第 54 卷 第 6 期 2005 年 6 月
1000-3290/2005/54(06)/2528-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.6,June,2005

指数型变化有效质量的三维 Schrödinger 方程的解析解*

蔡长英[1)3)] 任中洲[1)2)] 鞠国兴[1)†]

1)(南京大学物理系,南京 210008)

2)(兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心,兰州 730000)

3)(井冈山学院物理系,吉安 343009)

(2004 年 7 月 2 日收到;2004 年 9 月 13 日收到修改稿)

对随径向坐标指数型变化的有效质量分布,通过坐标变换,得到了与 Coulomb 型势,Kratzer 型势和无限深球方势阱三类势函数相联系的变质量三维 Schrödinger 方程的解析解,具体给出了这三类系统的能量本征值和本征函数的解析表达式.

关键词:Schrödinger 方程,解析解,坐标变换,有效质量
PACC:0365,0365G

1.引 言

自量子力学诞生以来,寻求 Schrödinger 方程、Klein-Gordon 方程、Dirac 方程等波动方程的解析解(即所谓可积系统)一直是理论研究方面的一个重要课题[1—18].解析解之所以重要,是因为通过这些解,可以更深刻地理解量子力学中的基本概念;同时,也可以用这些解为数值计算提供重要的参考标准,从而为解决更复杂的问题寻找更好的近似计算方法.多年来,人们主要研究的是恒定质量系统的波动方程解的问题[1—18].在此基础之上,人们发展了许多有效的方法确定或求波动方程的解析解,如因子化方法[4],算符方法[5],坐标变换方法[6—8,13,17],超对称量子力学方法[9—12].

最近,研究质量依赖于空间位置(下面简称为变质量或有效质量)的波动方程特别是 Schrödinger 方程的求解问题引起了人们的极大兴趣[19—26].变质量问题在半导体[27],量子点[28],液晶[29]等系统的电学性质的研究中有比较广泛的应用.相比质量恒定的情况,变质量系统的 Schrödinger 方程的求解更为复杂,通常很难找出它的解析解.但是,对于某些特殊势,人们已经发展了一些可得到有效质量的 Schrödinger 方程解析解的方法[19—26].在这些方法中,有一种通过坐标变换构造质量随空间位置变化但可解析求解的系统的方案,其基本思想是[23—25]:将质量恒定的物理系统作为参考问题,而变质量的物理系统看作目标问题;通过坐标变换(如下文的方程(5)),在参考问题的 Schrödinger 方程与目标问题的 Schrödinger 方程之间建立联系,这种联系对坐标变换中的参数及其有关的变换的函数形式施加了一定的限制(见方程(7)和(8)).然后根据参考问题的解析解得到目标问题的解析解.但是在文献[23—25]中,1)主要研究了一维问题,对三维系统仅给出了形式化的结果;2)对参考问题仅考虑谐振子势,Coulomb 势和 Morse 势.对于其它势的情况又如何呢,这也是需要讨论的问题.在本文中,我们将以三维问题作为主要的研究对象,参考问题的势函数则取 Coulomb 型势,Kratzer 型势和无限深球方势阱,而有效质量的变化是各向同性的并仅限于随空间位置指数型变化的情况.指数型变化的有效质量可用于半导体量子阱结构等有关问题的研究[23,24].

本文结构如下:在文章的第 2 部分,给出三维目标问题和参考问题的势函数、能谱的关系式;对随径

* 国家杰出青年基金项目(批准号:10125521),教育部博士点基金项目(批准号:20010284036),国家重点基础研究发展规划项目(批准号:G2000077400),中国科学院创新工程重点项目(批准号:KJCX2-SW-N02),国家自然科学基金项目(批准号:60371013)资助的课题.

† E-mail:jugx@nju.edu.cn

向坐标指数型变化的有效质量，分别讨论与 Coulomb 型势，Kratzer 型势和无限深球方势阱三类可解势相联系的 Schrödinger 方程的解析求解问题，得到了这些系统的能量本征值和本征函数的解析表达式. 在文章的最后部分，我们对有关问题作了简要的讨论.

