第 54 卷 第 6 期 2005 年 6 月
1000-3290/2005/54(06)/2478-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.6, June, 2005

质量变化对力学系统形式不变性和守恒量的影响*

葛伟宽
(湖州师范学院理学院，湖州 313000)

(2004 年 8 月 31 日收到；2004 年 11 月 2 日收到修改稿)

研究质量变化对力学系统形式不变性和守恒量的影响. 给出常质量系统和变质量系形式不变性的判据方程. 比较两个判据方程得到质量变化时形式不变性仍保持的条件. 给出两个系统有同样守恒量的条件. 举例说明结果的应用.

关键词：分析力学，变质量系统，形式不变性，守恒量
PACC：0320

1. 引 言

力学系统守恒量的研究具有重要理论意义和实际价值. 用群的无限小变换下的不变性(对称性)来研究守恒量是一个近代方法. 用对称性方法可以找到用经典方法找不到的守恒量. 目前有三种主要方法，即 Noether 对称性，Lie 对称性和形式不变性. Noether 对称性方法已日趋完善[1—3]，Lie 对称性方法已经取得重要进展[2—7]. 近年又研究了形式不变性[8—12]. 本文研究质量变化对形式不变性的影响. 结果表明，当系统质点的质量发生变化时，原来的形式不变性和原来的守恒量在一定条件下可保持不变.

2. 常质量系统的形式不变性

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s\ (s=1,\cdots,n)$ 来确定. 系统的运动微分方程表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s\quad (s=1,\cdots,n),\tag{1}$$

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数，$Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力. 假设系统非奇异，则可由方程(1)可解出所有的广义加速度，记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}).\tag{2}$$

引进群的无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\tag{3}$$

其中 ε 为无限小参数，ξ_0,ξ_s 为无限小生成元. 系统(1)形式不变性的判据方程为

$$E_s\{X^{(1)}(L)\}=X^{(1)}(Q_s),\tag{4}$$

其中

$$E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s},$$
$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+(\dot{\xi}-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s},\tag{5}$$

式(4)也可以表为

$$\tilde{E}_s\{\tilde{X}^{(1)}(L)\}=\tilde{X}^{(1)}(Q_s),\tag{6}$$

其中

$$\tilde{X}^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s},$$
$$\tilde{E}_s=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s},$$
$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}.\tag{7}$$

3. 变质量系统的形式不变性

现在假设方程(1)中的质点质量是可变的，有

$$m_i=m_i(t,\boldsymbol{q}),\tag{8}$$

* 国家自然科学基金(批准号：10272021)资助的课题.

则运动微分方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_s}=\widetilde{Q}_s+\widetilde{P}_s,\tag{9}$$

其中

$$\widetilde{L}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=L(m_i(t,\boldsymbol{q}),t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$

$$\widetilde{Q}_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=Q_s(m_i(t,\boldsymbol{q}),t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}).\tag{10}$$

而广义反推力为

$$\widetilde{P}_s=\dot{m}_i(\boldsymbol{u}_i+\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial m_i}{\partial q_s},\tag{11}$$

这里 $m_i,\boldsymbol{r}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 分别为第 i 个质点的质量,矢径和速度,$\boldsymbol{u}_i$ 为微粒相对第 i 个质点的相对速度.方程(9)形式不变性的判据方程为

$$E_s\{X^{(1)}(\widetilde{L})\}=X^{(1)}(\widetilde{Q}_s+\widetilde{P}_s)\quad(s=1,2,\cdots,n),\tag{12}$$

它亦可表为形式

$$\widetilde{E}_s\{\widetilde{X}^{(1)}(\widetilde{L})\}=\widetilde{X}^{(1)}(\widetilde{Q}_s+\widetilde{P}_s).\tag{13}$$

4. 质量改变时对系统形式不变性的影响

注意到

$$X^{(1)}(\widetilde{L})=X^{(1)}(L)+\frac{\partial L}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial q_s}\xi_s,$$

$$X^{(1)}(\widetilde{Q}_s)=X^{(1)}(Q_s)+\frac{\partial Q_s}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial Q_s}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial q_k}\xi_k,\tag{14}$$

比较方程(12)和方程(4),得到

判据 1　如果 ξ_0,ξ_s 是质量不变时的形式不变性生成元,且满足如下条件

$$\begin{gathered}\frac{\partial L}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial q_s}\xi_s=0,\\ \frac{\partial Q_s}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial Q_s}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial q_k}\xi_k=0,\\ (s,k=1,\cdots,n),\\ X^{(1)}(\widetilde{P}_s)=0,\end{gathered}\tag{15}$$

那么,当质量改变时,形式不变性将保持.

比较方程(13)和方程(6),得到

判据 2　如果 ξ_0,ξ_s 是质量不变时的形式不变性生成元,且满足如下条件

$$\begin{gathered}\frac{\partial L}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial q_s}\xi_s=0,\\ \frac{\partial Q_s}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial Q_s}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial q_k}\xi_k=0,\\ \widetilde{X}^{(1)}(\widetilde{P}_s)=0,\end{gathered}\tag{16}$$

则当质量改变时,形式不变性将保持.

