第 54 卷 第 6 期 2005 年 6 月
1000-3290/2005/54(06)/2514-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.6, June, 2005


# 推广的投影 Riccati 方程法及其应用

雍雪林† 张鸿庆

(大连理工大学应用数学系,大连 116024)

(2004 年 9 月 30 日收到;2004 年 11 月 18 日收到修改稿)

将求非线性发展方程精确解的投影 Riccati 方程法给以推广,并借助符号计算软件 Maple 求出了 Whitham-Broer-Kaup 方程的新的精确解.

**关键词:**投影 Riccati 方程法, Whitham-Broer-Kaup 方程, 孤波解

**PACC:**0340K, 0290

## 1. 引 言

在研究非线性物理现象中,寻找非线性发展方程(NEEs)的行波解起着非常重要的作用.近年来,随着符号计算软件的发展,利用计算机直接求解变得切实可行,并出现了许多行之有效的方法.1992 年,Conte 和 Musette[1] 提出了一种投影 Riccati 方程法来寻找 NEEs 的新的孤波解,这些解通常是两个初等函数的多项式,而这两个初等函数满足投影 Riccati 方程[2].这种方法已经被用来求解许多方程的孤波解[1—10].文献[10]的作者改进了此方法,本文我们将作进一步的推广,并用推广的方法求解一些 NEEs,得到了更多形式的孤波解和周期解.

## 2. 推广的投影 Riccati 方程法

下面简单介绍一下我们的方法.

步骤(A):对一个给定的非线性发展方程(组)(不妨设自变量为 $x,t$):

$$H(u,u_t,u_x,u_{xt},\cdots)=0, \tag{1}$$

首先作行波变换

$$u(x,t)=u(\xi),\xi=x-\lambda t, \tag{2}$$

其中 $\lambda$ 为波速,则得一常微分方程(组)

$$G(u,u'(\xi),u''(\xi),\cdots)=0, \tag{3}$$

这里′表示$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$.

步骤(B):设(A)中得到的常微分方程(组)(3)的解为:

$$u(\xi)=\sum_{i=1}^{n}f^{i-1}(\xi)(a_if(\xi)+b_ig(\xi))+a_0. \tag{4}$$

其中 $n$ 是一个待定常数,它可以通过平衡最高阶导数项和非线性项得到[11],而 $f(\xi),g(\xi)$ 是下述双投影 Riccati 方程的非零解,

$$f'(\xi)=pf(\xi)g(\xi), \tag{5a}$$

$$g'(\xi)=q+pg^2(\xi)-rf(\xi), \tag{5b}$$

其中 $p,q,r$ 是实常数且 $p\neq0,q\neq0$.

需要注意的是在方程组(5)中 $f$ 和 $g$ 有这样一个关系,即:

$$g^2=-\frac{1}{p}\left[q-2rf+\frac{(r^2+\delta)}{q}f^2\right]\quad(\delta=\pm1). \tag{6}$$

基于上述关系和文献[12],我们给出方程组(5)的如下形式解:

$$f_1(\xi)=\frac{\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{\frac{r}{q}\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l}\quad(pq<0), \tag{7a}$$

$$g_1(\xi)=-\frac{\sqrt{-pq}}{p}\frac{k+l\tanh(\sqrt{-pq}\xi)}{\frac{r}{q}\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l}\quad(pq<0), \tag{7b}$$

† E-mail: yongxuelin2003@yahoo.com.cn

$$f_2(\xi)=\frac{\sec(\sqrt{pq}\xi)}{\frac{r}{q}\sec(\sqrt{pq}\xi)+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l}\quad(pq>0),\tag{7c}$$

$$g_2(\xi)=-\frac{\sqrt{pq}}{p}\frac{k-l\tan(\sqrt{pq}\xi)}{\frac{r}{q}\sec(\sqrt{pq}\xi)+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l}\quad(pq>0),\tag{7d}$$

其中式(7a),(7b)中 $k$ 和 $l$ 满足

$$q^2k^2=q^2l^2+\delta\quad(\delta=\pm1),\tag{8a}$$

而式(7c),(7d)中的 $k$ 和 $l$ 满足：

$$q^2k^2=-(q^2l^2+\delta)\quad(\delta=\pm1).\tag{8b}$$

步骤(C) 将式(4)连同方程组(5)代入方程(3),并搜集 $f^i(\xi)g^j(\xi)(i=0,1,\cdots n,j=0,1)$ 的各项系数,然后令这些系数为 0,就得到了一个关于变量 $a_0,a_i,b_i,\lambda(i=1,\cdots,n)$ 的超定代数方程组.

