第 54 卷 第 6 期 2005 年 6 月
1000-3290/2005/54(06)/2611-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.6, June, 2005
©2005 Chin. Phys. Soc.

非 Abel Chern-Simons 理论中量子水平的分数自旋性质

张 莹† 李子平‡

(北京工业大学应用数理学院,北京 100022)

(2004 年 7 月 23 日收到;2004 年 11 月 4 日收到修改稿)

与经典水平下的研究不同,研究了(2+1)维含非 Abel Chern-Simons 项的非线性 σ 模型量子水平的分数自旋性质.根据约束 Hamilton 系统的 Faddeev-Senjanovic(FS)路径积分量子化方案,对该系统进行量子化,由量子 Noether 定理给出了量子守恒角动量,说明了在量子水平上该系统仍具有分数自旋的性质.

关键词:约束 Hamilton 系统,分数自旋,$O(3)$非线性 σ 模型

PACC:1110,1130

$O(3)$非线性 σ 模型在凝聚态物理和高能物理领域,是应用较为广泛的场论模型,并在高温超导领域有重要应用[1].这个模型一直受到人们的广泛关注[2,3].Wilcheck 和 Zee 提出由于 Hopf 项的存在而使(2+1)维非线性 σ 模型具有分数自旋和分数统计的性质[4].在(2+1)维含 Chern-Simons(CS)项与物质场耦合的 Lagrange 量所描述的系统,对 Abel Chern-Simons 理论中呈现出分数自旋和分数统计性质,这在解释分数量子 Hall 效应乃至高温超导有重要意义[5,6].对于含 Abel CS 项的(2+1)维非线性 σ 模型在经典和量子水平下可给出分数自旋和分数统计的性质[7,8].近年来一些作者在经典水平下讨论了非 Abel CS 理论的经典角动量,并指出了非 Abel CS 项存在,可改变系统的自旋统计性质[9,10].文献[11]讨论了含非 Abel CS 项的(2+1)维非线性 σ 模型的分数自旋性质,但工作是经典水平下的,其结果在量子水平下是否有效还值得仔细研究.本文将对含非 Abel CS 项的(2+1)维 $O(3)$非线性 σ 模型采用 FS 路径积分量子化方法,对该系统进行量子化,讨论其量子对称性,由量子 Noether 定理导出量子守恒角动量,并严格地在量子水平下说明了文献[11]中的模型仍具有分数自旋和分数统计性质.

2+1 维 $O(3)$非线性 σ 模型与非 Abel CS 规范场耦合的拉氏量为[11]

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2f}D_{\mu}n^{a}D^{\mu}n^{a} + \kappa\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}^{a}A_{\lambda}^{a} + \frac{1}{3}\varepsilon^{abc}A_{\mu}^{a}A_{\nu}^{b}A_{\lambda}^{c}\right), \tag{1}$$

其中 f 为耦合常数,$D_{\mu}n^{a} = \partial_{\mu}n^{a} + \varepsilon^{abc}A_{\mu}^{b}n^{c}$.与场量 n^{a}($(n^{a})^{2}=1$)和 A_{μ} 相对应的正则动量分别为

$$\pi^{a} = D_{0}n^{a}, \pi_{0}^{a} = 0,$$
$$\pi_{i}^{a} = \kappa\varepsilon^{ij}A_{j}^{a}, \tag{2}$$

式中 $\varepsilon^{ij} = \varepsilon^{0ij}$.初级约束分别为

$$\Lambda_{1}^{a} = \pi^{a0} \approx 0, \tag{3a}$$
$$\theta_{1}^{a} = \pi_{1}^{a} - \kappa\varepsilon^{ij}A_{j}^{a} \approx 0, \tag{3b}$$
$$\theta_{2}^{a} = \pi_{2}^{a} - \kappa\varepsilon^{ij}A_{j}^{a} \approx 0, \tag{3c}$$
$$\theta_{3}^{a} = (n^{a})^{2} - 1 \approx 0, \tag{3d}$$

其中,符号‘$\approx$’表示 Dirac 意义上的弱等.该系统的正则哈密顿量密度

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{c} &= \pi_{\mu}\dot{A}^{\mu} + \pi^{a}\dot{n}^{a} - \mathscr{L}\\ &= -D_{i}n^{a}D^{i}n^{a} - A_{0}^{a}\left[\frac{\kappa}{2}\varepsilon^{ij}F_{ij}^{a} + J^{0a}\right].\end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$F_{ij}^{a} = \partial_{i}A_{j}^{a} - \partial_{j}A_{i}^{a} + \varepsilon^{abc}A_{i}^{b}A_{j}^{c}, \tag{5}$$
$$J_{0}^{a} = \mathrm{i}\pi^{b}\varepsilon^{abc}n^{c}. \tag{6}$$

