第 54 卷 第 6 期 2005 年 6 月
1000-3290/2005/54(06)/2468-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.54, No.6, June, 2005

一类非线性非完整系统的 Routh 方程：从 Chetaev 条件到 Euler 条件*

沈惠川†

(中国科学技术大学天文与应用物理系统计力学中心，合肥 230026)

(2004 年 7 月 5 日收到；2004 年 11 月 13 日收到修改稿)

对于一类其非线性约束方程可展开为关于广义速度的 MacLaurin 级数的非完整系统，可以在完全理想的情况下用 Lagrange 未定乘数法和 d'Alembert 原理建立其 Routh 方程. 由此可以得到结论：Chetaev 条件只有在线性非完整系统中才成立并且等价于 Vacco 条件. 引入"Euler 条件"，可以统一 Chetaev 条件和 Vacco 条件，统一 d'Alembert 原理和 Hamilton 原理，并解决所有现存于非线性非完整系统中的问题.

关键词：非线性非完整系统，Routh 方程，Chetaev 条件，Vacco 条件，Euler 条件

PACC：0320

1. 引　　言

在分析力学和在分析热力学[1—4]中，都存在非完整系统[5,6]的问题. 另外，在流体力学和塑性力学的流动理论中，非完整系统问题更为重要. 本文仅考虑在分析力学[7]中的情况.

在 Lagrange 力学中，若有 n 个质点受到 s 个完整约束和 r 个非完整约束的限制，则体系的自由度数为 $m=3n-s-r$；同时，理想完整约束条件下成立的 d'Alembert 原理是

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\delta q^k=0, (k=1,\cdots,m+r), \tag{1}$$

式中 L 为 Lagrangian，q_k 和 $\dot{q}_k$ 分别为广义坐标和广义速度；重复的上标和下标按 Einstein 约定求和. 由于其中有 r 个非完整约束，故 $(m+r)$ 个 δq^k 中只有 m 个是独立的，从而不能令上式中每个 δq^k 的系数都是零.

在通常的分析力学教科书中只能处理线性非完整系统的约束问题；在这类问题中，其 r 个线性非完整约束方程是

$$a_o^\beta+a_o^\beta\dot{q}^k=0\ (k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r), \tag{2}$$

或改写成

$$a_o^\beta\mathrm{d}t+a_k^\beta\mathrm{d}q^k=0$$
$$(k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r). \tag{3}$$

将(3)式中的真实位移换成虚位移，即将微分换成变分，并考虑到等时变分条件 $\delta t=0$，有

$$a_k^\beta\delta q^k=0\quad(k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r). \tag{4}$$

用 Lagrange 未定乘数法，以时间 t 的任意函数 $\lambda_\beta(t)$ 标乘(4)式，然后在(1)式中减去它们的标积，便可得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}-\lambda_\beta a_k^\beta\right)\delta q^k=0$$
$$(k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r). \tag{5}$$

选择 $\lambda_\beta(t)$，使不独立的 r 个虚位移前的系数为零，因而其余 m 个独立的虚位移前的系数亦为零了. 于是，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\lambda_\beta a_k^\beta$$
$$(k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r). \tag{6}$$

将(6)式与线性非完整约束方程(2)式联立，称之为 Routh 方程组；$\lambda_\beta(t)$ 被称为 Lagrange 未定乘数. 方程组共有 $(m+2r)$ 个方程；未知函数亦为 $(m+2r)$ 个：$(m+r)$ 个 q_k 和 r 个 $\lambda_\beta(t)$. 所以方程组是完备的.

以上处理非完整系统动力学问题的方法是经典的. 一般来说并无异议. 梁立孚[8]对由(2)式或(3)式到(4)式的改写引用郭仲衡和高普云话说："变分和

* 物理学国家理科人才培养基地基金资助的课题

† E-mail：shenhuichuan@ustc.edu

微分是两个不同的数学概念，它们间的替代并无逻辑的根据.'这可能是唯一的异议.但是，若承认变分运算规则与微分运算规则相同，(现在没有理由认为这两种运算规则不同，如果不同则怎样定义变分运算规则又成了更复杂的问题.)亦即承认 d-δ 之间的普遍交换性，那么郭仲衡和高普云的异议就没有道理.

