

洛仑兹脉冲光束的复振幅包络解和复解析信号解的比较研究^{*}

彭润伍[†] 范滇元

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

(2004 年 6 月 8 日收到, 2004 年 8 月 27 日收到修改稿)

使用复振幅包络表示式和复解析信号表示式推导了洛仑兹脉冲光束的传输公式. 通过具体数值计算对脉冲光束的复振幅包络解和复解析信号解在不同带宽时的传输进行了对比研究. 数值结果表明脉冲光束为窄带时, 在传输方向轴中心的一定范围内两种解是一致的, 而对于宽带脉冲光束, 复振幅包络解在轴中心较近的距离即表现出奇异性, 复解析信号解才是符合物理意义的表示式. 由数值计算得出了选择脉冲光束研究方法的条件, 并从所得公式对复振幅包络解出现奇异性的现象进行了解释.

关键词: 复振幅包络, 复解析信号, 窄带脉冲, 宽带脉冲

PACC: 4225B

1. 引言

寻找脉冲光束合理的理论模型以及对其传输特性的研究是长期以来一直受关注的研究课题^[1-13]. 在传统研究理论中, 缓变包络近似 (slowly varying envelope approximation, SVEA) 下对于脉冲光束可以引入复振幅包络 (complex amplitude envelope, CAE)^[2,4], 从而使研究过程简化, 近似过程对结果产生的影响可以忽略. 然而, 缓变包络近似成立的条件是 $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$, 其中 $\Delta\omega$ 是脉冲谱宽 (FWHM), ω_0 是载波频率. 对于由于激光技术迅速发展而出现的超短脉冲光束而言, 已经具有较大的频谱宽度, $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ 条件不再成立. 如果仍然采用缓变包络近似理论研究这类有较大带宽的脉冲光束, 得到的解会出现不符合物理意义的非光束行为 (即出现空间奇异性)^[2,4]. 但是如果采用严格的复解析信号 (complex analytic signal, CAS)^[14] 则可以避免非光束行为的出现^[4]. 因此在脉冲光束的研究中, 正确选择研究方法是必要的. 参考文献 [14] 中指出多色光 (宽带光) 的研究必须采用复解析信号, 但该书研究的多是单色光和准单色光 (窄带光, $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$). 如

何得到宽带脉冲光束正确的理论模型和对其相关特性的研究是近些年来受关注的内容^[1-13]. 其中令我们感兴趣的一个具体问题是: 究竟 $\Delta\omega/\omega_0$ 取什么值时可以采用复振幅包络表示式来研究脉冲光束, $\Delta\omega/\omega_0$ 取什么值时又必须采用复解析信号表示式? 另外相同带宽时复振幅包络解和复解析信号解的差异大小也是我们关心的内容.

本文对不同带宽洛仑兹脉冲光束的复振幅包络解和复解析信号解进行了比较研究. 首先我们得到了采用脉冲复振幅包络表示式和复解析信号表示式推出的脉冲光束传输公式, 然后通过数值计算具体比较了两者之间的差别, 明确指出两种表示式的适用范围, 得出在脉冲光束满足一定条件时两种解是一致的. 最后从得到的传输公式对复振幅包络解出现奇异性的现象进行了解释.

2. 洛仑兹脉冲光束的传输公式

频率域近轴脉冲光束的传输满足近轴波动方程

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial z}\right) \mathcal{U}(r, z, \omega) = 0, \quad (1)$$

其中 $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 为横向拉普拉斯算子, $r =$

^{*} 国家 863 计划惯性约束聚变委员会项目 (批准号 2004AA845010) 资助的课题.

[†] 联系作者 E-mail: pengrunwu@siom.ac.cn

$\sqrt{x^2 + y^2}$, $k = \omega/c$ 是波数. (1)式的解析解为^[4,15]

$$V(r, z, \omega) = \frac{iz_R}{z - iz_R} \exp\left(-i \frac{kr^2}{2(z - iz_R)} - ikz\right) P(\omega), \quad (2)$$

其中 $z_R = \frac{kw_0^2}{2}$ 为高斯光束瑞利距离(w_0 为束腰宽度), $P(\omega)$ 是仅与频率有关的频率域空间初始时($z=0$)的轴上光强. 空间域脉冲光束的解可由(2)式作傅里叶变换得到, 即

$$V(r, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iz_R}{z - iz_R} P(\omega) \times \exp\left[i\omega\left[t - \frac{z}{c} - \frac{r^2}{2c(z - iz_R)}\right]\right] d\omega. \quad (3)$$