该系统的总哈密顿量为

$$\mathscr{H}_{\mathrm{T}} = \int\mathrm{d}^{2}x\,(H_{c} + \lambda_{1}^{a}\Lambda_{1}^{a} + \mu_{1}^{a}\theta_{1}^{a} + \mu_{2}^{a}\theta_{2}^{a} + \mu_{3}^{a}\theta_{3}^{a}). \tag{7}$$

由初级约束的自洽性条件 $\{\Lambda_{1}^{a}, H_{\mathrm{T}}\} \approx 0$ 和 $\{\theta_{3}^{a}, H_{\mathrm{T}}\} \approx 0$ 分别给出次级约束

†E-mail:zhangying792002@yahoo.com.cn cc cezy79@163.com

‡E-mail:zpli@solaris.bjpu.edu.cn

$$\Lambda_2^a = \frac{\kappa}{2}\varepsilon^{ij}F_{ij}^a + J_0^a \approx 0,$$

$$\theta_4^a = n^a\pi^a \approx 0, \tag{8}$$

次级约束的自洽性条件不再产生新的约束.不难验证,Λ_1^a 和 Λ_2^a 为第一类约束,$\theta_1^a\theta_2^a\theta_3^a$ 和 θ_4^a 为第二类约束.按约束系统的 FS 路径积分量子化方法,对每一个第一类约束需选取一个相应的规范条件.考虑 Coulomb 规范 $\Omega_1^a = \partial_i A_i^a \approx 0$,由其自洽性要求 $\partial_i \dot{A}_i^a = \{\Omega_0^a, H_T\} \approx 0$,给出另一规范约束为

$$\Omega_2^a = \nabla^2 A_0^a + \partial^i\pi_i^a - \varepsilon^{abc}A_i^b\partial^i A_0^c \approx 0. \tag{9}$$

按 FS 量子化方案,相空间 Green 函数的生成泛函为[12]

$$Z[J,K] = \int D\varphi_\alpha^a D\pi_\alpha^a \prod_i \delta(\Lambda^a)\delta(\Omega^a)\delta(\theta_i^a) \times \det|\{\Lambda^a,\Omega^a\}| \cdot (\det|\{\theta_i^a,\theta_j^a\}|)^{1/2} \times \exp\left\{\int d^3x(\pi_\alpha^a\dot{\varphi}_a^\alpha - \mathscr{H}_c + J_\alpha^a\varphi_a^\alpha + K_\alpha^a\pi_\alpha^a)\right\}, \tag{10}$$

式中因子 $\det|\{\theta_i^a,\theta_j^a\}| = 4(n^a(x))^4$,而 $\det|\{\Lambda^a, \Omega^b\}| = \det M^{ab}\delta^{(2)}(x-y)$,其中

$$M^{ac} = (\delta^{ac}\nabla^2 - \varepsilon^{abc}A_i^b\partial^i)\delta(x-y) \tag{11}$$

因子 $\det|\{\Lambda^a,\Omega^b\}|\delta(\partial^i A_i^a)$ 可用因子来代替 $\det M_L\delta(\partial^\mu A_\mu^a)$[12].利用 δ 函数和 Grassmann 变量积分的性质,可得相空间中 Green 函数的生成泛函为[10,13]

$$Z[J_a^\alpha, K_\alpha^a, \bar{\xi}_a, \xi_a, U_a^l, V_a^n, W_a^i] = \int \mathscr{D}\phi_\alpha^a \mathscr{D}\pi_a^\alpha \mathscr{D}\bar{C}^a \mathscr{D}C^a \times \exp\left\{\int d^3x(\mathscr{L}_{\rm eff}^P + J_a^\alpha\phi_\alpha^a + K_\alpha^a\pi_a^\alpha + \bar{\xi}_a C^a + \bar{C}^a\xi_a + U_a^l\lambda_l^a + V_a^n\mu_n^a + W_a^i\omega_i^a)\right\}, \tag{12}$$

其中

$$\mathscr{L}_{\rm eff}^P = \mathscr{L}^P + \mathscr{L}_m + \mathscr{L}_{gh}, \tag{13}$$

$$\mathscr{L}^P = \pi_a\dot{n}^a + \pi^\mu\dot{A}_\mu + \bar{P}_a\dot{C}^a + \dot{\bar{C}}^a P_a - \mathscr{H}_c, \tag{14}$$

$$\mathscr{L}_m = \lambda_l^a\Lambda_l^a + \mu_n^a\Omega_n^a + \omega_i^a\theta_i^a, \tag{15}$$

$$\mathscr{L}_{gh} = -\partial^\mu\bar{C}^a D_{b\mu}^a C^b, \tag{16}$$

λ_l, μ_n 和 ω_i 为乘子场,C 和 $\bar{C}$ 为鬼场(Grassmann 变量),$(J^\alpha, K_\alpha, U^l, V^n, W^i)$ 是分别对场 $(\phi_\alpha, \pi^\alpha, \lambda_l, \mu_n, \omega_i)$ 引入的外源,(K_a, K_μ) 是分别对动量 (π^a, π^μ) 引入的外源.$\bar{P}_a$ 和 P_a 分别为鬼场 C^a 和 $\bar{C}^a$ 的正则动量,$\bar{\xi}_a$ 和 ξ_a 分别为鬼场 C^a 和 $\bar{C}^a$ 的外源.

