

增、减光子奇偶相干态的 Wigner 函数*

杨庆怡^{1,2)} 孙敬文¹⁾ 韦联福³⁾ 丁良恩^{1)†}

¹⁾ 华东师范大学物理系光谱学与波谱学教育部重点实验室, 上海 200062)

²⁾ 广西大学物理系, 南宁 530004)

³⁾ 上海交通大学物理系, 上海 200030)

(2004 年 8 月 24 日收到, 2004 年 10 月 18 日收到修改稿)

利用 Fock 态表象下的 Wigner 函数定义, 重构了增、减光子奇偶相干态的 Wigner 函数, 并据此讨论了它们的非经典性质. 结果表明, 增光子奇偶相干态总呈现出非经典特征, 而减光子奇偶相干态分别仅在 k 为偶数和奇数时呈现出非经典特征.

关键词: 奇偶相干态, 玻色算符的逆算符, Wigner 函数

PACC: 4250

1. 引言

对系统状态进行测量是研究系统演化过程的一个重要手段. 然而, 对经典领域和量子领域中系统状态的测量存在着本质的区别. 在经典领域中, 系统的状态与相空间中的“点”相对应, 演化过程是系统在相空间中所留下的轨迹, 在时刻 t 对系统的正交分量(如坐标与动量)可以同时精确地测量. 而在量子领域中, 系统的状态用 Hilbert 空间中的矢量(称为态矢) $|\psi\rangle$ 来描述, 系统的演化过程以概率分布的特征来表现. 由于受到测不准关系的约束, 系统的正交分量(如坐标与动量)不能同时精确地测量. 单粒子的量子态是不可能观测的, 对量子态进行测量的实质是确定对在相同条件下所制备的量子态系综的概率分布^[1].

量子态的测量是当今量子力学与量子光学领域中的一个重要课题, 它是获得量子系统在演化过程中的信息的重要手段. 由于量子态的演化用概率分布来描述, 而具有准概率分布的 Wigner 函数包含了量子态在相空间中演化过程中的全部信息, Wigner 函数出现负值的情况对应着量子态的非经典特性. 因此, 对 Wigner 函数进行重构与测量也就成为了解量子态演化性质的一个重要方法. 由此, 对量子态的

测量可以转化为重构与测量量子态所对应的 Wigner 函数的问题. 目前, 人们已发展了多种重构 Wigner 函数的方法^[2], 由 Vogel 和 Risken^[3] 首先提出的层析法是其中的一种常用技术^[4-7].

在相空间中, Wigner 函数^[8] 的定义为

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int \exp(i p x) \langle q - x/2 | \hat{\rho} | q + x/2 \rangle dx, \quad (1)$$

其中, $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ 是量子态 $|\psi\rangle$ 的密度算符. 由于密度算符所对应的密度矩阵描述了量子态的概率分布及相位等信息, 而 Wigner 函数通过量子态的密度算符来定义, 因此, Wigner 函数与密度矩阵一样包含了量子态的所有信息, 对 Wigner 函数进行测量即可获得量子态在演化过程中的信息和性质. 因此, 对 Wigner 函数的重构与测量对研究量子态的演化过程有着重要的意义. 在重构量子态的 Wigner 函数方面, 人们已作出了大量的工作, 一些典型的量子态(如相干态、奇偶相干态、真空态、Fock 态以及压缩态, 等等)的 Wigner 函数先后得到重构^[9-11]. 在这些典型的量子态之外, 人们还可以利用各种方法来构造新的量子态. 例如, 利用满足如下关系^[12]:

$$\begin{aligned} \hat{a}^{-1} |n\rangle &= (n+1)^{-1/2} |n+1\rangle \\ \hat{a}^{+1} |n\rangle &= \begin{cases} n^{-1/2} |n-1\rangle & (n \neq 0) \\ 0 & (n = 0) \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

* 国家重点基础研究发展规划(973)项目(批准号 D01CG3090301)和上海重点学科资助的课题.

† 通信联系人.

来定义的玻色算符的广义逆算符 \hat{a}^{-1} 和 \hat{a}^{+1} 作用到典型的量子态上,可以得到一些新的量子态^[13-15],而嵇英华^[16]利用介观 LC 电路来制备了压缩偶相干态,并对其非经典特性进行了讨论,等等.相应地,对这些量子态的测量就自然涉及到重构这些量子态的 Wigner 函数问题.本文讨论利用玻色算符的广义逆算符作用到奇偶相干态上得到的量子态^[13]的 Wigner 函数.