2. 指数型变化有效质量的三维 Schrödinger 方程的解析解

当有效质量依赖于空间位置时，由于质量算符和动量算符不再对易，则系统的动能算符有多种定义方式. 在本文中，我们采用 Levy-Leblond 等给出的动能算符[19]，此时系统的哈密顿量可写为[25]

$$H = \boldsymbol{P}\frac{1}{2M(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{P} + V(\boldsymbol{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\nabla\frac{1}{m(\boldsymbol{r})}\nabla\right) + V(\boldsymbol{r}), \tag{1}$$

其中 $m(\boldsymbol{r})$ 和 $V(\boldsymbol{r})$ 是位置 $\boldsymbol{r}$ 的实函数. 采用自然单位($m_0=\hbar=1$)，并仅考虑球对称系统，则 m，V 与方位无关. 利用笛卡儿坐标 x，y，z 和球坐标 r，θ，φ 之间的关系，哈密顿量(1)可写为

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{m'}{m^2}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{mr^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\right\} + V(r), \tag{2}$$

其中 $m' \equiv \frac{\mathrm{d}m(r)}{\mathrm{d}r}$. 通过分离变量，可得与哈密顿量(2)相联系的 Schrödinger 方程的径向分量方程为[25]

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{m'}{m}\left(\frac{1}{r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) - 2m[V(r) - E]\right\}\phi(r) = 0, \tag{3}$$

其中，$V(r)$，E，$\chi(r) = \frac{\phi(r)}{r}$ 和 l 分别为目标问题的势函数，能谱，波函数和角动量量子数.

对于质量恒定的参考问题，其 Schrödinger 方程的径向分量方程为

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} - \frac{L(L+1)}{\rho^2} - 2[\nu(\rho) - \varepsilon]\right\}\psi(\rho) = 0, \tag{4}$$

其中，$\nu(\rho)$，ε，$u(\rho) = \frac{\psi(\rho)}{\rho}$ 和 L 分别为参考问题的势函数，能谱，波函数和角动量量子数.

对方程(4)作如下变换

$$\rho = q(r), \psi(\rho) = g(r)\phi(r). \tag{5}$$

将方程(5)代入方程(4)，得到下列方程

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \left(2\frac{g'}{g} - \frac{q''}{q'}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \left(\frac{g''}{g} - \frac{q''}{q'}\frac{g'}{g}\right) - L(L+1)\left(\frac{q'}{q}\right)^2 - 2(q')^2[\nu(q(r)) - \varepsilon]\right\}\phi(r) = 0. \tag{6}$$

对比方程(6)和方程(3)，得到下列关系式[25]

$$g(r) = \left(\frac{q'}{m}\right)^{1/2}, \tag{7}$$

$$V(r) - E = \frac{(q')^2}{m}[\nu(q) - \varepsilon] + \frac{L(L+1)}{2m}\left(\frac{q'}{q}\right)^2 - \frac{l(l+1)}{2mr^2} + \frac{m'}{2m^2r} + \frac{1}{4m}[F(m) - F(q')], \tag{8}$$

其中，$F(z) = \frac{z''}{z} - \frac{3}{2}\left(\frac{z'}{z}\right)^2$，而 $F(z')$ 称为 Schwartz 导数.

在后面的讨论中，我们假设参考问题的角动量量子数 L 与目标问题的角动量量子数 l 存在如下线性关系

$$L = al + b, \tag{9}$$

其中 a，b 为常数且 $a \neq 0$. 同时，由于我们仅考虑各向同性的系统，则各向同性要求下列等式成立

$$L(L+1) = cl(l+1) + d, \tag{10}$$

这里 c，d 为常数且 $c \neq 0$. 方程(9)和(10)同时成立时，a，b，c，d 之间有关系 $a = 2b+1$，$c = (2b+1)^2$，$d = b(b+1)$，即仅有一个独立的参数. 需要说明的是，关系(9)是最简单的一种选择. 在质量恒定的情况下，研究诸如三维谐振子势和 Coulomb 势的本征问题之间的关系时就用过(9)这样的关系式[30].