如果在下面整体变换

$$\begin{cases} x^{\mu'} = x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma\tau^{\mu\sigma}(x,\varphi,\pi) \\ \varphi'(x') = \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + \varepsilon_\sigma\xi^\sigma(x,\varphi,\pi) \\ \pi'(x') = \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + \varepsilon_\sigma\eta^\sigma(x,\varphi,\pi) \end{cases} \tag{17}$$

下,有效作用量 $I_{\rm eff}^P = \int d^2x\mathscr{L}_{\rm eff}^P$ 不变.其中 $\varepsilon_\sigma(\sigma = 1, 2,\cdots,r)$ 是无穷小参数,$\tau^{\mu\sigma}, \xi^\sigma, \eta^\sigma$ 为时间和正则变量的给定函数.且变换的 Jacobi 行列式为 1,那么由正则量子 Noether 定理,有量子守恒荷[10,13]:

$$Q^\sigma = \int_V d^3x[\pi(\xi^\sigma - \varphi_{,k}\tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_{\rm eff}\tau^{0\sigma}] = \text{const}. \quad (\sigma = 1,2,\cdots,r), \tag{18}$$

在空间转动下,有效正则作用量不变,且场量变换的 Jacobi 行列式为 1,在 (x_i, x_j) 平面内的转动下,由量子守恒律可得量子守恒量

$$L = \int d^2x\varepsilon^{ij}[x_i\pi_a\partial_j n^a + (\pi_{a\mu}S_{ij}^{\mu\nu}A_\nu^a + x_i\pi_a^\mu\partial_j A_\mu^a)] + x_i\bar{P}_a\partial_j C^a + x_i\partial_j\bar{C}^a P_a] \tag{19}$$

式中 $S_{ij}^{kl} = \delta_i^k\delta_j^l - \delta_j^k\delta_i^l$. 由于 $\mathscr{L}_{gh}$ 包含了场的微商项,故必须考虑鬼粒子对角动量的贡献[10].将(2)式代入(19)式,并利用关系式 $\varepsilon^{jk}\varepsilon_{il} = \delta_i^j\delta_l^k - \delta_l^j\delta_i^k$[14],可得

$$L = \int d^2x\varepsilon^{ij}x_i\pi_a\partial_j n^a + \int d^2x\varepsilon^{ij}\pi_{a\mu}S_{ij}^{\mu\nu}A_\nu^a + \kappa\int d^2x[\varepsilon^{ij}x_iA_j^a(\varepsilon^{lk}\partial_l A_k^a)] + \int d^2x\varepsilon^{ij}[x_i\bar{P}_a\partial_j C^a + x_i\partial_j\bar{C}^a P_a]. \tag{20}$$

场 A_μ^a 的运动方程为

$$\kappa\varepsilon^{\nu\mu\lambda}(2\partial_\mu A_\lambda^a + \varepsilon^{abc}A_\mu^b A_\lambda^c) = J^{a\nu}, \tag{21}$$

在(21)式中让 $\nu = 0$,有

$$\kappa\varepsilon^{ij}(2\partial_i A_j^a + \varepsilon^{abc}A_i^b A_j^c) = J^{a0}, \tag{22}$$

容易验证,下式

$$A_i^a(x) = -\frac{Q^a}{2\pi\kappa}\varepsilon^{ij}\frac{x^j}{x^2} \tag{23}$$

满足库伦规范 $\partial_i A_i^a = 0$ 和方程(22)[14,15].$Q^a = \int d^2x j_0^a(x)$ 是非 Abel 荷.(20)式中的第三项可以写成

$$\kappa\int d^2x[\varepsilon^{ij}x_iA_j^a(\varepsilon^{lk}\partial_l A_k^a)] = \kappa\int d^2x\partial_i(x_jA^{ja}A^{ia} - x^iA_j^aA^{ja}). \tag{24}$$

利用(23)式,得[16]

$$\int d^2x\partial_i(x_jA^{ja}A^{ia}) = 0,$$

$$\int \mathrm{d}^2 x \partial_i \left(x^i A_j^a A^{ja} \right) = -\frac{\left(Q^a\right)^2}{2\pi\kappa^2}, \tag{25}$$