步骤(D):利用 Wu 方法[13] 和符号计算语言 Maple 求解上超定方程组,得到 $a_0,a_i,b_i,\lambda(i=1,\cdots,n)$ 的若干解.

步骤(E) 把步骤(D)中得到的各组解连同解组(7)代回式 (4)和式 (2)就得到了原方程组(1)的精确解.

**注 1** 当 $p=-1,q=1$,方程组(5)为文献[1,6]中的形式,而当 $p=\pm1$ 且 $q\neq0$ 时,方程组(5)即为文献[3]中的形式.所以这里推广的方法具有更强的一般性,于是也就有可能得出更多形式的解(至少包含上述文献中所给出的各组解).

下面我们将应用推广的方法来具体求解 Whitham-Broer-Kaup(WBK)方程.

## 3. 应　　用

作为一个例子,文中我们来具体研究 WBK 方程[14—17]

$$u_t+uu_x+v_x+\beta u_{xx}=0,\tag{9a}$$

$$v_t+u_xv+uv_x+\alpha u_{xxx}-\beta v_{xx}=0,\tag{9b}$$

其中 $\alpha,\beta\neq0$ 是任意常数.当 $\alpha,\beta$ 取不同值时,方程组(9)包含了许多重要的数学物理方程,例如描写浅水波耗散系统的长波方程($\alpha=0,\beta\neq0$)[18] 和形变 Boussinesq 方程($\alpha=1,\beta=0$)[19].首先对方程组(9)作行波变换 $u=u(\xi),\xi=x-\lambda t$ 得：

$$-\lambda u_x+uu_x+v_x+\beta u_{xx}=0,\tag{10a}$$

$$-\lambda v_x+uv_x+u_xv+\alpha u_{xxx}-\beta v_{xx}=0.\tag{10b}$$

由齐次平衡法[11] 可设上述方程组的解为：

$$u=a_0+a_1f(\xi)+a_2f^2(\xi),\tag{11a}$$

$$v=b_0+b_1f(\xi)+b_2g(\xi)+b_3f^2(\xi)+b_4f(\xi)g(\xi).\tag{11b}$$

将(11)式连同(5)式,(6)式代入方程(10)并搜集相应的各项系数就得到了一个超定代数方程组,此处限于篇幅我们略去该方程组.利用 Maple 可求得这个方程组的如下若干组解.

(1)当 $r^2+\delta=0$,即 $\delta=-1,r^2=1$ 时有解,

$$a_0=\lambda,a_1=b_2=b_3=b_4=0,a_2=\pm\frac{p}{r}\sqrt{\alpha+\beta^2},$$
$$b_0=0,b_1=\mp p\beta\sqrt{\alpha+\beta^2}-\frac{p(\alpha+\beta^2)}{r},\lambda=\lambda.\tag{12}$$

(2) 当 $r^2+\delta\neq0$ 时有解,

(2.1)：

$$a_0=a_0,a_1=\pm2\sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}}$$
$$a_2=b_2=0,b_0=\frac{pq\delta(\beta^2+\alpha)}{r^2+\delta},b_1=-2rp(\beta^2+\alpha),$$
$$b_3=\frac{2p(\beta^2\delta+\beta^2r^2+\alpha\delta+\alpha r^2)}{q},b_4=\mp2\beta p\sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}},\tag{13}$$
$$\lambda=-\frac{1}{\sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}}}\left(\mp a_0\sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}}+p\beta^2r+p\alpha r\right).$$