2. 增、减光子奇偶相干态的 Wigner 函数

在文献^[13]中,我们用玻色湮没算符的逆算符 \hat{a}^{-k} 作用到奇偶相干态 $|\alpha_{o,e}\rangle$ 上得到新的量子态分别为

$$\begin{aligned} |\alpha_{o,-k}\rangle &= F_{o,-k} \hat{a}^{-k} |\alpha_o\rangle \\ &= \frac{F_{o,-k}}{\alpha^k \sqrt{\sinh|\alpha|^2}} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1+k}}{\sqrt{(2n+1+k)!}} |2n+1+k\rangle \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\alpha_{e,-k}\rangle &= F_{e,-k} \hat{a}^{-k} |\alpha_e\rangle \\ &= \frac{F_{e,-k}}{\alpha^k \sqrt{\cosh|\alpha|^2}} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+k}}{\sqrt{(2n+k)!}} |2n+k\rangle. \quad (4) \end{aligned}$$

其中, $F_{o,-k}$ 和 $F_{e,-k}$ 分别为量子态 $|\alpha_{o,-k}\rangle$ 和 $|\alpha_{e,-k}\rangle$ 的归一化常数,并且,

$$|F_{o,-k}|^2 = |\alpha|^{2k} \sinh|\alpha|^2 \left/ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(2n+1+k)}}{(2n+1+k)!} \right.,$$

$$|F_{e,-k}|^2 = |\alpha|^{2k} \cosh|\alpha|^2 \left/ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(2n+k)}}{(2n+k)!} \right.;$$

态(3)及(4)分别称为增光子奇偶相干态.类似地,用玻色产生算符的逆算符 \hat{a}^{+k} 作用到奇偶相干态 $|\alpha_{o,e}\rangle$ 上得到如下的减光子奇偶相干态

$$\begin{aligned} |\alpha_{o,+ - k}\rangle &= F_{o,+ - k} \hat{a}^{+k} |\alpha_o\rangle \\ &= \frac{F_{o,+ - k}}{\sqrt{\sinh|\alpha|^2}} \sum_{n=[k/2]}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &\quad \times \sqrt{(2n+1-k)!} |2n+1-k\rangle, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\alpha_{e,+ - k}\rangle &= F_{e,+ - k} \hat{a}^{+k} |\alpha_e\rangle \\ &= \frac{F_{e,+ - k}}{\sqrt{\cosh|\alpha|^2}} \sum_{n=[(k+1)/2]}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} \\ &\quad \times \sqrt{(2n-k)!} |2n-k\rangle. \quad (6) \end{aligned}$$

其中, $F_{o,+ - k}$ 和 $F_{e,+ - k}$ 分别为态 $|\alpha_{o,+ - k}\rangle$ 和 $|\alpha_{e,+ - k}\rangle$ 的归一化常数,并且,

$$|F_{o,+ - k}|^2 = \frac{\sinh|\alpha|^2}{\sum_{n=[k/2]}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(2n+1)}}{[(2n+1)!]} (2n+1-k)!},$$

$$|F_{e,+ - k}|^2 = \frac{\cosh|\alpha|^2}{\sum_{n=[(k+1)/2]}^{\infty} \frac{|\alpha|^{4n}}{[(2n)!]} (2n-k)!}.$$

这里,求和号下的方括号表示对括号中的数取整.

一般情况下,我们总可以利用(1)式的定义在相空间中重构量子态的 Wigner 函数.考虑到我们所要处理的量子态(3)–(6)的特征,选择在 Fock 态表象下 Wigner 函数的定义可以更为方便地处理所要解决的问题. Wigner 函数在 Fock 态表象下表示为^[17]

$$W(q,p) = \frac{1}{\pi} \sum_{m,n} \rho_{mn} \langle n | \hat{T}(q,p) | m \rangle, \quad (7)$$

其中, $\langle n | \hat{T}(q,p) | m \rangle = (-1)^n 2^{m-n+1} (q-ip)^{m-n} \times \sqrt{\frac{n!}{m!}} \exp(-2r^2) L_n^{m-n}(4r^2)$, $r^2 = q^2 + p^2$, $L_n^{m-n}(y)$ 为连带拉盖尔多项式.

