闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **48** 1957]
[15] Liu S K，Fu Z T，Liu S D and Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1923（in Chinese）[刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 1923]
[16] Zhang J F and Chen F Y 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1648（in Chinese）[张解放、陈发银 2001 物理学报 **50** 1648]
[17] Li D S and Zhang H Q 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1569（in Chinese）[李德生、张鸿庆 2003 物理学报 **52** 1569]
[18] Benth E and Gjerde J 1998 *Potential Anal*. **8**（2）179
[19] de Bouard A and Debussche A 1998 *J*. *Funct*. *Anal*. **154** 215
[20] Debussche A and Printems J 1999 *Physica* D **134** 200
Debussche A and Printems J 2001 *J*. *Comput*. *Anal*. *Appl*. **3**（3）183
[21] Holden H，Øsendal B，Ubøe J and Zhang T 1996 *Stochastic partial differential equations*（Berlin：Birhkäuser）p18
[22] Printems J 1999 *J*. *Differen*. *Equat*. **153** 338
[23] Xie Y C 2003 *Phys*. *Lett*. A **310** 161
Xie Y C *et al* 2004 *Phys*. *Lett*. A **327** 174
Xie Y C *et al* 2004 *Chaos*，*Solitons & Fractals* **19** 509
Xie Y C *et al* 2004 *Chaos*，*Solitons & Fractals* **20** 337

New exact soliton-like solution for a generalized stochastic KdV equation*

Wei Cai-Min[1)†] Xia Zun-Quan[1)] Tian Nai-Shuo[2)]
[1)]（*Department of Applied Mathematics*，*Dalian University of Technology*，*Dalian* 116024，*China*）
[2)]（*School of Science*，*Yanshan University*，*Qinhuangdao* 066004，*China*）
（Received 31 August 2004；revised manuscript received 27 October 2004）

Abstract

By using Hermite transformation，the Wick-type generalized stochastic KdV equation is studied. And the new explicit exact solution is shown via the special truncation expansion method and Hermite transformation.

Keywords：stochastic KdV equation，stochastic soliton solution，white noise，truncation expansion method，Hermite transformation
PACC：0250，0340K，0290

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China（Grant No. 10001007），and the Doctoral Program Foundation of Institutions of Higher Education of China（Grant No. 20020141013）.

† E-mail：wcm1234460@sohu.com