对于等衍射长度光束, z_R 与频率无关, 并令

$$P(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega, \quad (4)$$

$$\tau = t - \frac{z}{c} - \frac{r^2}{2c(z - iz_R)}, \quad (5)$$

从而可以得到

$$V(r, z, t) = \frac{iz_R}{z - iz_R} P(\tau). \quad (6)$$

对于洛仑兹脉冲

$$p(t) = A(t) \cos(\omega_0 t), \quad (7)$$

其中

$$A(t) = \left[1 + \left(a \frac{t}{T}\right)^2\right]^{-1}, \quad (8)$$

上式中 $a = 2\sqrt{\sqrt{2}-1}$. 为讨论方便, (7)式已略去令其为与时间无关的相差 φ . 洛仑兹脉冲的傅里叶谱可由

$$P(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \exp(-i\omega t) dt \\ = \frac{1}{2} [g(\omega - \omega_0) + g^*(-\omega - \omega_0)] \quad (9)$$

得到. (9)式中

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (10)$$

严格来说脉冲复数表示为复解析信号^[4,11]

$$P(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} P(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \\ = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [g(\omega - \omega_0) + g^*(-\omega - \omega_0)] \\ \times \exp(i\omega t) d\omega. \quad (11)$$

对于窄带脉冲光束 $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$, $g(\omega - \omega_0)$ 仅在 ω_0

附近一小段取值, 忽略 $g^*(-\omega - \omega_0)$ 项, 将下限从 0 扩展到 $-\infty$ ^[4], 则

$$P_{\text{CAE}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega - \omega_0) \exp(i\omega t) d\omega \\ = A(t) \exp(i\omega_0 t). \quad (12)$$

如果没有略去相差 φ , 则上式中振幅部分为复数, 称为复振幅^[4]. (12)式即复振幅包络表示式, 是复解析信号表示式(11)式在窄带脉冲 $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ 条件下的近似. 所以当 $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ 时, 在缓变包络近似下, $P(\tau)$ 可以采用复振幅包络表示(12)式, 从而可以得到

$$V_{\text{CAE}}(r, z, t) = \frac{iz_R}{z - iz_R} [1 + (a\tau\omega_0\gamma)^2]^{-1} \\ \times \exp(-i\omega_0\tau), \quad (13)$$

其中

$$\gamma = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0 T} \quad (14)$$

表示带宽. 然而对于宽带脉冲光束, $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ 条件不成立, 缓变包络近似失效, $P(\tau)$ 必须采用(11)式的复解析信号表示式而不能再用复振幅包络表示式(12)式. (11)式中的 $P(\omega)$ 为

$$P(\omega) = 2p(\omega)\theta(\omega), \quad (15)$$

其中 $\theta(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0 \\ 0, & \omega \leq 0 \end{cases}$ 是阶跃函数, $p(\omega)$ 由(9)式给出. 因此宽带脉冲光束, $P(\tau)$ 应该为

$$P_{\text{CAS}}(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(\omega)\theta(\omega) \exp(-i\omega\tau) d\omega. \quad (16)$$

对(16)式积分后代入(6)式可以得到

$$V_{\text{CAS}}(r, z, t) = \frac{iz_R}{z - iz_R} [1 + (a\tau\omega_0\gamma)^2]^{-1} \\ \times \left[\exp(-i\omega_0\tau) - ia\tau\omega_0\gamma \exp\left(-\frac{1}{a\gamma}\right) \right]. \quad (17)$$

3. 复振幅包络解与复解析信号解的比较

图1是带宽 $\gamma = 0.3$ ($T = 1.77\text{fs}$) 的脉冲光束传输到 $z = z_R = 2.95 \times 10^3 \text{mm}$ 处的径向和时间波形, 计算参数 $w_0 = 1\text{mm}$, $\lambda_0 = 1064\text{nm}$, 即 $\omega_0 = 1.77\text{fs}^{-1}$ ($T_0 = 3.55\text{fs}$). 以下计算均取与图1相同的计算参数. 从图中看出, 沿传输方向的轴中心($r=0$)及其较近