1933 年，N. G. Chetaev 引入著名的"Chetaev 条件"：

$$\frac{\partial f^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}\delta q^k = 0 \quad (k = 1,\cdots,m + r;\beta = 1,\cdots,r), \tag{7}$$

其中 $f^{\beta} = f^{\beta}(q_k, \dot{q}_k; t) = 0$ 在线性非完整系统中，恰好就是线性非完整约束方程(2)式：

$$f_1^{\beta} = a_0^{\beta} + a_k^{\beta}\dot{q}^k = 0 \quad (k = 1,\cdots,m + r;\beta = 1,\cdots,r). \tag{8}$$

正如梅凤翔先生所说，Chetaev 条件有点怪：偏导数对 $\dot{q}_k$，变分则对 q_k."于是，有人怀疑它，认为它是强加的."

另一个称之为'Vacco 模型'的数学结构大概是在 1982—1983 年间提出来的[8].Vacco 模型的出发点是 Hamilton 原理

$$\delta\int(L + \lambda_{\beta}f_1^{\beta})\mathrm{d}t = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,r). \tag{9}$$

由 Hamilton 原理(9)式可得所谓'Vacco 条件'：

$$\left[\lambda_{\beta}\left(\frac{\partial f_1^{\beta}}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_1^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \dot{\lambda}_{\beta}\frac{\partial f_1^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}\right]\delta q^k = 0 \quad (k = 1,\cdots,m + r;\beta = 1,\cdots,r). \tag{10}$$

此外，由 $\delta f_1^{\beta} = 0$，可得

$$\left(\frac{\partial f_1^{\beta}}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_1^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q^k + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f_1^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}\delta q^k\right) = 0 \quad (k = 1,\cdots,m + r;\beta = 1,\cdots,r). \tag{11}$$

若应用 Chetaev 条件(7)式，则由(11)式有

$$\frac{\partial f_1^{\beta}}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_1^{\beta}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (k = 1,\cdots,m + r;\beta = 1,\cdots,r). \tag{12}$$

从而'Vacco 条件'(10)式就是'Chetaev 条件'(7)式.

于是问题来了：从逻辑上粗粗一看，(10)式似乎比(7)式更严格，更理性；显然，将线性非完整约束方程(8)式代入(10)式可以得到(4)式；这与将(8)式代入(7)式可以得到(4)式的结果的确相同.但是，"Chetaev 条件"从何而来？看上去没有什么道理且"有点怪'的 Chetaev 模型，既不能由力学分析的形式得到(即不能从 Hamilton 原理得到)，又不能由约束方程的逻辑诱导得到(即不能从 $\delta f_1^{\beta} = 0$ 得到)，更不符合变分学方法的规范程序(即为何'偏导数对 $\dot{q}_k$，变分则对 q_k')，但应用 Chetaev 条件确实可以导出系统的真实轨道方程，起码对线性非完整约束是如此.为什么？如果在非线性非完整系统中 Chetaev 条件不成立，则 Vacco 条件是否在任何情况中都正确？由此引发了"Vacco 模型'和"Chetaev 模型'长达 20 多年的争论.

2. 一类非线性非完整系统的 Routh 方程

在回答上述问题之前，先研究一类非线性非完整系统的 Routh 方程.

设有非完整约束方程 $f^{\beta} = f^{\beta}(\dot{q}_k) = 0$；当 $f^{\beta}(\dot{q}_k)$ 在 $\dot{q}_k = 0$ 的小邻域内有任意阶微商时，此非完整约束方程可展成 MacLaurin 级数的形式：

$$\begin{aligned} f^{\beta}(\dot{q}_k) &= (f^{\beta})_0 + \left(\frac{\partial f^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}\right)_0\dot{q}^k + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f^{\beta}}{\partial \dot{q}_j\partial \dot{q}_k}\right)_0\dot{q}^j\dot{q}^k + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f^{\beta}}{\partial \dot{q}_i\partial \dot{q}_j\partial \dot{q}_k}\right)_0\dot{q}^i\dot{q}^j\dot{q}^k + \cdots \\ &= a_0^{\beta} + a_k^{\beta}\dot{q}^k + \frac{1}{2!}a_{jk}^{\beta}\dot{q}^j\dot{q}^k + \frac{1}{3!}a_{ijk}^{\beta}\dot{q}^i\dot{q}^j\dot{q}^k + \cdots = 0 \end{aligned}$$
$$(i,j,k = 1,\cdots,m + r;\beta = 1,\cdots,r), \tag{13}$$

式中($a_0^{\beta}, a_k^{\beta}, a_{jk}^{\beta}, a_{ijk}^{\beta}, \cdots$)为 Taylor 展开系数.由(13)式第一个等号右边的前两项组成的非完整约束方程是 $f_1^{\beta} = a_0^{\beta} + a_k^{\beta}\dot{q}^k = 0$，亦即'线性非完整约束方程'.