(2.2)：

$$a_0=\lambda,a_1=\mp\sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}},a_2=p\sqrt{\beta^2+\alpha},b_1=-rp\left(\beta\sqrt{\beta^2+\alpha}+\beta^2+\alpha\right),$$

$$b_0=b_2=0,b_3=\frac{p\left(\beta r^2\sqrt{\beta^2+\alpha}+\delta\beta\sqrt{\beta^2+\alpha}+(\alpha+\beta^2)(r^2+\delta)\right)}{q},\tag{14}$$

$$b_4=\pm p\sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}}\sqrt{\beta^2+\alpha}\pm p\beta\sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}},\lambda=\lambda.$$

(2.3):

$$a_0=a_0,a_1=\pm\sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}},a_2=-p\sqrt{\beta^2+\alpha},b_1=-rp\left(-\beta\sqrt{\beta^2+\alpha}+\beta^2+\alpha\right),$$

$$b_0=b_2=0,b_3=\frac{p\left(-\beta r^2\sqrt{\beta^2+\alpha}-\delta\beta\sqrt{\beta^2+\alpha}+(\alpha+\beta^2)(r^2+\delta)\right)}{q},\tag{15}$$

$$b_4=\pm p\sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}}\sqrt{\beta^2+\alpha}\mp p\beta\sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}},\lambda=a_0.$$

由以上各组解的情况和(7)式即可求得 WBK 方程的以下几组解.

对解(1)来说,当 $pq<0$ 时有解,

$$u_{11}=a_0\pm\sqrt{\alpha+\beta^2}\sqrt{-pq}\,\frac{k+l\tanh(\sqrt{-pq}\xi)}{\frac{r\mathrm{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{q}+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l},\tag{16a}$$

$$v_{11}=-p\left(\mp\beta\sqrt{\alpha+\beta^2}+\alpha+\beta^2\right)\frac{\mathrm{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{\frac{r\mathrm{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{q}+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l},\tag{16b}$$

其中 $\xi=x-\lambda t$,而 $a_0,\alpha,\beta\neq0,p\neq0,q\neq0,\lambda$ 是任意常数,且满足 $q^2k^2=q^2l^2-1$.

当 $pq>0$ 时有解,

$$u_{12}=a_0\pm\sqrt{\alpha+\beta^2}\sqrt{pq}\,\frac{k-l\tan(\sqrt{pq}\xi)}{\frac{r\sec(\sqrt{pq}\xi)}{q}+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l},\tag{17a}$$

$$v_{12}=-p\left(\mp\beta\sqrt{\alpha+\beta^2}+\alpha+\beta^2\right)\frac{\sec(\sqrt{pq}\xi)}{\frac{r\sec(\sqrt{pq}\xi)}{q}+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l},\tag{17b}$$

其中 $\xi=x-\lambda t$,而 $a_0,\alpha,\beta\neq0,p\neq0,q\neq0,\lambda$ 是任意常数,且满足 $q^2k^2=-(q^2l^2-1)$.

对解(2.1)来说,当 $pq<0$ 时有解,

$$u_{21}=a_0\pm2\sqrt{\frac{-p(\alpha+\beta^2)(\delta+r^2)}{q}}\,\frac{\mathrm{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{\frac{r\mathrm{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{q}+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l},\tag{18a}$$

$$\begin{aligned}v_{21}=&\frac{q\delta p(\alpha+\beta^2)}{r^2+\delta}-2rp(\alpha+\beta^2)\frac{\mathrm{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{\frac{r\mathrm{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{q}+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l}\\&+\frac{2p(r^2\beta^2+\beta^2\delta+\alpha\delta+\alpha r^2)}{q}\frac{\mathrm{sech}^2(\sqrt{-pq}\xi)}{\left(\frac{r\mathrm{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{q}+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l\right)^2}\\&\pm2\beta\sqrt{p^2(r^2+\delta)(\alpha+\beta^2)}\frac{\mathrm{sech}(\sqrt{-pq}\xi)(k+l\tanh(\sqrt{-pq}\xi))}{\left(\frac{r\mathrm{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{q}+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l\right)^2},\end{aligned}\tag{18b}$$

其中 $\xi=x+\frac{1}{\sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}}}\left(\mp a_0\sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}}+p\beta^2r+p\alpha r\right)t$,而 $a_0,\alpha,\beta\neq0,p\neq0,q\neq0$

是任意常数,且满足 $q^2k^2 = q^2l^2 + \delta(\delta = \pm 1)$.