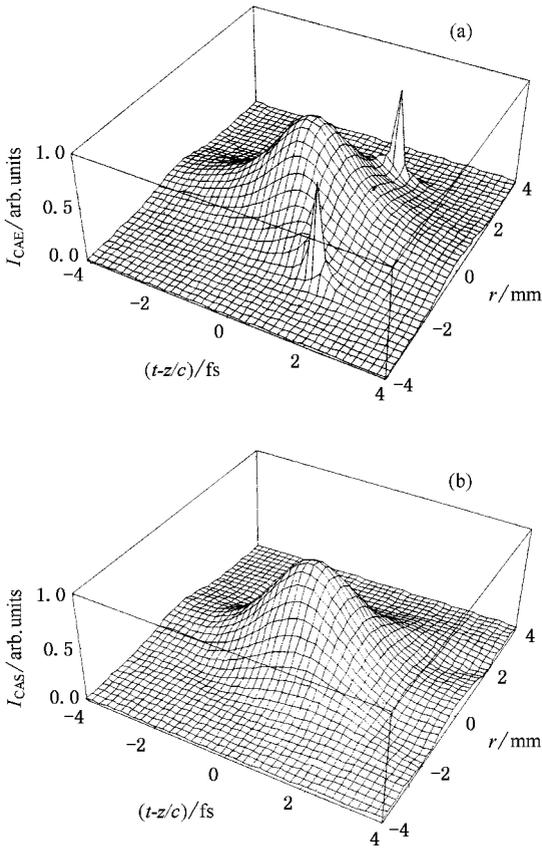


图 1 $\gamma = 0.32$ 脉冲光束在 $z = z_R = 2.95 \times 10^3$ mm 处的径向和时间波形 (a) 复振幅包络解的光强分布 (b) 复解析信号解的光强分布

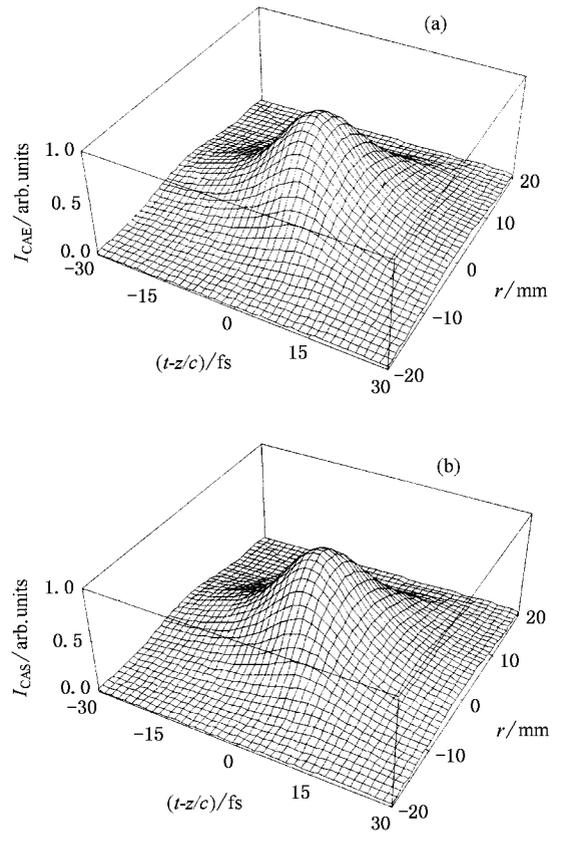


图 2 $\gamma = 0.04$ 脉冲光束在 $z = 10z_R = 2.95 \times 10^4$ mm 处的径向和时间波形 (a) 复振幅包络解的光强分布 (b) 复解析信号解的光强分布