仿照处理线性非完整约束方程的方法，先将(13)式写成微分形式：

$$a_0^{\beta}\mathrm{d}t + a_k^{\beta}\mathrm{d}q^k + \frac{1}{2!}a_{jk}^{\beta}\dot{q}^j\mathrm{d}q^k + \frac{1}{3!}a_{ijk}^{\beta}\dot{q}^i\dot{q}^j\mathrm{d}q^k + \cdots = 0 \quad (i,j,k = 1,\cdots,m + r;\beta = 1,\cdots,r), \tag{14}$$

再将(14)式中的真实位移换成虚位移，即将微分换成变分，并利用等时变分条件 $\delta t = 0$，有

$$a_k^{\beta}\delta q^k + \frac{1}{2!}a_{jk}^{\beta}\dot{q}^j\delta q^k + \frac{1}{3!}a_{ijk}^{\beta}\dot{q}^i\dot{q}^j\delta q^k + \cdots = 0$$

$$(i,j,k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r). \quad (15)$$

用 Lagrange 未定乘数法,以时间 t 的任意函数 $\lambda_\beta(t)$ 标乘(15)式,然后在(1)式中减去它们的标积,便可得到

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}-\lambda_\beta\left(a_k^\beta+\frac{1}{2!}a_{jk}^\beta\dot{q}^j+\frac{1}{3!}a_{ijk}^\beta\dot{q}^i\dot{q}^j+\cdots\right)\right]\delta q^k=0$$

$$(i,j,k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r). \quad (16)$$

选择 $\lambda_\beta(t)$,使不独立的 r 个虚位移前的系数为零,因而其余 m 个独立的虚位移前的系数亦为零了.于是,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\lambda_\beta\left(a_k^\beta+\frac{1}{2!}a_{jk}^\beta\dot{q}^j+\frac{1}{3!}a_{ijk}^\beta\dot{q}^i\dot{q}^j+\cdots\right)$$

$$(i,j,k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r). \quad (17)$$

将(17)式与非线性非完整约束方程(13)式联立,便得到非线性非完整系统的 Routh 方程组.在(17)式中可以看得很清楚:Routh 方程等号右端的括号 $\left(a_k^\beta+\frac{1}{2!}a_{jk}^\beta\dot{q}^j+\frac{1}{3!}a_{ijk}^\beta\dot{q}^i\dot{q}^j+\cdots\right)$ 并不一般地等于 $\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_k}$(除非是在线性非完整约束条件下);换言之,Chetaev 条件并不一般地成立.

3. Chetaev 条件的分析力学解释

在以上非线性非完整系统的 Routh 方程(17)式等号右端,因为有

$$\left(a_k^\beta+\frac{1}{2!}a_{jk}^\beta\dot{q}^j+\frac{1}{3!}a_{ijk}^\beta\dot{q}^i\dot{q}^j+\cdots\right)\dot{q}^k$$
$$=a_k^\beta\dot{q}^k+\frac{1}{2!}a_{jk}^\beta\dot{q}^j\dot{q}^k+\frac{1}{3!}a_{ijk}^\beta\dot{q}^i\dot{q}^j\dot{q}^k+\cdots$$
$$=f^\beta-(f_0^\beta)=f^\beta-a_0^\beta$$

$$(i,j,k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r), \quad (18)$$

所以(17)式可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\lambda_\beta\left(\frac{f^\beta-a_0^\beta}{\dot{q}_k}\right)$$

$$(k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r), \quad (19)$$

式中 $\dot{q}_k\dot{q}^l=\delta_k^l$,而 δ_k^i 为 Krönecker 符号.(18)式中第一个等号左端的形式,可以使人马上联想起 Euler 定理.

