第 54 卷 第 6 期 2005 年 6 月
1000-3290/2005/54(06)/2520-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.6,June,2005

一类相对论性非球谐振子系统的束缚态*

李 宁[1)] 鞠国兴[1)†] 任中洲[1)2)]

[1)](南京大学物理系,南京 210008)

[2)](兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心,兰州 730000)

(2003 年 12 月 23 日收到;2004 年 2 月 3 日收到修改稿)

给出了具有形式为$\frac{1}{2}r^2+\frac{A}{2r^2}$的非球谐振子型标量势和矢量势的相对论系统在两种势相等的条件下三维 Klein-Gordon 方程,二维和三维 Dirac 方程的 s 波束缚态解.

关键词:三维非球谐振子势,Klein-Gordon 方程,Dirac 方程,束缚态

PACC:0365

1. 引 言

求解相对论性粒子在势场中运动的 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程是研究这类系统性质的一项重要任务.一般情况下,对 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程,精确可解的势很少,代表性的是 Coulomb 势[1]和谐振子势[2].但是,对于包含标量势和矢量势的 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程,在标量势和矢量势相等的条件下,可解的势比较多,如谐振子势[3],Hulthen 势[4—6],Morse 和 Woods-Saxon 势[7,8],Poschl-Teller 势[9],$\tan^2(\pi\eta r)$势和 Kratzer 势[10,11].但值得指出的是,对这些势可解析求解的事实上仅是 s 波束缚态的波函数.

谐振子模型,是非相对论下可精确求解的模型,它有广泛的应用.但是在一些问题中,谐振子模型过于简化,人们提出了一类非谐振子模型,它们是在谐振子势上附加其它形式的势.这类模型有许多实际的应用,比如用来解释量子点共振隧穿中的能带结构[12],量子流体中的相干态[13]等.在非谐振子模型中,一类有代表性的势具有如下形式

$$V(r)=\frac{1}{2}r^2+\frac{A}{2r^2}. \tag{1}$$

在非相对论情况下,Calogero 较早地解析求解了具有(1)式这样的相互作用势的系统的本征值和本征函数[14].Sutherland 将这种系统进行了推广,并用于量子流体系统性质的研究[13,15].人们已对这种非谐振子系统进行了多方面的研究[13—26].重要的一点是,这类模型是精确可解的,即可以解析地表示系统的本征值和本征函数.现在的一个问题是,在相对论情况下这个模型是否仍是可解的.本文我们将研究这个问题.类似于其它势,我们发现在标量势和矢量势的相等条件下,可以分别得到 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解.

2. 三维非球谐振子系统的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解

具有标量势 $V(r)$和矢量势 $S(r)$的 s 波 Klein-Gordon 方程的径向分量为($\hbar=c=1$)[4]

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+[E-V(r)]^2-[M+S(r)]^2\right\}u(r)=0,$$

$$R(r)=\frac{u(r)}{r}, \tag{2}$$

其中 $R(r)$为径向波函数.在标量势与矢量势相等的条件下,(2)式可写为

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-2(E+M)V(r)+(E^2-M^2)\right]u(r)=0. \tag{3}$$

当 $V(r)$取形式为(1)式的非谐振子势时,相应的 s

* 国家杰出青年基金项目(批准号:10125521),教育部博士点基金项目(批准号:20010284036),国家重点基础研究发展规划项目(批准号:G2000077400),中国科学院创新工程重点项目(批准号:KJCX2-SW-N02),国家自然科学基金(批准号:60371013)资助的课题.

†E-mail:jugx@nju.edu.cn

波 Klein-Gordon 方程(3)变为

$$u''+\left[(E^2-M^2)-(E+M)r^2-\frac{A(E+M)}{r^2}\right]u(r)=0. \tag{4}$$

令

$$\eta^2=E+M,\xi^2=E^2-M^2,$$
$$L=\frac{-1+\sqrt{1+4A(E+M)}}{2},y=\sqrt{\eta}r, \tag{5}$$

则方程(4)化为

$$u''(y)+\left[\frac{\xi^2}{\eta}-y^2-\frac{L(L+1)}{y^2}\right]u(y)=0. \tag{6}$$

考虑到(6)式中波函数应满足边界条件 $u(0)=0$ 和 $u(\infty)=0$ 以保证它在 $r=0$ 和 $r\to\infty$ 处的正则性及其波函数的可归一性,可设波函数 $u(y)$ 具有如下形式

$$u(y)=y^{L+1}e^{-\frac{y^2}{2}}f(y). \tag{7}$$

由(6)式得 $f(y)$ 所满足的微分方程为

$$f''(y)+\frac{2}{y}(L+1-y^2)f'(y)+\left[\frac{\xi^2}{\eta}-(2L+3)\right]f(y)=0. \tag{8}$$