方程(8)就是目标问题和参考问题的势函数、能谱的关系式. 给定一个依赖于径向坐标 r 的质量函数 $m(r)$，如果能选定变换函数 $q(r)$ 使方程(8)的右边可以分为两部分：一部分是与 r 无关，但与量子数 n 和 l 有关；另一部分则与 r 和 l 有关，而与 n 无关. 这样，将前一部分解释为目标问题的能谱 E，后一部分为目标问题的势函数 $V(r)$，即由方程(8)就可以得到目标问题的势函数和能谱. 将方程(7)代入方程(5)就能得到目标问题的波函数.

我们考虑有效质量 $m(r)$ 随径向坐标 r 呈指数函数变化的情形[23,24]，即

$$m(r) = \mathrm{e}^{-\beta r}, \tag{11}$$

其中 $\beta > 0$，这是为了保证质量有限性所要求的. 下面分别求 Coulomb 型势，Kratzer 型势和无限深球方势阱三类参考问题对应的变质量三维问题的势函

数,能量本征值和本征函数.

2.1. Coulomb 型势

对于 Coulomb 型势的参考问题,其势函数,束缚态能谱和波函数分别为[2]

$$\nu(\rho) = -\frac{Z}{\rho}, \tag{12}$$

$$\varepsilon_n = -\frac{Z^2}{2(n+L+1)^2}, \tag{13}$$

$$\psi_n(\rho) = a_n \rho^{L+1} e^{-\frac{Z\rho}{n+L+1}} F\left(-n, 2L+2, \frac{2Z\rho}{n+L+1}\right), \tag{14}$$

其中,Z 为粒子所带的电荷数,a_n 为归一化系数,F 为合流超几何函数,$n = 0, 1, 2, \cdots$为径向量子数.

经过分析可知,具有如下形式的变换函数可以使方程(8)的右边分为前面所说的两类项

$$q(r) = \gamma e^{vr}, \tag{15}$$

其中,$\gamma > 0$, v 为非零实参数. 将关系式(11)—(13),(15)代入方程(8)以及(7),(14)代入方程(5),可以得到下列两组解.

(a) 当 $\gamma = \frac{n+L+1}{Z}$ 且 $v = -\beta$ 时,目标系统的势函数,能量本征值和本征函数分别为

$$V(r) = \frac{\beta^2}{2} e^{-\beta r} + \frac{1}{2}\left[C - \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] e^{\beta r}, \tag{16}$$

$$E_n = (n+L+1)\beta^2, \tag{17}$$

$$\phi_n(r) = A_n e^{-\beta(L+1)r} \exp(-e^{-\beta r}) F(-n, 2L+2, 2e^{-\beta r}), \tag{18}$$

其中

$$C = (L^2 + L)\beta^2,$$

$L(l)$由关系式(9)定义,而 A_n 为归一化系数.

(b) 当 $\gamma = \frac{2}{Z}$ 且 $v = -\frac{\beta}{2}$ 时,目标系统的势函数,能量本征值和本征函数分别为

$$V(r) = -\frac{\beta^2}{2} e^{\beta r/2} + \frac{1}{2}\left[C - \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] e^{\beta r}, \tag{19}$$

$$E_n = -\frac{\beta^2}{2(n+L+1)^2}, \tag{20}$$

$$\phi_n(r) = A_n e^{-(2L+3)\beta r/4} \exp\left(-(\xi_n e^r)^{-\frac{\beta}{2}}\right) \times F\left(-n, 2L+2, 2(\xi_n e^r)^{-\frac{\beta}{2}}\right), \tag{21}$$

其中

$$C = \frac{1}{16}(4L^2 + 4L - 3)\beta^2,$$

$$\xi_n = \left(\frac{2}{n+L+1}\right)^{-\frac{2}{\beta}},$$

$L(l)$由关系式(9)定义,而 A_n 为归一化系数.

2.2. Kratzer 型势

对于 Kratzer 型势的参考问题,其势函数,束缚态能谱和波函数分别为[2]

$$\nu(\rho) = -2D\left(\frac{A}{\rho} - \frac{A^2}{2\rho^2}\right), \tag{22}$$

$$\varepsilon_n = -\frac{2A^2D^2}{(n+\lambda)^2}, \tag{23}$$

$$\psi_n(\rho) = a_n \rho^{\lambda} e^{-2AD\rho/(n+\lambda)} F(-n, 2\lambda, 4AD\rho/(n+\lambda)), \tag{24}$$

其中,A, D 为正的常数,a_n 为归一化系数,F 为合流超几何函数,$n = 0, 1, 2, \cdots$, $\lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{2A^2D + \left(L + \frac{1}{2}\right)^2}$.