接下来,将 f^β 中的每一项用级数 g_l^β 表示出来,其中 l 为项数,也表示本项是 $\dot{q}$ 的 l 次齐次函数,即

$$f^\beta=g_0^\beta+g_1^\beta+g_2^\beta+g_3^\beta+\cdots+g_l^\beta+\cdots$$

$$(\beta=1,\cdots,r). \quad (20)$$

根据 Euler 定理,因为(20)式中每一项是 $\dot{q}$ 的(0,1,2,3,…,l,…)次齐次函数,而且每一项中都有 $\dot{q}^k$ 这一公因子,所以

$$\dot{q}_k\frac{\partial f^\beta}{\partial \dot{q}^k}=\dot{q}_k\frac{\partial g_0^\beta}{\partial \dot{q}^k}+\dot{q}_k\frac{\partial g_1^\beta}{\partial \dot{q}^k}+\cdots+\dot{q}_k\frac{\partial g_l^\beta}{\partial \dot{q}^k}+\cdots$$
$$=0\cdot g_0^\beta+g_1^\beta+2g_2^\beta+\cdots+lg_l^\beta+\cdots$$
$$=g_1^\beta+2g_2^\beta+\cdots+lg_l^\beta+\cdots$$

$$(k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r). \quad (21)$$

对线性非完整约束方程 $f_1^\beta=a_0^\beta+a_k^\beta\dot{q}^k=0$ 来说,上述 Euler 定理是

$$\dot{q}_k\frac{\partial f_1^\beta}{\partial \dot{q}^k}=g_1^\beta=f_1^\beta-a_0^\beta$$

$$(k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r), \quad (22)$$

从而

$$\frac{f_1^\beta-a_0^\beta}{\dot{q}_k}=\frac{\partial f_1^\beta}{\partial \dot{q}_k}$$

$$(k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r). \quad (23)$$

于是,只有在线性非完整系统中,才有满足 Chetaev 条件的 Routh 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\lambda_\beta\frac{\partial f_1^\beta}{\partial \dot{q}_k}$$

$$(k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r). \quad (24)$$

而在其他的非线性非完整系统中,例如约束方程为 $f_2^\beta=a_0^\beta+a_k^\beta\dot{q}^k+\frac{1}{2!}a_{jk}^\beta\dot{q}^j\dot{q}^k=0$ 的系统中就没有同样形式的 Routh 方程.

当然,也可以引入函数 $U^\beta(\dot{q}_k)$,使

$$a_k^\beta+\frac{1}{2!}a_{jk}^\beta\dot{q}^j+\frac{1}{3!}a_{ijk}^\beta\dot{q}^i\dot{q}^j+\cdots=-\frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}$$

$$(i,j,k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r), \quad (25)$$

或

$$U^\beta=-\left(a_k^\beta\dot{q}^k+\frac{1}{2\cdot 2!}a_{jk}^\beta\dot{q}^j\dot{q}^k+\frac{1}{3\cdot 3!}a_{ijk}^\beta\dot{q}^i\dot{q}^j\dot{q}^k+\cdots\right)$$

$$(i,j,k=1,\cdots,m+r;\beta=1,\cdots,r). \quad (26)$$

于是,同样有根据(18)式得到的 Euler 定理

$$\dot{q}^k\frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}=-(f^\beta-a_0^\beta)$$

$$(k = 1,\cdots,m+r;\beta = 1,\cdots,r) \quad (27)$$

及

$$\frac{f^{\beta}-a_0^{\beta}}{\dot{q}_k} = -\frac{\partial U^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}$$

$$(k = 1,\cdots,m+r;\beta = 1,\cdots,r), \quad (28)$$

但是，(28)式中的 $-U^{\beta}(\dot{q}_k)$不是 $f^{\beta}(\dot{q}_k)$，只有在线性非完整系统中它们才是一回事.

结论是："偏导数对 $\dot{q}_k$，变分则对 q_k"，而且"有点怪"的 Chetaev 条件，实际上其偏导数因子来自 Euler 定理中的一个因子；而且其形式仅对线性非完整系统有效. 对非线性非完整系统而言，类似于 Chetaev 条件中的被导函数不再是原来的非完整约束方程，但与它有关联.