当 $pq > 0$ 时有解,

$$u_{22} = a_0 \pm 2\sqrt{\frac{-p(\alpha+\beta^2)(\delta+r^2)}{q}}\frac{\sec(\sqrt{pq}\xi)}{\frac{r\sec(\sqrt{pq}\xi)}{q}+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l}, \tag{19a}$$

$$\begin{aligned}v_{22} = {} & \frac{q\delta p(\alpha+\beta^2)}{r^2+\delta} - 2rp(\alpha+\beta^2)\frac{\sec(\sqrt{pq}\xi)}{\frac{r\sec(\sqrt{pq}\xi)}{q}+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l} \\ & + \frac{2p(r^2\beta^2+\beta^2\delta+\alpha\delta+\alpha r^2)}{q}\frac{\sec^2(\sqrt{pq}\xi)}{\left(\frac{r\sec(\sqrt{pq}\xi)}{q}+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l\right)^2} \\ & \pm 2\beta\sqrt{-p^2(r^2+\delta)(\alpha+\beta^2)}\frac{\sec(\sqrt{pq}\xi)(k-l\tan(\sqrt{pq}\xi))}{\left(\frac{r\sec(\sqrt{pq}\xi)}{q}+k\tan(\sqrt{-pq}\xi)+l\right)^2},\end{aligned} \tag{19b}$$

其中 $\xi = x + \frac{1}{\sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}}}\left(\mp a_0\sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}} + p\beta^2r + p\alpha r\right)t$,而 $a_0, \alpha, \beta \neq 0, p \neq 0, q \neq 0$ 是任意常数,且满足 $q^2k^2 = -(q^2l^2+\delta)(\delta = \pm 1)$.

对解(2.2)来说,当 $pq < 0$ 时有解,

$$\begin{aligned}u_{23} = {} & \lambda \mp \sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}}\frac{\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{\frac{r\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{q}+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l} \\ & - \sqrt{-pq}\sqrt{\beta^2+\alpha}\frac{k+l\tanh(\sqrt{-pq}\xi)}{\frac{r\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{q}+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l},\end{aligned} \tag{20a}$$

$$\begin{aligned}v_{23} = {} & -rp\left(\beta\sqrt{\beta^2+\alpha}+\beta^2+\alpha\right)\frac{\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{\frac{r\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{q}+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l} \\ & + \frac{p\left(\beta r^2\sqrt{\beta^2+\alpha}+\delta\beta\sqrt{\beta^2+\alpha}+(\alpha+\beta^2)(r^2+\delta)\right)}{q}\frac{\operatorname{sech}^2(\sqrt{-pq}\xi)}{\left(\frac{r\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{q}+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l\right)^2} \\ & \mp\sqrt{p^2(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta}\left(\sqrt{\beta^2+\alpha}+\beta\right)\frac{\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)(k+l\tanh(\sqrt{-pq}\xi))}{\left(\frac{r\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{q}+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l\right)^2},\end{aligned} \tag{20b}$$

其中 $\xi = x - \lambda t$,而 $\alpha, \beta \neq 0, p \neq 0, q \neq 0, \lambda$ 是任意常数,且满足 $q^2k^2 = q^2l^2 + \delta(\delta = \pm 1)$.