对这种类型的势,变换函数 $q(r)$仍取方程(15)的形式. 将关系式(11),(15),(22),(23)代入方程(8)以及(7),(24)代入方程(5),可以得到下列两组解.

(a) 当 $\gamma = \frac{n+\lambda}{2AD}$ 且 $v = -\beta$ 时,

$$V(r) = \frac{\beta^2}{2} e^{-\beta r} + \frac{1}{2}\left[C - \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] e^{\beta r}, \tag{25}$$

$$E_n = (n+\lambda)\beta^2, \tag{26}$$

$$\phi_n(r) = A_n e^{-\lambda\beta r} \exp(-e^{-\beta r}) F(-n, 2\lambda, 2e^{-\beta r}), \tag{27}$$

其中

$$C = (L^2 + L + 2A^2D)\beta^2,$$

$L(l)$由关系式(9)定义,而 A_n 为归一化系数.

(b) 当 $\gamma = \frac{1}{AD}$ 且 $v = -\frac{\beta}{2}$ 时,

$$V(r) = -\frac{\beta^2}{2} e^{\beta r/2} + \frac{1}{2}\left[C - \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] e^{\beta r}, \tag{28}$$

$$E_n = -\frac{\beta^2}{2(n+\lambda)^2}, \tag{29}$$

$$\phi_n(r) = A_n e^{-(1+2\lambda)\beta r/4} \exp\left(-(\xi_n e^r)^{-\frac{\beta}{2}}\right) \times F\left(-n, 2\lambda, 2(\xi_n e^r)^{-\frac{\beta}{2}}\right) \tag{30}$$

其中

$$C = \frac{1}{16}(4L^2 + 4L + 8A^2D - 3)\beta^2,$$

$$\xi_n = \left(\frac{2}{n+\lambda}\right)^{-\frac{2}{\beta}},$$

$L(l)$由关系式(9)定义,而 A_n 为归一化系数.

2.3. 无限深球方势阱

对于无限深球方势阱的参考问题,其势函数,束缚态能谱和波函数分别为[2]

$$\nu(\rho) = \begin{cases} 0, & (\rho < R) \\ \infty, & (\rho > R) \end{cases} \quad (31)$$

$$\varepsilon_n = \frac{k_n^2}{2}, \quad (32)$$

$$\psi_n(\rho) = a_n j_L(k_n\rho), (\rho < R), \quad (33)$$

其中,$R > 0$,a_n 为归一化系数,j_L 为球贝塞尔函数,$n = 1,2,3,\cdots$为标志零点数目的径向量子数,k_n 满足$j_L(k_nR) = 0$.

若

$$q(r) = \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}r}, \left(r > \max\left(0, -\frac{2}{\beta}\ln R\right)\right) \quad (34)$$

其中,$\max(x,y)$表示取 x,y 当中较大的那个数. 则目标问题的解为

$$V(r) = \frac{1}{2}\left[C - \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\mathrm{e}^{\beta r}, \quad (35)$$

$$E_n = \frac{\beta^2}{8}k_n^2, \quad (36)$$

$$\phi_n(r) = A_n \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{4}r} j_L(k_n \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}r}), \quad (37)$$

其中

$$C = \frac{1}{16}(4L^2 + 4L - 3)\beta^2,$$

$L(l)$由关系式(9)定义,而 A_n 为归一化系数.

以上讨论了三类可解参考问题对应的变质量系统的解析求解问题,下面对变换(15)作两点说明:1)变换(15)可以理解为对参考问题的径向坐标 ρ 作一特殊的标度变换,这种变换只是针对径向分量,而角量部分在变换前后保持不变,即空间的各向同性或系统的球对称性在变换前后保持不变;2)类似这样的变换在求解质量恒定的 Schrödinger 方程的解析解时经常用到,参见文献[1],[2]以及[30]中的具体例子.

