第 54 卷 第 6 期 2005 年 6 月
1000-3290/2005/54(06)/2580-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.6,June,2005

Liu 混沌系统的非线性反馈同步控制*

陈志盛† 孙克辉 张泰山‡

(中南大学信息科学与工程学院,长沙 410083)

(2004 年 9 月 20 日收到;2004 年 10 月 28 日收到修改稿)

研究了新型混沌系统——Liu 系统的同步控制问题.基于 Lyapunov 稳定性理论,采用非线性反馈控制方法,给出了 Liu 系统实现自同步的充分条件以及控制律参数的取值范围;结合参数自适应控制方法,实现了 Liu 混沌系统与统一混沌系统的异结构系统快速同步.数值仿真证明了该方法的有效性.

关键词:Liu 混沌系统,混沌同步,非线性反馈控制,参数自适应控制

PACC:0545

1. 引 言

混沌及其应用是近年来非线性科学研究领域中一个热点问题.混沌系统有着复杂的动力学行为.目前人们已知的混沌吸引子并不多.1963 年,Lorenz 在三维自治系统中发现了第一个混沌吸引子[1];1999 年陈关荣等[2]利用反控制方法发现了一个与 Lorenz 系统类似但拓扑不等价的 Chen 混沌系统;在 2001 年和 2002 年,吕金虎等人相继发现了 Lü 混沌系统和连接上述三个混沌系统的统一混沌系统[3,4].最近,刘崇新等[5]又提出了一种新的混沌系统——Liu 系统,其数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x), \\ \dot{y} = bx - kxz, \\ \dot{z} = -cz + hx^2, \end{cases} \tag{1}$$

其中 a, b, k, c, h 为系统参数,当 $a = 10, b = 40, k = 1, c = 2.5, h = 4$ 时,系统(1)处于混沌状态,其混沌吸引子如图 1 所示.由于 Liu 系统是一个新的混沌系统,开展其动力学特性及应用研究具有重要的理论意义和实际价值.

自从 Pecora 和 Carroll 提出驱动-响应同步方法[6],线性和非线性反馈控制[7—9]、自适应控制[10,11]、主动控制[12]、脉冲控制[13]等多种不同方法都被成功地应用于混沌系统的控制与同步当中.本文结合非线性反馈控制和参数自适应控制方法,分别研究了 Liu 混沌系统的自同步及其与异结构混沌系统之间的同步问题.

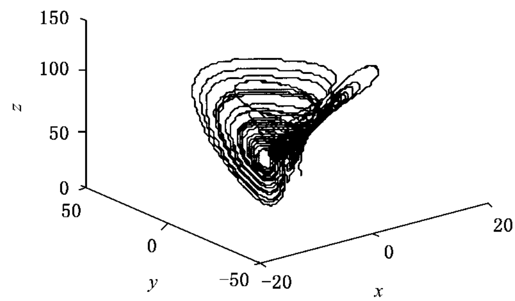

图 1 Liu 混沌系统的混沌吸引子

2. Liu 系统的自同步反馈控制

首先研究具有相同参数、不同初值的两个 Liu 系统之间的同步问题.设(1)式为驱动系统,受控响应 Liu 系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10(y_1 - x_1) + u_1(t), \\ \dot{y}_1 = 40x_1 - x_1 z_1 + u_2(t), \\ \dot{z}_1 = -2.5z_1 + 4x_1^2 + u_3(t), \end{cases} \tag{2}$$

其中 u_1, u_2, u_3 为系统同步控制变量.设响应系统(2)和驱动系统(1)之间的状态误差为 $e_1 = x_1 - x$,

---

* 湖南省自然科学基金(批准号:04JJ3077)资助的课题.

† 联系人:E-mail:czs_csu@163.com

‡ 永久联系人:E-mail:auto203@mail.csu.edu.cn

$e_2=y_1-y$,$e_3=z_1-z$,误差向量 $e=[e_1,e_2,e_3]^{\mathrm{T}}$.由(2)式减去(1)式获得误差系统方程:

$$\begin{cases}\dot{e}_1 = 10(e_2-e_1)+u_1(t),\\ \dot{e}_2 = 40e_1 - x_1z_1 + xz + u_2(t),\\ \dot{e}_3 = -2.5e_3+4x_1^2-4x^2+u_3(t).\end{cases} \tag{3}$$

由此可将 Liu(1)式与(2)式的同步问题转化为误差系统(3)在原点(0,0,0)的稳定性问题.若选择适当的控制律 $u=[u_1\quad u_2\quad u_3]^{\mathrm{T}}$ 使误差系统(3)稳定,则响应系统(2)与驱动系统(1)实现同步.