的 $I_{CAE}(r, z, t) = |V_{CAE}(r, z, t)|^2$ 与 $I_{CAS}(r, z, t) = |V_{CAS}(r, z, t)|^2$ 分布相似, 但在轴外一定距离处 $I_{CAE}(r, z, t)$ 出现奇异点. 图 2 是带宽 $\gamma = 0.04$ ($T = 14.2$ fs) 的脉冲光束传输到 $z = 10z_R = 2.95 \times 10^4$ mm 处的径向和时间波形. 可以看出在图示范围内 $I_{CAE}(r, z, t)$ 与 $I_{CAS}(r, z, t)$ 的分布一致. 结果表明, 较大带宽的脉冲光束的复振幅包络解由于存在奇异点, 与复解析信号解存在较大的差异, 而带宽较小时二者是一致的. 但值得注意的是较小带宽时脉冲光束的复振幅包络解仍然存在奇异点, 只是其位置在离传输方向的轴中心 ($r = 0$) 较远的地方, 这从图 3 可以看出. 图 3 是复振幅包络解的奇异点径向位置 r_s 随带宽的变化. 从图 3 看出奇异点随带宽的减小和传输距离的增大而远离轴中心. 由图 3 可知带宽 $\gamma = 0.04$ ($T = 14.2$ fs) 的脉冲光束在 $z = 0$ 处的奇异点到轴中心的距离约为 4.4 mm, 而对于较大带宽 $\gamma = 0.3$ ($T = 1.77$ fs) 结果约为 1.6 mm. 如果我们把奇异点出现的位置 $r_s \geq 4.4w_0$ 作为可以忽略光束奇异

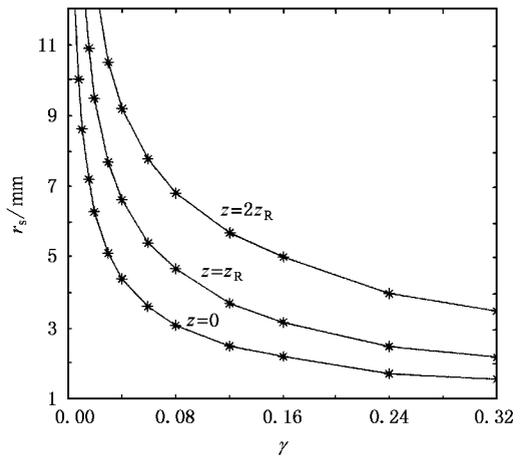


图 3 奇异点径向位置 r_s 随脉冲带宽 γ 的变化

性的条件, 则在传输距离 $z = 0$ 处脉宽 $\gamma \leq 0.04$ ($T \geq 14.2$ fs) 的脉冲光束就可以认为其复振幅包络解与复解析信号解是一致的. 因此, 参考文献 [2] 的研究方法对于窄带脉冲光束是适用的.

从图 3 知道复振幅包络解肯定存在奇异点, 只

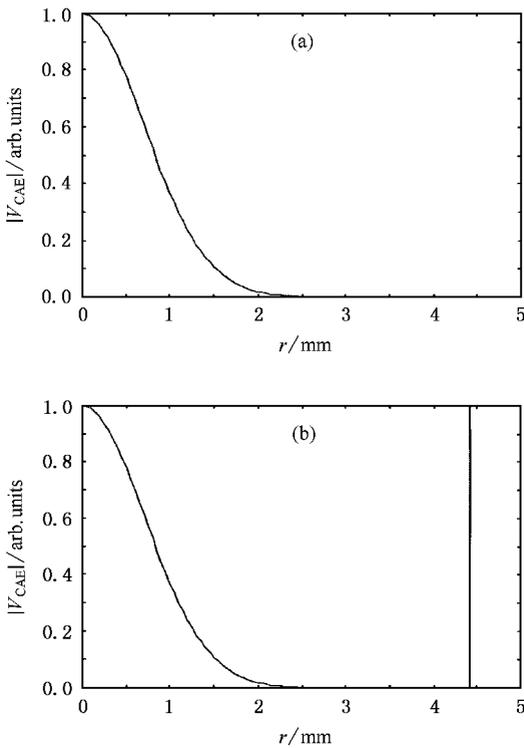


图4 $\gamma = 0.04$ 脉冲光束的复振幅包络解在不同取样间隔时场振幅的径向波形 (a)取样间隔 100nm 时的场分布;(b)取样间隔 10nm 时的场分布