进一步作变量代换 $x=y^2$,则上式化为标准的合流超几何方程

$$xf''(x)+(\gamma-x)f'(x)-\alpha f(x)=0, \tag{9}$$

式中参数

$$\gamma=L+\frac{3}{2},\alpha=\frac{1}{4}\left(2L+3-\frac{\xi^2}{\eta}\right). \tag{10}$$

所以方程(8)的解为

$$f(\eta r^2)=f(x)=F(\alpha,\gamma,\eta r^2). \tag{11}$$

如果 α 不等于0和负整数,则当 $r\to\infty$ 时,有渐近行为 $F(\alpha,\gamma,\eta r^2)\to e^{\eta r^2}$. 由(7)式知这不满足束缚态所要求的边界条件.因此,为了得到物理上允许的解,必须有下式成立

$$\alpha=-n,(n=0,1,2,\cdots), \tag{12}$$

将 ξ,η 和 α 的表达式代入(12)式,即可得到能谱方程

$$(E_n-M)\sqrt{E_n+M}-\sqrt{1+4A(E_n+M)}-2=4n \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{13}$$

相应的 s 束缚态波函数为(未归一化)

$$u_n(r)=(\sqrt{\eta}r)^{L+1}e^{-\frac{\eta}{2}r^2}F\left(-n,L+\frac{3}{2},\eta r^2\right). \tag{14}$$

需要注意的是,方程(13)要成立,则其中条件之一为 $E_n>M$.同时,因 $1+4A(E_n+M)\geqslant0$ 以保证 L 和能量方程(13)是实的,则 $A\geqslant-\frac{1}{4(E_n+M)}>-\frac{1}{8M}$,即方程(1)中的 A 应满足条件 $A>-\frac{1}{8M}$. 当 $A=0$ 时,则回到谐振子势的情况,此时 $L=0$,方程(13)可化为 E_n 的三次方程,由此可得能量 E_n 与 n 关系的解析表示式.

3. 具有二维和三维非球谐振子型标量势和矢量势的 Dirac 方程的 s 波束缚态解

具有标量势 $S(r)$ 和矢量势 $V(r)$ 的 Dirac 方程为($\hbar=c=1$)[3]

$$\{\alpha\cdot p+\beta[M+S(r)]\}\psi=[E-V(r)]\psi, \tag{15}$$

在二维情况下,α 只有两个分量 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$,我们采用 α 和 β 的下列二维表示

$$\alpha_1=\sigma_1,\alpha_2=\sigma_2,\beta=\sigma_3, \tag{16}$$

其中 $\sigma_i(i=1,2)$ 是泡利矩阵.利用平面极坐标系(r,φ),Dirac 方程(15)可写为二分量形式

$$\begin{bmatrix} M+S(r)-E+V(r) & e^{-i\varphi}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\ e^{i\varphi}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) & -M-S(r)-E+V(r)\end{bmatrix}\psi(\boldsymbol{r})=0. \tag{17}$$

设系统的守恒量 J_z 的本征值为 j,则对 $j=l+\frac{1}{2}$,这里 l 为轨道角动量量子数,守恒量完全集的共同本征函数可表示为

$$\psi_l(\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix}\psi_1(\boldsymbol{r})\\ \psi_2(\boldsymbol{r})\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\begin{pmatrix}if(r)e^{il\varphi}\\ g(r)e^{i(l+1)\varphi}\end{pmatrix}. \tag{18}$$

对 $j=l-\frac{1}{2}$,对应的本征函数可由(18)作代换 $l\to l-1$得到.将(18)式代入(17)式可得到 $f(r)$ 和

$g(r)$满足如下方程

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}-\frac{j}{r}f=[M+E+S(r)-V(r)]g,\quad(19)$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}+\frac{j}{r}g=[M-E+S(r)+V(r)]f,\quad(20)$$