4. 非完整系统中的广义约束反力

从(15)式可以看出，以上演绎都是在理想约束条件下进行的. 加在适用于理想完整系统 d'Alembert 原理(1)式上的是

$$-\lambda_{\beta}\frac{\partial U^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}\delta q^k = 0$$

$$(k = 1,\cdots,m+r;\beta = 1,\cdots,r). \quad (29)$$

在理想约束条件下，它表示约束反力必须与广义虚位移 δq^k 相互垂直. 因而由(29)式可知广义约束反力是

$$Q_k = -\lambda_{\beta}\frac{\partial U^{\beta}}{\partial \dot{q}_k} = \lambda_{\beta}\left(a_k^{\beta}+\frac{1}{2!}a_{jk}^{\beta}\dot{q}^j+\frac{1}{3!}a_{ijk}^{\beta}\dot{q}^i\dot{q}^j+\cdots\right)$$

$$(i,j,k = 1,\cdots,m+r;\beta = 1,\cdots,r). \quad (30)$$

显而易见，由 Chetaev 条件得到的

$$\lambda_{\beta}\frac{\partial f^{\beta}}{\partial \dot{q}_k} = \lambda_{\beta}\left(a_k^{\beta}+a_{jk}^{\beta}\dot{q}^j+\frac{1}{2!}a_{ijk}^{\beta}\dot{q}^i\dot{q}^j+\cdots\right)$$

$$(i,j,k = 1,\cdots,m+r;\beta = 1,\cdots,r) \quad (31)$$

决非广义约束反力，尽管 $\lambda_{\beta}\frac{\partial f^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}$与 $-\lambda_{\beta}\frac{\partial U^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}$之间有某种关联. 换言之，所有依赖 Chetaev 条件对非完整系统所作的分析，都是非理想的.

牛青萍[9]利用 Jourdain 原理得到的

$$\lambda_{\beta}\frac{\partial f^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}^k = 0$$

$$(k = 1,\cdots,m+r;\beta = 1,\cdots,r), \quad (32)$$

本意是想证明引入 Chetaev 条件的合理性，现在反而成了证明 $\lambda_{\beta}\frac{\partial f^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}$不是广义约束反力的有力旁证；因为与此因子(不能称之为"力")相互垂直的是广义"虚速度"$\delta\dot{q}^k$ 而并非广义虚位移 δq^k. 也正因为它不是广义约束反力，所以决不能将其加入仅适用于理想完整系统的 d'Alembert 原理(1)式中.

对利用 Gauss 原理得到的

$$\lambda_{\beta}=\frac{\partial f^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}\delta\ddot{q}^k = 0$$

$$(k = 1,\cdots,m+r;\beta = 1,\cdots,r), \quad (33)$$

也可以说同样的话，因为与 $\lambda_{\beta}\frac{\partial f^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}$相互垂直的是广义"虚加速度"$\delta\ddot{q}^k$ 而并非广义虚位移 δq^k. 但是为什么 $\lambda_{\beta}\frac{\partial f^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}$既垂直于广义"虚速度"$\delta\dot{q}^k$ 又垂直于广义"虚加速度"$\delta\ddot{q}^k$ 呢？这又是问题. 难道 Jourdain 原理和 Gauss 原理二者之一有毛病？但不管如何，与 $\lambda_{\beta}\frac{\partial f^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}$相互垂直的决非广义虚位移 δq^k 却是肯定的.

由于，所有依赖 Chetaev 条件对非完整系统所作的分析都是非理想的，所以当然从以满足理想约束方程为首要条件的 d'Alembert 原理和 Hamilton 原理等出发，都是得不到它的.

5. 关于 Vacco 条件

在线性非完整约束系统中，由于 $-U^{\beta}(\dot{q}_k)$就是 $f^{\beta}(\dot{q}_k)$，所以 Vacco 条件(11)式碰巧与 Chetaev 条件(7)式相当. 但是在非线性非完整约束系统中，由于一般情况下(11)式并无非要等于(7)式的理由，所以由 Hamilton 原理得到的 Vacco 条件，与由假设得到的 Chetaev 条件有可能相距甚远. Kozlov[10] 按照变分学中的规范步骤，对非线性非完整约束系统应用 Hamilton 原理，最后得到的是系统的测地轨道方程而并非 Routh 方程.