利用 Fock 态表象下 Wigner 函数的定义(7),可以方便地得到由(3)–(6)式描述的量子态 $|\alpha_{o,-k}\rangle$, $|\alpha_{e,-k}\rangle$, $|\alpha_{o,+ - k}\rangle$ 和 $|\alpha_{e,+ - k}\rangle$ 的 Wigner 函数:

$$W_{|\alpha_{o,-k}\rangle}(r) = \frac{\exp(-2r^2) \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{r^{2(m+n+k)}}{(2m+1+k)!} (-1)^{n+1+k} 2^{(m-n)+1} L_{2n+1+k}^{m-n}(4r^2)}{\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^{2(2l+1+k)}}{(2l+1+k)!}}, \quad (8)$$

$$W_{|\alpha_{e,-k}\rangle}(r) = \frac{\exp(-2r^2) \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{r^{2(m+n+k)}}{(2m+k)!} (-1)^{n+k} 2^{(m-n)+1} L_{2n+k}^{m-n}(4r^2)}{\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^{2(2l+k)}}{(2l+k)!}}, \quad (9)$$

$$W_{| \alpha, r, +k \rangle_o}(r) = \frac{\exp(-2r^2) \sum_{m,n=[k/2]}^{\infty} \frac{r^{2m+1} (2n+1-k)!}{(2m+1)(2n+1)!} (-1)^{n+1-k} 2^{\alpha(m-n)+1} L_{2n+1-k}^{\alpha(m-n)}(4r^2)}{\pi \sum_{l=[k/2]}^{\infty} \frac{r^{2l+1}}{(2l+1)!}}, \quad (10)$$

和

$$W_{| \alpha, r, +k \rangle_e}(r) = \frac{\exp(-2r^2) \sum_{m,n=[(k+1)/2]}^{\infty} \frac{r^{4m} (2n-k)!}{(2m)(2n)!} (-1)^{n-k} 2^{\alpha(m-n)+1} L_{2n-k}^{\alpha(m-n)}(4r^2)}{\pi \sum_{l=[(k+1)/2]}^{\infty} \frac{r^{4l}}{(2l)!}}. \quad (11)$$

根据(8)–(11)式,在图1—4中我们作出了在 $k \leq 6$ 的情况下增、减光子奇偶相干态的 Wigner 函数

随变量 r 变化的分布曲线.

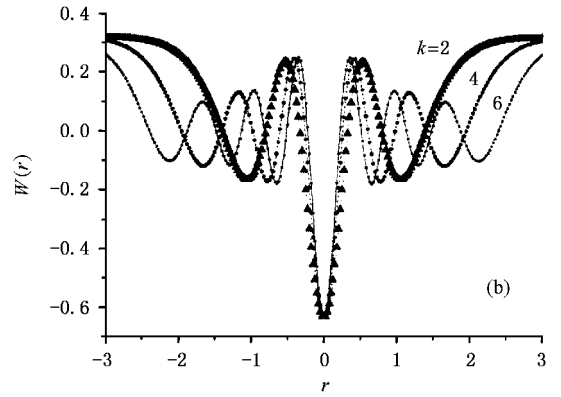
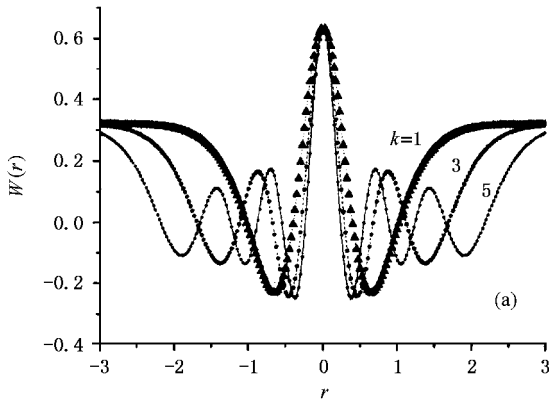