定理 1　对于驱动系统(1)式和响应系统(2)式,若系统的非线性反馈控制律取

$$\begin{cases}u_1(t)=0,\\ u_2(t)=pe_2+e_1(z+e_3)+xe_3,\\ u_3(t)=-4e_1(e_1+2x),\end{cases} \tag{4}$$

则当控制器参数 $p<-62.5$ 时,驱动系统(1)式和响应系统(2)式以指数速率渐近同步,即对于任意初始值 $[x(0),y(0),z(0)]^{\mathrm{T}}$ 和 $[x_1(0),y_1(0),z_1(0)]^{\mathrm{T}}$,有 $\lim\limits_{t\to\infty}|e|=0$.

证明　将控制律(4)式代入误差系统(3)式并整理得

$$\begin{cases}\dot{e}_1 = 10(e_2-e_1),\\ \dot{e}_2 = 40e_1+pe_2,\\ \dot{e}_3 = -2.5e_3.\end{cases} \tag{5}$$

为获得控制器参数 p 的取值范围,构造如下 Lyapunov 函数

$$V=\frac{1}{2}(e_1^2+e_2^2+e_3^2). \tag{6}$$

将(6)式沿误差 e 求导,同时综合(5)式,有

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= e_1\dot{e}_1+e_2\dot{e}_2+e_3\dot{e}_3\\ &= -10(e_1-2.5e_2)^2+(p+62.5)e_2^2\\ &\quad -2.5e_3^2.\end{aligned} \tag{7}$$

显然,当 $p<-62.5$ 时,必有 $\dot{V}<0$,误差系统(3)式以指数速率收敛于全局平衡点 $e=0$,即响应系统(2)式与驱动系统(1)式实现同步.证毕.

用 Matlab6.5 进行数值仿真,设驱动系统(1)式初始值取为 $x(0)=5$,$y(0)=3$,$z(0)=7$,响应系统(2)式初始值为 $x_1(0)=-5$,$y_1(0)=8$,$z_1(0)=5$,控制器参数取 $p=-63$,同步系统误差 $|e|=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}$.采用步长为 0.001 的四阶龙格-库塔法进行仿真,Liu 混沌系统同步系统误差收敛曲线如图 2 所示.由仿真结果可知,控制律(4)式能使 Liu 系统(1)式和(2)式快速单调同步,同时由于最终误差 e 趋近于零,因此控制律 u 也将趋近于零,从而不会改变响应系统(2)式的混沌动力学特性.

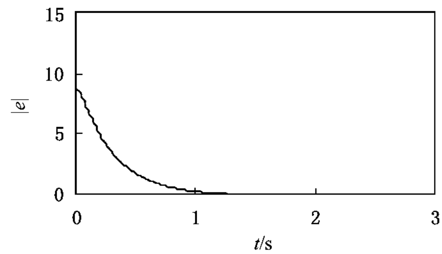

图 2　自同步系统的误差收敛曲线

3. Liu 系统与统一混沌系统的同步控制

统一混沌系统是一种单参数、全域性的连续时间混沌系统,它连接了 Lorenz,Chen 和 Lü 混沌系统,在保密通信等领域获得了广泛应用,因此研究 Liu 系统与统一混沌系统间的同步问题具有重要的实际意义.统一混沌系统的数学模型为

$$\begin{cases}\dot{x} = (25\alpha+10)(y-x),\\ \dot{y} = (28-35\alpha)x - xz + (29\alpha-1)y,\\ \dot{z} = xy-(8+\alpha)z/3.\end{cases} \tag{8}$$

其中系统参数 $\alpha\in[0,1]$,在此范围内统一系统具有全域性混沌特性.根据文献[4],当 $\alpha\in[0,0.8)$ 时,统一系统属于广义 Lorenz 系统;当 $\alpha\in(0.8,1]$ 时,统一系统属于广义 Chen 系统;而当 $\alpha=0.8$ 时,统一系统属于 Lü 系统.