是其位置随带宽不同而有变化.但是在计算作图时,我们发现图形中奇异点的出现还与考察时的取样间隔有关.如图4(a)是 $z = 0$ 和 $t = 0$ 处 $\gamma = 0.04$ ($T = 14.2\text{fs}$)的脉冲光束的光场分布.该图的取样间隔为100nm,即约为波长的0.1,这在研究光场的径向分布时已是一个很小的间隔了.由图3可知此时在 $r = 4.4\text{mm}$ 处应该有奇异点,但图中没有出现.然而当我们把取样间隔定为10nm时(如图4(b)),得到同样条件下在 $r = 4.4\text{mm}$ 处出现了奇异点.由此可知,选取恰当的取样间隔也可以忽略脉冲光束的奇异性.如果我们把取样间隔为波长0.1时奇异点没有出现作为可以忽略光束奇异性的另外一个条件,则同样得出在 $z = 0$ 处脉宽 $\gamma \leq 0.04$ ($T \geq 14.2\text{fs}$)脉冲光束的复振幅包络解与复解析信号解是一致的.

从脉冲光束的光场分布可进一步看出复振幅包络解与复解析信号解在一定范围内的差异.图5是 $\gamma = 0.32$ 脉冲光束复光场的实部在不同径向距离和不同传输距离时的时间波形.图中表明轴上($r = 0$)复振幅包络解的实部(虚线)与复解析信号解的实部(实线)差异很小,在轴外二者的差异随径向距离增加而增大.图6是 $\gamma = 0.04$ 脉冲光束复光场的实部

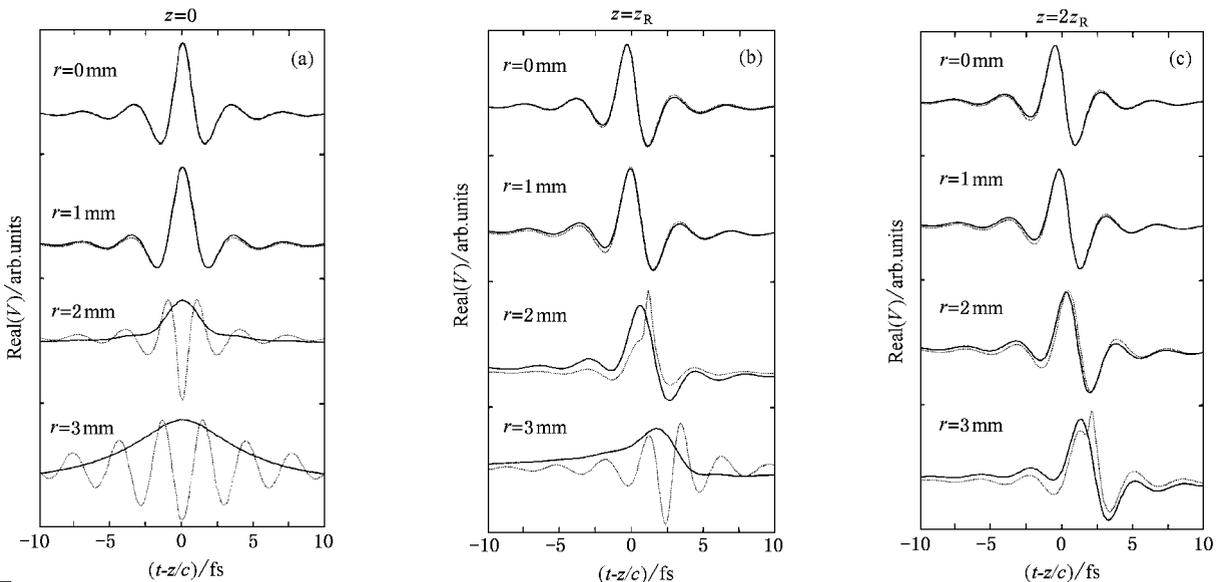


图5 $\gamma = 0.32$ 脉冲光束复光场实部的时间波形(实线是复解析信号解,虚线是复振幅包络解)

在不同径向距离和不同传输距离时的时间波形.复振幅包络解的实部(虚线)与复解析信号解的实部(实线)已趋于一致,其曲线已经重合在一起.图5和图6进一步说明较小带宽的脉冲光束可以使用复

振幅包络表示式,其结果与用复解析信号表示式得到的结果一致.较大带宽的脉冲光束则必须采用严格的复解析信号表示式.