3. 结　　论

从前面的讨论可知,由质量不变的可解析求解的系统构造有效质量依赖于空间位置的可解析求解的系统,要通过坐标变换将参考问题(其质量恒定)的 Schrödinger 方程与目标问题(其质量依赖于空间位置)的 Schrödinger 方程进行对比,确定这两类问题的势函数、能谱之间的关系(8),这样由参考问题的精确可解性可得到所构造的目标问题的精确可解性. 在这种构造质量变化而又解析可解的问题的过程中,关键问题是选取合适的变换函数 $q(r)$,它是不唯一的. 选择不同的变换函数会导致不同的解,也对应不同的精确可解系统. 对 $q(r)$的选取至少有三条限制,凡是满足这些条件的 $q(r)$都是允许的. 1)$q(r)$是 r 的三阶可导函数;2)方程(8)右边需出现不随 r 变化的项;3)势函数 $V(r)$应独立于指标 n.但是,对于三维问题,找到合适的 $q(r)$比一维问题要困难得多.

在本文中,我们考虑了随径向坐标指数型变化的有效质量,并分别讨论了 Coulomb 型势,Kratzer 型势和无限深球方势阱三类可解参考问题对应的变质量系统的解析求解问题,给出了它们相应的势函数,能量本征值和本征函数.需要说明的是,在前面讨论的几类势中,目标问题的势中含有量子数 l,这一方面与坐标变换中含有 l 有关(见 2.1 和 2.2 节解(a)中 γ 的表示式),另一方面也与三维问题中的离心势有关,因而目标问题中的 $V(r)$实际上是一种有效势. 这种情况在超对称量子力学的研究中也出现过[7,8,10].

同样值得说明的是,本文中讨论的变换之所以具有相同的函数形式(见方程(15)),是因为我们对变换函数 $q(r)$的选取主要是基于对方程(8)右侧的$[\nu(q) - \varepsilon](q')^2/m$ 项的分析.对于 Coulomb 形式,Kratzer 形式和无限深球方势阱三类参考问题,选取的 $q(r)$要满足前面所说的条件,则要求$(q')^2/m$ 或$(q')^2/(mq)$与 r 无关,这同时确定了 $q(r)$函数形式中系数和指数上的两个参量的形式.具体地说,当(15)式中的 $v = -\frac{\beta}{2}$时,本文中给出的变换属于$(q')^2/m = \mathrm{const}$ 的情况,这是变质量问题求解中研究比较多的一类变换[23,24]. 当 $v = -\beta$ 时,则为$(q')^2/(mq) = \mathrm{const}$ 的情况.因此,在确定了 $q(r)$的具体形式后,由关系式(7)可求出 $g(r)$,它可能是实函数,也可能是虚函数.本文中得到的 $g(r)$是一虚函数. 另外,一维和三维对变换(5)的要求有所不同. 在一维问题中,变换函数 q 既可为坐标的正的实函数,也可为坐标的负的实函数. 但在三维问题中,q 应为 r 的正的实函数,因为参考问题中的径向坐标 $\rho > 0$.我们给出的变换函数 $q(r)$的形式是比

较特殊的,是否有更一般的形式仍是需要进一步探讨的.

[1] Landau L D and Lifshitz E M 1977 *Quantum Mechanics* 3rd (London:Pergamon Press)

[2] Flügge S 1974 *Practical Quantum Mechanics* (Berlin:Springer-Verlag)

[3] Bagrov B G and Gitman D M 1990 *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations* (London:Kluwer Academic Publisher)

[4] Infeld L and Hull T E 1951 *Rev*. *Mod*. *Phys*. **23** 21

[5] de Lange O L and Raab R E 1991 *Operator Methods in Quantum Mechanics* (Oxford:Clarendon Press)

[6] Manning M F 1935 *Phys*. *Rev*. **48** 161

[7] Levai G 1989 *J*. *Phys*. A:*Math*. *Gen*. **22** 689

[8] De R, Dutt R and Sukhatme U 1992 *J*. *Phys*. A:*Math*. *Gen*. **25** L843

[9] Witten E 1981 *Nucl*. *Phys*. B **185** 513

[10] Cooper F, Khare A and Sukhatem U 1995 *Phys*. *Rep*. **251** 267

[11] Jia C S, Jiang X W, Wang X G and Yang Q B 1997 *Acta Phys*. *Sin*. **46** 12 (in Chinese) [贾春生、蒋效卫、王孝国、杨秋波 1997 **物理学报** **46** 12]