当 $pq > 0$ 时有解,

$$\begin{aligned}u_{24} = {} & \lambda \mp \sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}}\frac{\sec(\sqrt{pq}\xi)}{\frac{r\sec(\sqrt{pq}\xi)}{q}+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l} \\ & - \sqrt{pq}\sqrt{\beta^2+\alpha}\frac{k-l\tan(\sqrt{pq}\xi)}{\frac{r\sec(\sqrt{pq}\xi)}{q}+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l},\end{aligned} \tag{21a}$$

$$v_{24} = -rp\left(\beta\sqrt{\beta^2+\alpha}+\beta^2+\alpha\right)\frac{\sec(\sqrt{pq}\xi)}{\frac{r\sec(\sqrt{pq}\xi)}{q}+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l}$$

$$+\frac{p\left(\beta r^2\sqrt{\beta^2+\alpha}+\delta\beta\sqrt{\beta^2+\alpha}+(\alpha+\beta^2)(r^2+\delta)\right)}{q}\frac{\sec^2(\sqrt{pq}\xi)}{\left(\frac{r\sec(\sqrt{pq}\xi)}{q}+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l\right)^2}$$

$$\mp\sqrt{p^2(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}\left(\sqrt{\beta^2+\alpha}+\beta\right)\frac{\sec(\sqrt{pq}\xi)(k-l\tan(\sqrt{pq}\xi))}{\left(\frac{r\sec(\sqrt{pq}\xi)}{q}+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l\right)^2},\tag{21b}$$

其中 $\xi=x-\lambda t$，而 $\alpha$，$\beta\neq0$，$p\neq0$，$q\neq0$，$\lambda$ 是任意常数，且满足 $q^2k^2=-(q^2l^2+\delta(\delta=\pm1)$.

对解(2.3)来说，当 $pq<0$ 时有解，

$$u_{25}=a_0\pm\sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}}\frac{\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{\frac{r\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{q}+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l}$$

$$+\sqrt{-pq}\sqrt{\beta^2+\alpha}\frac{k+l\tanh(\sqrt{-pq}\xi)}{\frac{r\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{q}+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l},\tag{22a}$$

$$v_{25}=-rp\left(\beta\sqrt{\beta^2+\alpha}+\beta^2+\alpha\right)\frac{\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{\frac{r\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{q}+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l}$$

$$-\frac{p\left(-\beta r^2\sqrt{\beta^2+\alpha}-\delta\beta\sqrt{\beta^2+\alpha}+(\alpha+\beta^2)(r^2+\delta)\right)}{q}\frac{\operatorname{sech}^2(\sqrt{-pq}\xi)}{\left(\frac{r\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{q}+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l\right)^2}$$

$$\mp\sqrt{p^2(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta}\left(\sqrt{\beta^2+\alpha}-\beta\right)\frac{\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)(k+l\tanh(\sqrt{-pq}\xi))}{\left(\frac{r\operatorname{sech}(\sqrt{-pq}\xi)}{q}+k\tanh(\sqrt{-pq}\xi)+l\right)^2},\tag{22b}$$

其中 $\xi=x-a_0t$，而 $a_0$，$\alpha$，$\beta\neq0$，$p\neq0$，$q\neq0$ 是任意常数，且满足 $q^2k^2=q^2l^2+\delta(\delta=\pm1)$.

当 $pq>0$ 时有解，

$$u_{26}=a_0\pm\sqrt{-\frac{p(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}{q}}\frac{\sec(\sqrt{pq}\xi)}{\frac{r\sec(\sqrt{pq}\xi)}{q}+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l}$$

$$+\sqrt{pq}\sqrt{\beta^2+\alpha}\frac{k-l\tan(\sqrt{pq}\xi)}{\frac{r\sec(\sqrt{pq}\xi)}{q}+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l},\tag{23a}$$

$$v_{26}=-rp\left(\beta\sqrt{\beta^2+\alpha}+\beta^2+\alpha\right)\frac{\sec(\sqrt{pq}\xi)}{\frac{r\sec(\sqrt{pq}\xi)}{q}+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l}$$