从图1和图2还可以看到轴外光强分布相对于

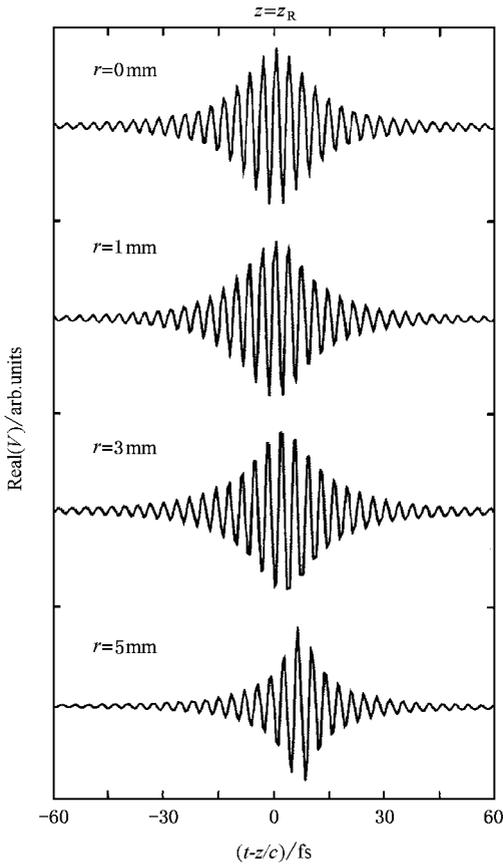


图 6 $\gamma = 0.04$ 脉冲光束复光场实部的时间波形 (实线是复解析信号解, 虚线是复振幅包络解)

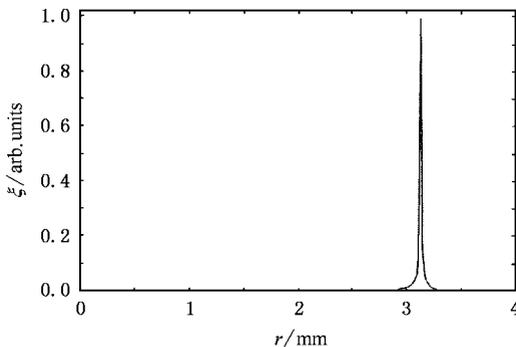


图 7 奇异性的出现 ($\gamma = 0.08$)

传输方向的轴中心 ($r = 0$) 的光强存在时间延迟, 复振幅包络解和复解析信号解的这个时间延迟是一样的. 从 (5) 式可以得到这个复数时间移动为

$$t' = \frac{r^2}{2\alpha(z - iz_R)}, \quad (18)$$

显然离轴中心越远的点时间延迟越多.

4. 复振幅包络解奇异性的物理诠释

为解释奇异性的出现和带宽对奇异点位置的影响, 将 (13) 式展开可得

$$V_{\text{CAE}}(r, z, t) = \frac{iz_R}{z - iz_R} \left\{ 1 + (\alpha\omega_0\gamma)^2 \left[t''^2 - \frac{t''^2 r^2}{\alpha(z - iz_R)} + \frac{r^4}{4c^2(z - iz_R)^2} \right] \right\}^{-1} \times \exp(-i\omega_0\tau), \quad (19)$$

其中 $t'' = t - z/c$. 上式中包含 r^4 的项是值得注意的. 在 $z = 0$ 和 $t = 0$ 时 (19) 式中中括号内的表示式为

$$\xi = \left(1 - \frac{\alpha^2 \gamma^2 r^4}{w_0^4} \right)^{-1}. \quad (20)$$

图 7 表示的是 ξ 在径向的数值. 从图 7 可以看出 ξ 有奇异点, 从而使包含 r^4 的部分最终导致脉冲光束的奇异性. 由复解析信号表示式得出的 (17) 式中的后一复数部分使光束奇异性消失, 从而复解析信号解更符合物理意义. 显然, 复振幅包络解缺少这一复数部分是因为从 (11) 式简化到 (12) 式时忽略 $g^*(-\omega - \omega_0)$ 项的缘故. 这种处理方法对窄带脉冲光束是可行的, 而对宽带脉冲光束则是不合理的. 同样从 (20) 式可以解释带宽对奇异点位置的影响. 带宽越宽的脉冲光束, γ 数值越大, 从 (20) 式中可知使 ξ 的值产生奇异性的径向距离 r 则越小, 反之亦然.