5. 质量改变时对守恒量的影响

对方程(1),如果存在规范函数 $G_{\mathrm{N}}=G_{\mathrm{N}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足如下 Noether 等式

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_{\mathrm{N}}=0,\tag{17}$$

则系统有 Noether 守恒量

$$I_{\mathrm{N}}=L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_{\mathrm{N}}=\mathrm{const}.\tag{18}$$

对方程(9),如果存在规范函数 $G_{\mathrm{N}}=G_{\mathrm{N}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足 Noether 等式

$$\widetilde{L}\dot{\xi}_0+X^{(1)}(\widetilde{L})+(\widetilde{Q}_s+\widetilde{P}_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{\widetilde{G}}_{\mathrm{N}}=0,\tag{19}$$

则系统有 Noether 守恒量

$$\widetilde{I}_N=\widetilde{L}\xi_0+\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\widetilde{G}_{\mathrm{N}}=\mathrm{const}.\tag{20}$$

比较(20)式和(18)式,得到

判据 3　如果广义反推力 $\widetilde{P}_s$ 和无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足

$$\widetilde{P}_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=0,\tag{21}$$

则当质量发生变化时,Noether 守恒量中除规范函数外的部分仍保持.特别地,当 $\widetilde{G}_{\mathrm{N}}=G_{\mathrm{N}}$ 时,Noether 守恒量仍保持.

6. 算　例

二自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(t)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),\tag{22}$$

质量变化规律为

$$m=m_0[1+\exp(-\alpha t)]\quad(m_0>0,\alpha>0),\tag{23}$$

非势广义力为

$$Q_1=0,Q_2=\dot{q}_2+q_1\dot{q}_1,\tag{24}$$

并设微粒分离的绝对速度为零.试研究质量变化对系统形式不变性和 Noether 守恒量的影响.

首先,假设质量不变,此时有

$$X^{(1)}(L)=m\{\dot{q}_1(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)+\dot{q}_2(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)\},$$

$$X^{(1)}(Q_1)=0,$$

$$X^{(1)}(Q_2)=\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0+\dot{q}_1\xi_1+q_1(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0).$$

取生成元为

$$\xi_0=\xi_1=0,\xi_2=1, \tag{25}$$

则有

$$X^{(1)}(L)=X^{(1)}(Q_1)=X^{(1)}(Q_2)=0. \tag{26}$$

因此,生成元(25)是常质量系统的形式不变性生成元.由假设微粒分离的绝对速度为零,且质量不依赖于坐标,由(11)式得

$$P_1=P_2=0, \tag{27}$$

因此,(15)式和(16)式满足.由判据 1 或判据 2 知,当考虑质量变化时,生成元(25)仍是形式不变性的.

由(17)式可找到质量不变时的规范函数

$$G_N=-q_2-\frac{1}{2}q_1^2, \tag{28}$$

而 Noether 守恒量(18)式给出

$$I_N=m\dot{q}_2-q_2-\frac{1}{2}q_1^2=\text{const}. \tag{29}$$

注意到

$$X^{(1)}(\tilde{L})=X^{(1)}(L)+\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)\frac{\partial m}{\partial t}\xi_0, \tag{30}$$

将(25)式代入(29)式,得

$$X^{(1)}(\tilde{L})=X^{(1)}(L).$$

由(19)式可找到质量变化时的规范函数

$$\tilde{G}_N=G_N. \tag{31}$$

由判据 3 知,考虑质量变化时仍有 Noether 守恒量(29).

7. 结 论

当质量发生变化时,力学系统的形式不变性与守恒量会发生变化.本文的结果表明,在一定条件下(判据 1,2)形式不变性可保持不变,而在一定条件下(判据 3)守恒量可保持一部分不变或全部不变.

[1] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press)(in Chinese)[李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社)]

[2] Zhao Y Y and Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press)(in Chinese)[赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量(北京:科学出版社)]

[3] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press)(in Chinese)[梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)]

[4] Mei F X 2000 *Acta Mech*. **141** 135

[5] Zhang R C, Chen X W and Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 12

[6] Fu J L and Chen L Q 2003 *Phys*. *Lett* A **317** 255

[7] Mei F X 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1048(in Chinese)[梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[8] Mei F X 2000 *J*. *Beijing Institute of Technology* **9** 120

[9] Wang S Y and Mei F X 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 5

[10] Lou Z M 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2046(in Chinese)[楼智美 2004 物理学报 **53** 2046]

[11] Luo S K, Guo Y X and Mei F X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2418 (in Chinese)[罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2418]

[12] Qiao Y F, Zhao S H and Li R J 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 292

Effects of mass variation on form invariance and conserved quantity of mechanical systems*

Ge Wei-Kuan

(*School of Science*, *Huzhou Teachers College*, *Huzhou* 313000, *China*)

(Received 31 August 2004; revised manuscript received 2 November 2004)

Abstract

The effects of mass variation on form invariance and conserved quantity of mechanical systems are studied. The criterion of the form invariance for constant mass and variable mass systems is given. By comparing the two criterion equations, the condition under which the form invariance is kept is obtained. The condition under which two systems possess the same conserved quantity is also given. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: analytical mechanics, variable mass system, form invariance, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10272021).