$$-\frac{p\left(-\beta r^2\sqrt{\beta^2+\alpha}-\delta\beta\sqrt{\beta^2+\alpha}+(\alpha+\beta^2)(r^2+\delta)\right)}{q}\frac{\sec^2(\sqrt{pq}\xi)}{\left(\frac{r\sec(\sqrt{pq}\xi)}{q}+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l\right)^2}$$

$$\mp\sqrt{p^2(\beta^2+\alpha)(r^2+\delta)}\left(\sqrt{\beta^2+\alpha}-\beta\right)\frac{\sec(\sqrt{pq}\xi)(k-l\tan(\sqrt{pq}\xi))}{\left(\frac{r\sec(\sqrt{pq}\xi)}{q}+k\tan(\sqrt{pq}\xi)+l\right)^2},\tag{23b}$$

其中 $\xi=x-a_0t$，而 $a_0$，$\alpha$，$\beta\neq0$，$p\neq0$，$q\neq0$ 是任意常数，且满足 $q^2k^2=-(q^2l^2+\delta)(\delta=\pm1)$.

注 2 :据我们所知，在以前对 WBK 方程的研究中并没有得出上述形式解，特别是当 $k^2+l^2\neq0$ 时.于是，我们不仅可以根据 $\alpha$ 和 $\beta$ 选择不同的方程，而且还可以依据关系式 $q^2k^2=\pm(q^2l^2+\delta)(\delta=\pm1)$ 选择不同的 $k$ 和 $l$，这样就得到了一类非线性发展方程更多形式的精确解，其中包括周期解，孤波解和

类孤波解. 这也正是我们推广原方法的目的所在.

## 4. 总　结

文中我们应用推广的 Riccati 方程展开法研究了 Whitham-Broer-Kaup(WBK)方程,求出了许多新形式的精确解. 此外,推广的方法还可以用来求解更多非线性发展方程的行波解. 我们会在以后的工作中对此进行说明.


[1] Conte R and Musette M 1992 *J. Phys. A: Math, Gen.* **25** 2609

[2] Bountis T C *et al* 1986 *J. Math. Phys.* **27** 1215

[3] Zhang G X *et al* 2000 *Sci. China* A **30** 1103 (in Chinese) [张桂戌等 2000 中国科学 A **30** 1103]

[4] Yan Z Y 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **16** 759

[5] Xie F D and Gao X S 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **19** 1113

[6] Huang D J and Zhang H Q 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 243

[7] Lü K P *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2074 (in Chinese) [吕克璞等 2001 物理学报 **50** 2074]

[8] Shi Y R *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 267 (in Chinese) [石玉仁等 2003 物理学报 **52** 267]

[9] Guo G D and Zhang J F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1159 (in Chinese) [郭冠军、张解放 2002 物理学报 **51** 1159]

[10] Huang D J and Zhang H Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2434 (in Chinese) [黄定江、张鸿庆 2004 物理学报 **53** 2434]

[11] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[12] Fun Z T, Liu S D and Liu S K 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **20** 301

[13] Wu W T 1994 *Algorithms and Computation* (Berlin: Springern)

[14] Whitham G B 1967 *Proc. Roy. Soc.* A **299** 6

[15] Broer L J 1975 *Appl. Sci. Res.* **31** 377

[16] Kaup D J 1975 *Prog. Theor. Phys.* **54** 369

[17] Kupershmidt B A 1985 *Commun. Math. Phys.* **99** 51

[18] Ablowitz M J and Clarkson P A 1991 *Soliton, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scatting* (New York: Cambridge University Press)

[19] Chen Y, Wang Q and Li B 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 675


# Extended projective Riccati equations method and its application


Yong Xue-Lin† Zhang Hong-Qing

(*Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *China*)



(Received 30 September 2004; revised manuscript received 18 November 2004)



Abstract

The projective Riccati equations method is extended and applied to find new exact solutions to the Whitham-Broer-Kaup (WBK) equation with the aid of symbolic computation system Maple.



**Keywords**: projective Riccati equations method, Whitham-Broer-Kaup (WBK) equation, solitary-wave solutions

**PACC**: 0340K, 0290



† E-mail: yongxuelin2003@yahoo.com.cn