图1 $W_{| \alpha, r, +k \rangle_o}(r)$ 的分布曲线 (a) k 为奇数 (b) k 为偶数

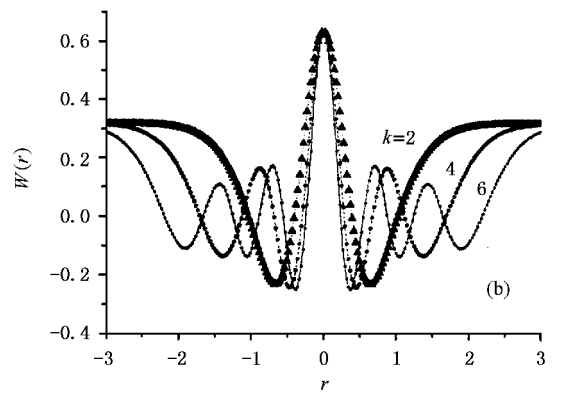
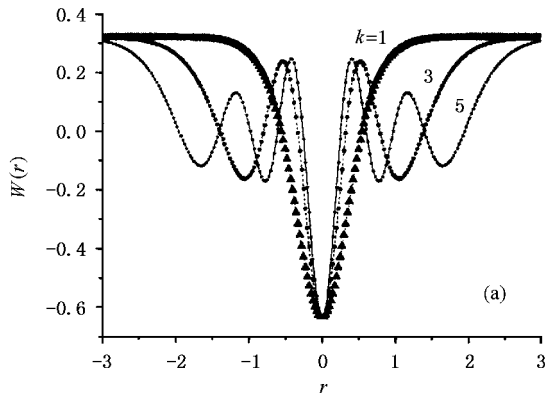