以统一混沌系统(8)式作为驱动系统,Liu 混沌系统(2)式作为响应系统.设系统误差变量为:$e_1=x_1-x$,$e_2=y_1-y$,$e_3=z_1-z$,误差向量 $e=[e_1,e_2,e_3]^{\mathrm{T}}$,则两系统的同步误差可描述为

$$\begin{cases}\dot{e}_1 = (25\alpha+10)(e_2-e_1)-25\alpha(y_1-x_1)+u_1(t),\\ \dot{e}_2 = (28-35\alpha)e_1+(12+35\alpha)x_1-x_1z_1+xz-(29\alpha-1)y+u_2(t),\\ \dot{e}_3 = -(8+\alpha)e_3/3+(0.5+\alpha)z_1/3+4x_1^2-xy+u_3(t).\end{cases} \tag{9}$$

定理 2　对于由 Liu 混沌系统和统一混沌系统构成的同步系统,若同步系统控制律为

$$\begin{cases} u_1(t) = -25\hat{\alpha}(e_2 - e_1) + 25\alpha(y_1 - x_1) - 10e_2, \\ u_2(t) = -(28 - 35\hat{\alpha})e_1 - (12 + 35\alpha)x_1 + x_1 z_1 - xz + (29\alpha - 1)y - e_2, \\ u_3(t) = (5 + \hat{\alpha})e_3/3 - (0.5 + \alpha)z_1/3 - 4x_1^2 + xy, \end{cases} \tag{10}$$

且同步系统参数自适应律 $\hat{\alpha}$ 为

$$\dot{\hat{\alpha}} = -10e_1e_2 - 25e_1^2 - e_3^2/3 + \lambda(\alpha - \hat{\alpha}), \tag{11}$$

其中 λ 为可调的常系数，当 $\lambda > 0$ 时，则 Liu 混沌系统与统一混沌系统可实现同步.

证明　将(10)式代入(9)式得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = 25(\alpha - \hat{\alpha})(e_2 - e_1) - 10e_1, \\ \dot{e}_2 = -35(\alpha - \hat{\alpha})e_1 - e_2, \\ \dot{e}_3 = -(\alpha - \hat{\alpha})e_3/3 - e_3. \end{cases} \tag{12}$$

以 e_1, e_2, e_3 和 $\alpha - \hat{\alpha}$ 为变量构造 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + \frac{1}{2}(\alpha - \hat{\alpha})^2. \tag{13}$$

设 $\tilde{\alpha} = \alpha - \hat{\alpha}$，显然有 $\dot{\tilde{\alpha}} = -\dot{\hat{\alpha}}$. 将函数 V 沿(12)式求导，同时结合(11)式有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3 - (\alpha - \hat{\alpha})\dot{\hat{\alpha}} \\ &= -[10e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \lambda(\alpha - \hat{\alpha})^2]. \end{aligned} \tag{14}$$

显然，当 $\lambda > 0$ 时，$\dot{V} < 0$，根据 Lyapunov 稳定性理论，误差系统(9)式将以指数速率收敛于平衡点 $e = 0$，$\alpha - \hat{\alpha} = 0$，定理 2 可证.□

根据定理 2 作统一混沌系统(8)式和 Liu 混沌系统(2)式的同步数值仿真实验，对于统一混沌系统(8)式，当参数 α 取[0,1]中的任意值时，该系统都处于混沌状态. 设参数 $\alpha = 0.8$，参数估计值 $\hat{\alpha}$ 的初值为 $\hat{\alpha}(0) = 0.3$，两系统初始状态分别为 $x(0) = 11$，$y(0) = 5$，$z(0) = -4$ 和 $x_1(0) = -5$，$y_1(0) = 8$，$z_1(0) = 5$，控制器可调系数 λ 分别取 1 和 10. 采用步长为 0.001 的四阶龙格-库塔法进行仿真，异结构混沌同步系统误差及参数估计值 $\hat{\alpha}$ 的收敛曲线如图 3、图 4 所示，其中系统综合误差

$$|e| = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}.$$

根据理论分析和图 3、图 4 的仿真结果可得到如下结论：1)在控制律(10)式和参数自适应律(11)式作用下，统一混沌系统和 Liu 混沌系统的同步建立时间短；2)控制律中的参数估计值 $\hat{\alpha}$ 初值的选取对同步结果无影响；3)控制律中的常系数 λ 取值可以调节同步系统误差及参数估计值 $\hat{\alpha}$ 的收敛速度，λ 越大，收敛速度越快.