值得一提的是，在非线性非完整系统中，由(11)式可知，$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f^{\beta}}{\partial \dot{q}_k}\right)$这一项非但不会与另一项 $\left(\frac{\partial f^{\beta}}{\partial q_k}\right)$相抵消(当 $f^{\beta}=f^{\beta}(q_k,\dot{q}_k,t)$时)，反而会出现广义加速度 $\ddot{q}^k$ 因子. 众所周知，在通常的 Lagrange 方程或通常的 Routh 方程等号的右端，是绝不允许

出现广义加速度的.

仅就这些理由就可断定,在非线性非完整约束系统中,Vacco 模型也行不通.

6. 用 Euler 条件统一 Chetaev 条件和 Vacco 条件

正确的做法是,由(27)式出发:

$$\dot{q}^k \frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k} + (f^\beta - a_0^\beta) = 0$$
$$(k = 1,\cdots,m + r ;\beta = 1,\cdots,r), \tag{34}$$

先将(34)式改写成

$$\frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k} \mathrm{d}q^k + (f^\beta - a_0^\beta)\mathrm{d}t = 0$$
$$(k = 1,\cdots,m + r ;\beta = 1,\cdots,r), \tag{35}$$

再将(37)式中的真实位移换成虚位移,即将微分换成变分,并考虑到等时变分条件 $\delta t = 0$,有

$$\frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}\delta q^k = 0\ (k = 1,\cdots,m + r ;\beta = 1,\cdots,r). \tag{36}$$

(36)式由于来自 Euler 定理,所以被称为" Euler 条件 ".

用 Lagrange 未定乘数法,以时间 t 的任意函数 $\lambda_\beta(t)$ 标乘(36)式,然后在(1)式中加上它们的标积,便可得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \lambda_\beta \frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q^k = 0$$
$$(k = 1,\cdots,m + r ;\beta = 1,\cdots,r). \tag{37}$$

选择 $\lambda_\beta(t)$,使不独立的 r 个虚位移前的系数为零,因而其余 m 个独立的虚位移前的系数亦为零了.于是,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\lambda_\beta \frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}$$
$$(k = 1,\cdots,m + r ;\beta = 1,\cdots,r). \tag{38}$$

将(38)式与非线性非完整约束方程(13)式联立,便可得到非线性非完整系统的 Routh 方程组.

另外,当 $f^\beta = f^\beta(q_k, \dot{q}_k, t)$ 亦即相当于 $U^\beta = U^\beta(q_k, \dot{q}_k, t)$ 时,若令

$$\delta\int(\lambda_\beta U^\beta)\mathrm{d}t = 0\ (\beta = 1,\cdots,r), \tag{39}$$

则可得

$$\lambda_\beta\left(\frac{\partial U^\beta}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q^k - \dot{\lambda}_\beta\left(\frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}\delta q^k\right) = 0$$
$$(k = 1,\cdots,m + r ;\beta = 1,\cdots,r). \tag{40}$$

将 Euler 条件代入其中,有

$$\frac{\partial U^\beta}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k} = 0$$
$$(k = 1,\cdots,m + r ;\beta = 1,\cdots,r), \tag{41}$$

然后,取(39)式用于 Hamilton 原理

$$\delta\int(L - \lambda_\beta U^\beta)\mathrm{d}t = 0\ (\beta = 1,\cdots,r) \tag{42}$$

便可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\dot{\lambda}_\beta \frac{\partial U^\beta}{\partial \dot{q}_k}$$
$$(k = 1,\cdots,m + r ;\beta = 1,\cdots,r). \tag{43}$$

而(43)式与(38)式没有本质上的区别.于是,用 Euler 条件统一了 Chetaev 条件和 Vacco 条件.而且,因为使用了 Euler 条件,也使非线性非完整系统中的 d 'Alembert 原理和 Hamilton 原理得到了统一.

7. 结论和讨论

A.对于一类可展开成 MacLaurin 级数的非线性非完整约束方程,可以仿照处理线性非完整约束方程的方案,用 Lagrange 未定乘数法和 d 'Alembert 原理,建立起对于非线性非完整系统有效的 Routh 方程.在整个建立 Routh 方程的过程中,非线性非完整约束都是理想的.