图2 $W_{| \alpha, r, -k \rangle_e}(r)$ 的分布曲线 (a) k 为奇数 (b) k 为偶数

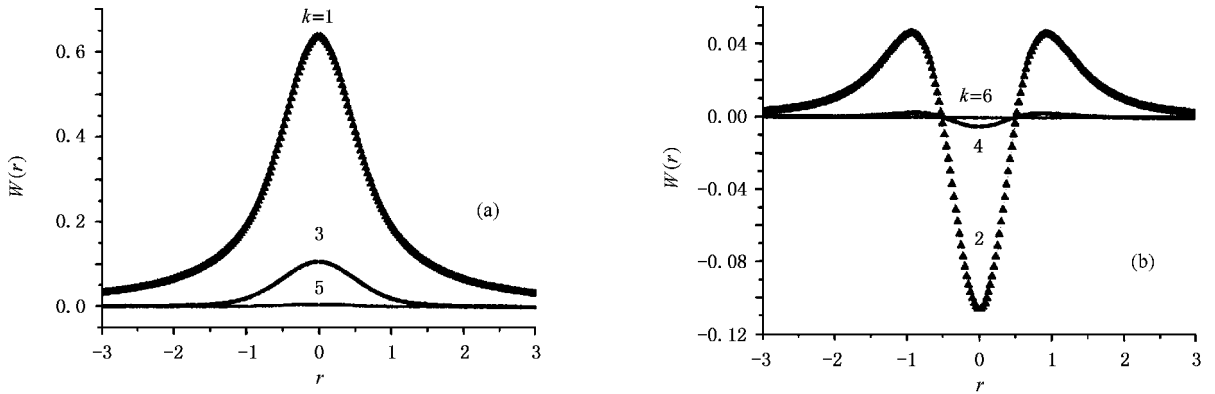


图 3 $W_{|a, + - k_o}(r)$ 的分布曲线 (a) k 为奇数 (b) k 为偶数

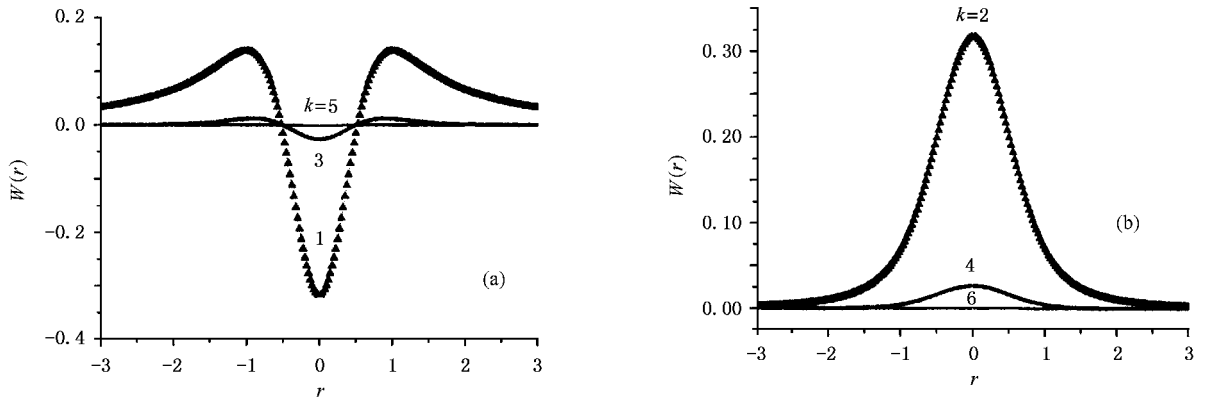


图 4 $W_{|a, + - k_e}(r)$ 的分布曲线 (a) k 为奇数 (b) k 为偶数

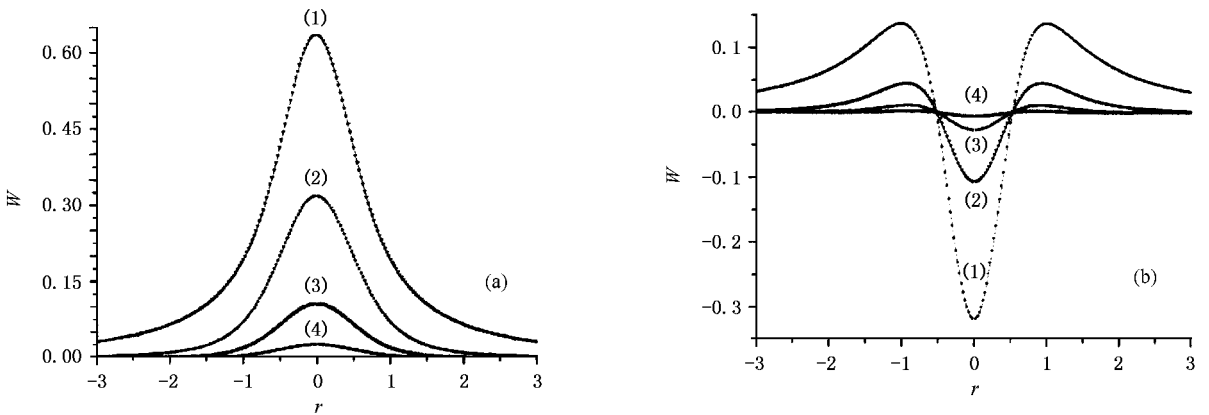


图 5 $W_{|a, + - k_o}(r)$ 与 $W_{|a, + - k_e}(r)$ 的交替变化关系 (a) (1) $W_{|a, + - 1_o}$ (2) $W_{|a, + - 2_e}$ (3) $W_{|a, + - 3_o}$ (4) $W_{|a, + - 4_e}$ (b) (1) $W_{|a, + - 1_e}$ (2) $W_{|a, + - 2_o}$ (3) $W_{|a, + - 3_e}$ (4) $W_{|a, + - 4_o}$

从图中可以看到,增、减光子奇偶相干态的 Wigner 函数具有如下的特征: (1) $W_{|a, - k_o}(r)$ 的分布

曲线有 $k+1$ 个负峰值, 而 $W_{|\alpha, -k_e}(r)$ 的分布曲线有 k 个负峰值, 随着远离中央区域负峰的幅度逐渐减小 2) 分别对 k 为奇数和偶数的情形, $W_{|\alpha, -k_o}(r)$ 和 $W_{|\alpha, -k_e}(r)$ 有大致相同的取值范围, 并且取 k 值的 $W_{|\alpha, -k_o}(r)$ 与取 $k+1$ 值的 $W_{|\alpha, -k_e}(r)$ 完全相同; 3) $W_{|\alpha, +k_o}(r)$ 在 k 取奇数时不出现负值, 取偶数时仅出现一个负峰值, 而 $W_{|\alpha, +k_e}(r)$ 在 k 取奇数时仅出现一个负峰值, 取偶数时不出现负值; 4) k 取奇(偶)数的 $W_{|\alpha, +k_o}(r)$ 与 k 取偶(奇)数的 $W_{|\alpha, +k_e}(r)$ 具有相同的线型, 但随着 k 值的增大 $W_{|\alpha, +k_o}(r)$ 与 $W_{|\alpha, +k_e}(r)$ 的幅度交替减小(见图 5)。