值得注意的是, 严格来说 $\gamma = 0.04$ 的脉冲光束不能称为窄带脉冲光束. 本文把 $\gamma = 0.04$ 的脉冲光束包括在窄带脉冲光束中是因为我们把在 $z = 0$ 处复包络解奇异点出现的位置 $r_s \geq 4.4w_0$ 作为可以忽略奇异性的条件, 而且在考虑的范围内 $\gamma = 0.04$ 时复包络解和复解析信号解已趋于一致. 很显然, 在我们规定的条件下, 对于 $\gamma \leq 0.04$ 的脉冲光束可以使用缓变包络近似.

5. 结 论

本文以洛仑兹脉冲光束为例对使用复振幅包络表示式和复解析信号表示式得到的脉冲光束解进行了对比研究. 对于脉冲光束, 复解析信号表示式未作任何近似, 是适合所有带宽的研究方法, 而复振幅包络表示式是在缓变包络近似下引入的表示式, 采用该表示式得到的脉冲光束解会出现奇异性. 对于

宽带脉冲光束,数值计算结果表明复振幅包络解的奇异点出现在传输方向轴中心较近的位置,这时复振幅包络解不能正确描述脉冲光束,复解析信号解才是符合物理意义的解。但是对于窄带 $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ 的脉冲光束,复振幅包络解的奇异点远离轴中心,对光束的研究几乎没有影响,其轴中心附近的场分布

与复解析信号解是一致的。因而在脉冲光束的研究中,究竟采用什么样的研究方法应根据具体情况确定,本文中通过数值计算总结得出的条件对研究方法的选取具有指导意义。同时本文中两种解的比较对宽带脉冲光束理论模型的建立以及对其相关特性的研究具有一定意义。

- [1] Christov I P 1985 *Opt. Commun.* **53** 364
 [2] Wang Z *et al* 1997 *IEEE J. Quantum Electron.* **33** 566
 [3] Liu Z Y and Fan D Y 1998 *J. Mod. Opt.* **45** 17
 [4] Porras M A 1998 *Phys. Rev. E* **58** 1086
 [5] Porras M A 1999 *J. Opt. Soc. Am. B* **16** 1468
 [6] Porras M A 2000 *Phys. Rev. E* **62** 5729
 [7] Fu X Q *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1693 (in Chinese) 傅喜泉等 2001 物理学报 **50** 1693]
 [8] Porras M A 2002 *Phys. Rev. E* **65** 026606 - 1
 [9] Fu X *et al* 2002 *Phys. Rev. E* **65** 056611
 [10] Yang Z J *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1920 (in Chinese) 杨振军等 2003 物理学报 **52** 1920]
 [11] Lu D Q *et al* 2003 *Opt. Commun.* **228** 217
 [12] Liu Z J and Lü B D 2003 *Chin. Phys.* **12** 879
 [13] Lu D Q *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1063 (in Chinese) 陆大全等 2004 物理学报 **53** 1063]
 [14] Born M and Wolf E 1999 *Principles of Optics* 7th ed (Cambridge : Cambridge University Press)
 [15] Siegman A E 1986 *Lasers* (Sausalito : University Science Books)

Comparison of Lorentz pulsed beams obtained by using complex amplitude envelope representation and complex analytic signal representation *

Peng Run-Wu[†] Fan Dian-Yuan

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics , Chinese Academy of Sciences , Shanghai 201800 , China)

(Received 8 June 2004 ; revised manuscript received 27 August 2004)

Abstract

By using complex amplitude envelope representation and complex analytic signal representation , propagation expressions of Lorentz pulsed beams are derived. Propagation properties of them with different bandwidths are illustrated by numerical calculations. It is found that they are the same in the neighbourhood of z -axis for narrowband pulses , but in the case of broadband pulses , singularities emerge near z -axis for pulsed beams obtained by using complex amplitude envelope representation and only complex analytic signal representation is applicable. The conditions to decide what representation should be chosen to study pulsed beams are given. And the origin that results in the emergence of singularity is given.

Keywords : complex amplitude envelope , complex analytic signal , narrowband pulse , broadband pulse

PACC : 4225B

* Project supported by the National High Technology Research and Development Program for Inertial Confinement Fusion of China (Grant No. 2004AA845010).

[†] Correspondence author. E-mail : pengrunwu@siom.ac.cn