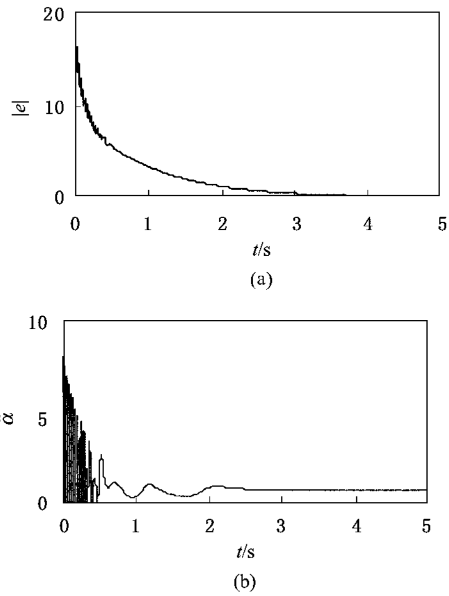

图 3　$\lambda = 1$ 时，异结构同步系统误差 $|e|$ 与参数估计值 $\hat{\alpha}$ 的收敛曲线

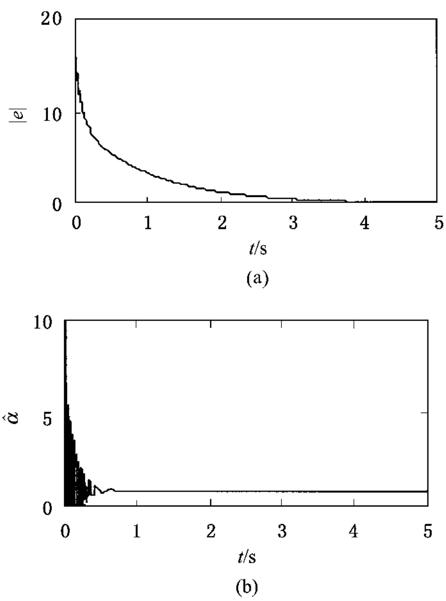

图 4　$\lambda = 10$ 时，异结构同步系统误差 $|e|$ 与参数估计值 $\hat{\alpha}$ 的收敛曲线

4. 结　论

Liu 混沌系统是一种新型混沌系统，有关该系统

的研究还是一个开放问题.本文采用非线性反馈控制和参数自适应控制方法,研究了该系统的自同步以及与统一混沌系统之间的异结构系统同步控制问题.本文所提出的控制律易于实现,且收敛速度快.如何进一步简化控制律结构以及将 Liu 系统应用于保密通信等领域是作者以后将要进行的工作.

[1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 131
[2] Chen G R and Ueta T 1999 *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** 1465
[3] Lü J H, Chen G R and Zhang S C 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 1001
[4] Lü J H *et al* 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 2917
[5] Liu C X *et al* 2004 *Chaos, Solitons Fract.* **22** 1031
[6] Pecora L M and Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
[7] Tao C H, Lu J A and Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 (in Chinese) [陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497]
[8] Tan W *et al* 2004 *Chin. Phys.* **13** 459
[9] Guan X P, He Y H and Wu J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2718 (in Chinese) [关新平、何宴辉、邬 晶 2003 物理学报 **52** 2718]
[10] Yu Y G and Zhang S C 2004 *Chaos, Solitons Fract.* **21** 643
[11] Li G H, Xu D M and Zhou S P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 379 (in Chinese) [李国辉、徐得名、周世平 2004 物理学报 **53** 379]
[12] Ho M C and Hung Y C 2002 *Phys. Lett.* A **301** 424
[13] Khadra A, Liu X Z and Shen X M 2003 *IEEE Trans. CAS*-I **50** 341

Nonlinear feedback synchronization control of Liu chaotic system*

Chen Zhi-Sheng† Sun Ke-Hui Zhang Tai-Shan‡
(*School of Information-Science and Engineering, Central South University, Changsha* 410083, *China*)
(Received 20 September 2004; revised manuscript received 28 October 2004)

Abstract

Synchronization of a new chaotic system called Liu chaotic system is studied. Based on Lyapunov stabilization theorem and nonlinear feedback control method, the sufficient conditions and range of the controller's parameter for self-synchronization of Liu chaotic systems are derived. By combining the parameter adaptive control method and the nonlinear feedback control method, the synchronization of Liu system at speed with unified chaotic systems is implemented. Simulation results validate the proposed synchronization methode.

Keywords: Liu chaotic system, chaotic synchronization, nonlinear feedback control, parameter adaptive control
PACC: 0545

* Project supported by Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 04JJ3077).
† E-mail: czs_csu@163.com
‡ E-mail: auto203@mail.csu.edu.cn