3. 结 论

在本文中, 我们利用在 Fock 态表象下 Wigner 函

数的定义来重构了奇偶相干态在玻色算符的逆算符作用下产生的量子态(即增、减光子奇偶相干态)的 Wigner 函数, 并研究了它们在相空间中的分布特性。结果表明, 在所构造的 Wigner 函数中, $W_{|\alpha, -k_o}(r)$ 和 $W_{|\alpha, -k_e}(r)$ 在不同的 k 值下均会出现负值, 并且出现的负峰数与 k 值有关, 而 $W_{|\alpha, +k_o}(r)$ 在 k 取偶数和 $W_{|\alpha, +k_e}(r)$ 在 k 取奇数时才会出现负值, 并且只有一个负峰, 但 $W_{|\alpha, +k_o}(r)$ 在 k 取奇数和 $W_{|\alpha, +k_e}(r)$ 在 k 取偶数时不会出现负值。由于在 Wigner 函数中所出现的负值描述了量子态的非经典特性, 因此我们的讨论能够有效地描述增、减光子奇偶相干态的这种非经典特性以及它们的变化关系。

-
- [1] Ceng J Y 2000 *Quantum Mechanics* (II) 3rd (Beijing : Science Press) p. 65 (in Chinese) [曾谨言 2000 量子力学(卷 II) 第三版] 北京 : 科学出版社] p65]
- [2] Zhang Z M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 70 (in Chinese) [张智明 2004 物理学报 **53** 70]
- [3] Vogel K and Risken H 1989 *Phys. Rev. A* **40** 2847
- [4] Franca Santos M *et al* 2001 *Phys. Rev. A* **63** 033813
- [5] Lvovsky A I *et al* 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 050402
- [6] Lvovsky A I and Babichev S A 2002 *Phys. Rev. A* **66** 011801
- [7] Leonhardt U 1995 *Phys. Rev. Lett.* **7A** 4101
- [8] Wigner E 1932 *Phys. Rev.* **40** 749
- [9] Smithey D *et al* 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1244
- [10] Leibfried D *et al* 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 4281
- [11] Man 'ko V I 1995 quant-ph/9509018
- [12] Metha C L, Roy A K and Saxena G M 1992 *Phys. Rev. A* **46** 1565
- [13] Yang Q Y, Wei L F and Ding L E 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1390 (in Chinese) [杨庆怡、韦联福、丁良恩 2003 物理学报 **52** 1390]
- [14] Wei L F, Wang S J and Xi D P 1999 *J. Opt. B: Quantum Semiclass Opt.* **1** 619
- [15] Wei L F, Wang S J and Jie Q L 1997 *Chin. Sci. Bull.* **42** 1686
- [16] Ji Y H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 332 (in Chinese) [嵇英华 2003 物理学报 **52** 332]
- [17] Tanas R, Miranowicz A and Gantsog T 1996 *Progress in Optics* (Amsterdam : North-Holland) **35** p355

Wigner functions for the photon-added and photon-depleted even and odd coherent states^{*}

Yang Qing-Yi^{1,2)} Sun Jing-Wen¹⁾ Wei Lian-Fu³⁾ Ding Liang-En^{1)†}

¹⁾Key Laboratory of Optical & Magnetic Resonance Spectroscopy, Department of Physics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

²⁾Department of Physics, Guangxi University, Nanning 530004, China)

³⁾Department of Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

(Received 24 August 2004; revised manuscript received 18 October 2004)

Abstract

By using the definition of Wigner function in Fock states representation, Wigner functions for the photon-added and photon-depleted even and odd coherent states is reconstructed. The results show that photon-added even and odd coherent states always demonstrate non-classical characteristics but photon-depleted even and odd coherent states demonstrate non-classical characteristics only when k take odd and even number respectively.

Keywords : even and odd coherent states, Boson inverse operators, Wigner function

PACC : 4250

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 001CG3090301) and the Shanghai Priority Academic Discipline.

† Corresponding author.