[12] Huang B W and Wang D Y 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1163 (in Chinese) [黄博文、王德云 2002 **物理学报** **51** 1163]

[13] She S X 2002 *Acta Phys*. *Sin*. 51 1054 (in Chinese) [佘守宪 2002 **物理学报** **51** 1054]

[14] Long C Y, Chen M L and Cai S H 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1858 (in Chinese) [龙超云、陈明伦、蔡绍洪 2003 **物理学报** **52** 1858]

[15] Chen G 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 680 (in Chinese) [陈 刚 2004 **物理学报** **53** 680]

[16] Lu F L and Chen C Y 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 688 (in Chinese) [陆法林、陈昌远 2004 **物理学报** **53** 688]

[17] Yang J, Xiang A P and Zhu S D 2002 *Chin*. *J*. *Atomic Molecular Phys*. **19** 283 (in Chinese) [杨 进、向安平、朱世德 2002 **原子与分子物理学报** **19** 283]

[18] Ju G X and Ren Z Z 2003 *Int*. *J*. *Mod*. *Phys*. **18** 5757

[19] Levy-Leblond J M 1995 *Phys*. *Rev*. A **52** 1845

[20] Plastino A R, Rigo A, Casas M, Garcias F and Plastino A 1999 *Phys*. *Rev*. A **60** 4318

[21] Milanovic V and Ikovic Z 1999 *J*. *Phys*. A:*Math*. *Gen*. **32** 7001

[22] de Souza Dutra A and Almeida C A S 2000 *Phys*. *Lett*. A **275** 25

[23] Gönül B, Gönül B, Tutcu D and Özer O 2002 *Mod*. *Phys*. *Lett*. A **17** 2057

[24] Gönül B, Özer O, Gönül B and Üzgün F 2002 *Mod*. *Phys*. *Lett*. A **17** 2453

[25] Alhaidari A D 2002 *Phys*. *Rev*. A **66** 042116

[26] Koc R and Koca M 2003 *J*. *Phys*. A:*Math*. *Gen*. **36** 8105

[27] Bastard G 1988 *Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructure* (Les Ulis:Editions de Physique)

[28] Serra L I and Lipparini E 1997 *Europhys*. *Lett*. **40** 667

[29] Barranco M, Pi M, Gatica S M, Hernandez E S and Navarro J 1997 *Phys*. *Rev*. B **56** 8997

[30] Quigg C and Rosen J L 1979 *Phys*. *Rep*. **56** 167

Analytical solutions of the three-dimensional Schrödinger equation with an exponentially changing effective mass*

Cai Chang-Ying[1)3)] Ren Zhong-Zhou[1)2)] Ju Guo-Xing[1)†]

1)（Department of Physics，Nanjing University，Nanjing 210008，China）

2)（Center of Theoretical Nuclear Physics，National Laboratory of Heavy-Ion Accelerator，Lanzhou 730000，China）

3)（Department of Physics，Jinggangshan University，Ji'an 343009，China）

（Received 2 July 2004；revised manuscript received 13 September 2004）

Abstract

For an effective mass distribution that is an exponential function of the radial coordinate，the analytical solutions of the three-dimensional Schrödinger equation are obtained by using the coordinate transformation method for the reference problems with Coulomb potential，Kratzer potential and spherically square potential well of infinite depth，respectively. The explicit analytical expressions for the energy eigenvalues and the corresponding eigenfunctions of the three systems are presented.

Keywords：Schrödinger equation，analytical solutions，coordinate transformation，effective mass

PACC：0365，0365G

* Project supported by the National Natural Science Found for Outstanding Young Scientists of China（Grant No.10125521），the Doctorate Foundation of the Stale Education Ministry of China（Grant No.20010284036），the State Key Development Program for Basic Research of China（Grant No.G2000077400），Chinese Academy of Sciences Knowledge Innovation Project（KJCX2-SW-N02），the National Natural Science Foundation of China（Grant No.60371013）.

† E-mail：jugx@nju.edu.cn