对三维系统，中心力场中粒子的守恒量完全集(H,K,J^2,J_z)的共同本征函数可表示成

$$\psi=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}f_{n,k}(r)\phi^A_{jm_j}\\ ig_{n,k}(r)\phi^B_{jm_j}\end{pmatrix},(k=j+1/2),\quad(21)$$

$$\psi=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}f_{n,k}(r)\phi^B_{jm_j}\\ ig_{n,k}(r)\phi^A_{jm_j}\end{pmatrix},(k=-(j+1/2)).\quad(22)$$

其中

$$\phi^A_{jm_j}=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{j+m_j}{2j}}Y_{j-1/2,m_j-1/2}\\ \sqrt{\frac{j-m_j}{2j}}Y_{j-1/2,m_j+1/2}\end{pmatrix},$$

$$\phi^B_{jm_j}=\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{j-m_j+1}{2j+2}}Y_{j+1/2,m_j-1/2}\\ \sqrt{\frac{j+m_j+1}{2j+2}}Y_{j+1/2,m_j+1/2}\end{pmatrix}.\quad(23)$$

将(21)或(22)式代入(15)式，可分离出 Dirac 方程的径向部分为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}-\frac{k}{r}f=[M+E+S(r)-V(r)]g,\quad(24)$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}+\frac{k}{r}g=[M-E+S(r)+V(r)]f.\quad(25)$$

比较方程(19)，(20)和(24)，(25)，可以看出二维和三维情况下 Dirac 方程的径向分量形式上完全相同，因此可统一讨论它们的解.

在矢量势和标量势相等的情况下，方程(24)和(25)变为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}-\frac{k}{r}f=[M+E]g,\quad(26)$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}+\frac{k}{r}g=[M-E+2V(r)]f.\quad(27)$$

把(26)式代入(27)式可得

$$\Big[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}-2(E+M)V(r)+(E^2-M^2)-\frac{k(k-1)}{r^2}\Big]f=0,\quad(28)$$

对于 s 波，即 $k=1$，方程简化为

$$\Big[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}-2(E+M)V(r)+(E^2-M^2)\Big]f=0.\quad(29)$$

当 $V(r)$取二维和三维非球谐振子势时，

$$V(r)=\frac{1}{2}r^2+\frac{A}{2r^2},\quad(30)$$

此时方程(29)和方程(3)完全类似，于是立即可得束缚态能谱 $E_{n,1}$方程为

$$(E_{n,1}-M)\sqrt{E_{n,1}+M}-\sqrt{1+4A(E_{n,1}+M)}-2=4n.\quad(n=0,1,2,\cdots).\quad(31)$$

同样，方程(14)后面的分析也适用于现在的情况.与$E_{n,1}$相对应的f分量的未归一化的径向波函数为

$$f_{n,1}(r)=(\sqrt{\eta}r)^{L+1}\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{2}r^2}F\Big(-n,L+\frac{3}{2},\eta r^2\Big).\quad(32)$$

把(32)式代入(26)式可得未归一化的 g 分量径向波函数为

$$g_{n,1}(r)=\frac{1}{M+E_{n,1}}\Big[\Big(\frac{L}{r}-\eta r\Big)(\sqrt{\eta}r)^{L+1}\times\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{2}r^2}F\Big(-n,L+\frac{3}{2},\eta r^2\Big)-\frac{2n\eta r}{L+\frac{3}{2}}(\sqrt{\eta}r)^{L+1}\times\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{2}r^2}F\Big(-n+1,L+\frac{5}{2},\eta r^2\Big)\Big].\quad(33)$$

将 $f_{n,1}(r)$和 $g_{n,1}(r)$代入(18)和(21)式，可分别给出二维和三维 Dirac 方程的 s 波旋量波函数.当 $A=0$，则标量势和矢量势是谐振子势，此时退化到文献[3]讨论的情况.

4. 结　论

比较文中的(29)式和(3)式我们可以看到，在标量势和矢量势相等的情况下，Dirac 方程的 f 分量满足的方程与 Klein-Gordon 方程及 s 态三维径向 Schrödinger 方程非常的相似，因而其解可以用类似于解 Schrödinger 方程的方法求得.这样，具有相等的非球谐振子型标量势和矢量势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解均可严格地给出.对于其它在非相对论情况下有解析解的各种势，可用类似的方法推广到标量势和矢量势相等情况下的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程加以求解.分析各种在标量势和矢量势相等情况下可以解析求出相对论性方程的 s 波束缚态的问题可以看出，两种势相等附加了非常强的限制条件.一般情况下，需要进行数值计算才能确定系统的各种物理性质.尽管如此，s 波的束缚态的解析形式为数值计算提供了重要的参考标准.