B.从建立非线性非完整系统 Routh 方程的过程中可以看到,一般来说 Chetaev 条件并不成立. Chetaev 条件的成立,仅对线性非完整系统碰巧有效,而且看上去是专为线性非完整系统满足理想约束条件所设计的.

C.也只有在线性非完整系统中,Vacco 条件才与 Chetaev 条件碰巧相当.而在较一般的非线性非完整系统中,二者可能相距甚远.

D.建立在 Chetaev 条件之上的非完整系统中的广义约束反力,并不与广义虚位移相互垂直,因而 Chetaev 约束是非理想的.只有建立在所谓' Euler 条件 '之上的非完整系统中的广义约束反力,才与广义虚位移相互垂直,所以只有" Euler 约束 "才是理想的.

E.所谓' Euler 条件 ',是来自 Euler 定理的一个最自然的约束条件.用" Euler 条件 ",可以统一 Chetaev 条件和 Vacco 条件,从而在非线性非完整系统中(当然包括在线性非完整系统中)无论是用 d 'Alembert原理还是用 Hamilton 原理,都能建立起具有统一形式的 Routh 方程.

F.尽管本文赖以讨论的基础是一类可展开为

MacLaurin 级数的非线性非完整约束方程的特殊情况，但本文的结果具有普遍意义. 实际上，只要能找到不仅与非线性约束方程有关联而且满足 Euler 定理的 Euler 函数 U^{β}，则其他所有非线性非完整系统的 Routh 方程都可以被正确地得到.

G. 本文引入 Euler 条件和 Euler 函数的方法，不仅对非线性非完整系统有效，而且对摩擦力与广义速度成非线性关系的耗散力学问题也有效.

[1] Shen H C 2002 *Acta Mech*. *Sin*. **34**(Supplement) 234(in Chinese) [沈惠川 2002 力学学报 **34**(增刊) 234]

[2] Shen H C 2003 *J*. *Beijing Inst*. *Technol*. **23** 671(in Chinese) [沈惠川 2003 北京理工大学学报 **23** 671]

[3] Shen H C 2003 *Chinese Quarterly of Mechanics* **24** 462(in Chinese) [沈惠川 2003 力学季刊 **24** 462]

[4] Shen H C 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 26(in Chinese) [沈惠川 2005 物理学报 **54** 26]

[5] Mei F X 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1207(in Chinese) [梅凤翔 2000 物理学报 **49** 1207]

[6] Qiao Y F and Zhao S H 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 805(in Chinese) [乔永芬、赵淑红 2001 物理学报 **50** 805]

[7] Mei F X 1985 *Fundamentals of Mechanics for Nonholonomic Systems* (Beijing: Press of Beijing Engineering Institute) (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整系统力学基础(北京：北京工业学院出版社)]

[8] Liang L F 2000 *Advances in Mechanics* **30** 358(in Chinese) [梁立孚 2000 力学进展 **30**: 358]

[9] Niu Q P 1964 *Acta Mech*. *Sin*. **7** 139(in Chinese) [牛青萍 1964 力学学报 **7** 139]

[10] Kozlov V V 1982 *Journal of Moscow University* (Mathematics and Mechanics), (4) 70(in Russian)

Routh equation of nonholonomic dynamical systems: from Chetaev condition to Euler condition

Shen Hui-Chuan†

(*Center for Statistical Mechanics*, *Department of Astronomy and Applied Physics*, *University of Science and Technology of China*, *Hefei* 230026, *China*)

(Received 5 July 2004; revised manuscript received 13 November 2004)

Abstract

The Routh equation of a nonholonomic system with a nonlinear constraint equation that is expandable to MacLaurin progression on generalized velocity, can be obtained by Lagrangian multiplier method and d'Alembert principle in an ideal constraint condition. Chetaev condition is valid in linear nonholonomic system only, and is eguivalent to Vacco condition. The so-called "Euler condition" can unite Chetaev condition and Vacco condition, can unite d'Alembert principle and Hamilton principle, and can resolve all existing problems in nonlinear nonholonomic system.

Keywords: nonlinear nonholonomic system, Routh equation, Chetaev condition, Vacco conditian, Euler condition

PACC: 0320

* Project supported by the Foundation of the National Training Base for Science Talents.

† E-mail: shenhuichuan@ustc.edu