这样，(20)式就变成[16]

$$\begin{aligned} L = & \int \mathrm{d}^2 x \varepsilon^{ij} x_i \pi_a \partial_j n^a + \int \mathrm{d}^2 x \varepsilon^{ij} \pi_{a\mu} S_{ij}^{\mu\nu} A_\nu^a \\ & + \int \mathrm{d}^2 x \varepsilon^{ij} \left[x_i \bar{P}_a \partial_j C^a + x_i \partial_j \bar{C}^a P_a \right] \\ & + \frac{\left(Q^2\right)^a}{2\pi\kappa}, \end{aligned} \tag{26}$$

式(26) 右边第一项为轨道角动量 ;第二项为通常的自旋角动量，它与 A_μ 场的 Maxwell 项有关 ;最后一项为附加项，仿文献[16]的分析，该项为分数自旋项. 由于鬼场 C^a 和 $\bar{C}^a$ 与其他场没有耦合，且(26)式中第三项不含 κ，鬼场对角动量虽有贡献，但其中不含 CS 系数 κ，因而不会改变分数自旋的性质.

(2+1)维时空中含非 Abel CS 项的 $O(3)$ 非线性 σ 模型在量子水平下仍出现分数自旋的性质，其自旋角动量取任意值，其大小取决于 CS 系数. 本文中将 $\theta_1 \approx 0$ 是作为初级约束来处理的. 文献[11]中系统的经典运动是由 $\mathscr{L}^* = \mathscr{L} + \nu_1 \theta_1$ 来描述，此时约束乘子场 ν_1 的正则动量 $\pi_{\nu_1} \approx 0$，不难看出由 $\pi_{\nu_1} \approx 0$ 的自洽性条件，导致次级约束 $\theta_1 \approx 0$. 此时 $\theta_1 \approx 0$ 是 $\mathscr{L}^*$ 描述的次级约束，由 $\mathscr{L}^*$ 导致的其他约束与 $\theta_1 \approx 0$ 作为初级约束结果相同，约束分类(第一类和第二类)也无变化. 可见对 $(n^a)^2 = 1$ 的两种处理方式其结果是相同的.

对于与非 Abel Chern-Simons 项耦合的其他模型，类似讨论也可得到量子水平下的分数自旋性质.

[1] Kimura M, Kobayashi H and Tsutsui I 1998 *Nucl. Phys.* B **527** 624

[2] Taejin Lee, Chekuri N R and Viswanathan K S 1989 *Phys. Rev.* D **39** 2350

[3] Karabali D and Murthy G 1987 *Phys. Rev.* D **35** 1522

[4] Wilczek F and Zee A 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 2250

[5] Manssur L R U 2000 *Phys. Lett.* B **480** 229

[6] Zhang Y, Li A M and Li Z P 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 43 (in Chinese) [张 莹、李爱民、李子平 2005 物理学报 **54** 43]

[7] Banerjee R 1994 *Nucl. Phys.* B **419** 611

[8] Bowick M J, Karabali D and Wijwardhana L C R 1986 *Nucl. Phys.* B **271** 417

[9] Antillon A, Escallona J and German G 1995 *Phys. Lett.* B **359** 5431

[10] Li Z P 1996 *Science in China* A **39** 739

[11] Nardelli G 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 2524

[12] Li Z P and Jiang J H 2002 *Symmetries in Constrained Canonical Systems* (Beijing: Science Press)

[13] Li Z P 1996 *Acta. Phys. Sin.* **45** 1601 (in Chinese) [李子平 1996 物理学报 **45** 1601]

[14] Banerjee R and Chakraborty B 1995 *Ann. Phys.* **247** 209

[15] Banerjee R and Mukherjee P 1996 *Nucl. Phys.* **478** 23

[16] Kim J K, Kim W T and Shin H 1994 *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** 6

Fractional spin in non-Abel Chern-Simons theories

Zhang Ying† Li Zi-Ping‡

(*College of Applied Science, Beijing Polytechnic University, Beijing* 100022, *China*)

(Received 23 July 2004; revised manuscript received 4 November 2004)

Abstract

The property of fractional spin of $O(3)$ non-linear sigma model with non-Abel Chern-Simons term at the quantum level is studied. This formulation is different from the classical theories. According to the rule of path integral quantization for a constrained Hamiltonian system in Faddeev-Senjanovic scheme, the system is quantized. Based on the quantal Noether theorem, the quantal conserved angular momentum is obtained and the fractional spin at the quantum level of this system is presented.

Keywords: constraint Hamiltonian system, fractional spin, $O(3)$ non-linear σ model

PACC: 1110, 1130

† E-mail: zhangying792002@yahoo.com.cn cc cezy79@163.com

‡ E-mail: zpli@solaris.bjnu.edu.cn