[1] Flugge S 1974 *Practical Quantum Mechanics* (Berlin: Springer-Verlag)
[2] Moshinsky M and Szczepaniak A 1989 *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** L817
[3] Su R K and Ma Z Q 1986 *J. Phys.* A **20** 1739
[4] Dominguez-Adame F 1989 *Phys. Lett.* A **136** 175
[5] Talukdar B, Yunus A and Amin M R 1989 *Phys. Lett.* A **141** 326
[6] Hu S Z and Su R K 1991 *Acta Phys. Sin.* **40** 1201 (in Chinese) [胡嗣柱、苏汝铿 1991 物理学报 **40** 1201]
[7] Hou C F, Li Y and Zhou Z X 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1999 (in Chinese) [候春风、李　炎、周忠祥 1999 物理学报 **48** 1999]
[8] Hou C F, Zhou Z X and Li Y 1999 *Chin. Phys.* **8** 561
[9] Chen G 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1651 (in Chinese) [陈　刚 2001 物理学报 **50** 1651]
[10] Guo J Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1453 (in Chinese) [郭建友 2002 物理学报 **51** 1453]
[11] Guo J Y and Xu F X 2002 *Chinese Journal of Atomic and Molecular Physics* **19** 313 (in Chinese) [郭建友、徐辅新 2002 原子与分子物理学报 **19** 313]
[12] Luban M 1989 *Appl. Phys. Lett.* **54** 1997
[13] Sutherland B 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 3678
[14] Calogero F 1969 *J. Math. Phys.* **10** 2191
[15] Sutherland B 1971 *J. Math. Phys.* **12** 247 251
[16] Zhu D P 1987 *J. Phys.* A **20** 4331
[17] Landau L D and Lifshitz E M 1958 *Quantum Mechanics* (Oxford: Pergamon) Chap 35
[18] Li W B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2356 (in Chinese) [李文博 2001 物理学报 **50** 2356]
[19] Chen C Y *et al* 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 536 (in Chinese) [陈昌远等 1998 物理学报 **47** 536]
[20] Chen C Y *et al* 1999 *High Energy Physics and Nuclear Physics* **23** 865 (in Chinese) [陈昌远等 1999 高能物理与核物理 **23** 865]
[21] Huang B W and Wang D Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1163 (in Chinese) [黄博文、王德云 2002 物理学报 **51** 1163]
[22] Ni Z X 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1687 (in Chinese) [倪致祥 1997 物理学报 **46** 1687]
[23] Chen C Y *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 468 (in Chinese) [陈昌远等 2002 物理学报 **51** 468]
[24] Li W B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 547 (in Chinese) [李文博 2002 物理学报 **51** 547]
[25] Yu Z X *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1693 (in Chinese) [于肇贤等 1997 物理学报 **46** 1693]
[26] Long C Y, Chen M L and Cai S H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1858 (in Chinese) [龙超云、陈明伦、蔡绍洪 2003 物理学报 **52** 1858]

Bound states for a kind of relativistic non-harmonic oscillator systems

Li Ning[1)]　Ju Guo-Xing[1)†]　Ren Zhong-Zhou[1)2)]

[1)] (*Department of Physics, Nanjing University, Nanjing* 210008, *China*)

[2)] (*Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy-Ion Accelerator, Lanzhou* 730000, *China*)

(Received 23 December 2003; revised manuscript received 3 February 2004)

Abstract

For a three-dimensional non-harmonic oscillator potential $\left(\frac{1}{2}r^2+\frac{A}{2r^2}\right)$, the s-wave bound solutions of both Dirac equation and Klein-Gordon equation are given when the scalar potential is equal to the vector potential. We find that the radial component equations for both two-dimensional Dirac equation and three-dimensional one are the same when the scalar potential equals to the vector potential, and the corresponding s-wave bound solutions for the two-dimensional system are also obtained.

Keywords: non-harmonic oscillator potential, Klein-Gordon equation, Dirac equation, bound states
PACC: 0365

* Project supported by the National Natural Science Foundation for Outstanding Young Scientists of China (Grant No. 10125521), the Doctorate Foundation of the State Education Ministry of China (Grant No. 20010284036), the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. G2000077400), Chinese Academy of Sciences Knowledge Innovation Project (Grant No. KJCX2-SW-N02) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60371013).

† E-mail: jugx@nju.edu.cn