

# 光脉冲传输数值模拟的分步小波方法<sup>\*</sup>

陈宏平 王 箭 何国光

(浙江大学物理系, 杭州 310027)

(2003 年 10 月 20 日收到 2004 年 10 月 28 日收到修改稿)

从信号的多尺度小波分解和正交小波变换出发, 将描述光学介质中脉冲传输的非线性薛定谔方程(NLSE)表示为小波域中的分步算符形式, 给出了分步小波算法的迭代公式, 导出了线性算符在小波域中的具体表式, 并讨论微分算符的矩阵结构. 作为一个例子, 用分步小波方法(SSWM)解 NLSE, 给出了超短高斯脉冲在光纤中线性和非线性传输的波形演化, 并与解析解和分步傅里叶方法的结果作了比较. 结果表明, 分步小波方法是研究脉冲在光学介质中传输的一种有效的数值计算方法.

关键词: 分步小波方法, 光脉冲传输, 非线性薛定谔方程, 多尺度小波分解

PACC: 4281D, 0260

## 1. 引 言

光脉冲在介质中传输由非线性薛定谔方程(NLSE)描述, 一般情况下, 该方程需用数值方法求解. 在众多的数值解法中, 分步傅里叶方法(SSFM)最为常用<sup>[1,2]</sup>, 利用快速傅里叶变换, SSFM 比基于有限元方法的算法要快 2 个数量级. 近年来, 小波变换被用来研究光脉冲在非线性介质中的传输<sup>[3-8]</sup>. 小波方法将传输脉冲分解为正交小波基的线性组合, 由于在信号的尺度空间表示和小波基之间的变换是一个  $O(N)$  过程, 而基于快速傅里叶变换的从时域到频域变换的复杂度为  $O(N \log N)$ , 所以小波方法比傅里叶方法更为有效, 尤其是对于长脉冲序列. 其次, 小波的时频局域性质使小波表示能自然得到传输脉冲的时间分辨谱, 这将给光纤工程提供有用的量化信息. 此外, 小波表示消除了傅里叶方法的周期性限制, 并且在小波基下许多算符是稀疏的<sup>[9]</sup>, 从而使得在小波域中应用这些算符相当方便.

本文首先从小波变换的多分辨分析(MRA)出发, 将信号进行多尺度小波分解, 得到其在尺度空间和小波域中的近似表示, 并由此给出快速正交小波变换的概念. 然后, 将在具有损耗、色散和非线性折射介质中描述脉冲传输的 NLSE 表示为小波域中的

分步算符形式, 得到分步小波算法的迭代公式, 导出了线性算符矩阵在小波域中的具体表式, 并讨论微分算符的矩阵结构. 最后, 作为一个例子, 用分步小波方法(SSWM)解 NLSE, 给出了高斯脉冲在光纤中的线性和非线性传输的波形演化, 并将模拟结果与解析解和分步傅里叶方法的结果作了比较.

## 2. 多尺度小波分解和正交小波变换

定义尺度函数  $\phi(t)$  在  $L^2(\mathbb{R})$  空间张成闭子空间  $V_0$ , 称为零尺度空间. 将待分析信号函数  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  投影到  $V_0$  上, 由此得到  $f(t)$  在  $V_0$  空间上的分解  $f_0(t)$ . 考虑到  $V_0$  实际上是一个由尺度函数序列  $\{\phi(t-k)\}$  构成的函数空间, 而尺度函数相当于低通滤波器, 所以  $f_0(t)$  是  $f(t)$  的一个粗略近似, 许多高频细节被忽略.  $f(t)$  在  $V_0$  空间上的分解由下式给出:

$$f_0(t) = \sum_k v_{0,k} \phi(t-k), \quad (1)$$

式中, 系数  $v_{0,k}$  为  $f(t)$  和  $\phi(t-k)$  的内积:

$$v_{0,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi(t-k) dt. \quad (2)$$

为了得到  $f(t)$  的更好的近似, 可将  $\phi(t)$  通过压缩平移扩展得到包含  $V_0$  的空间  $V_1$ ,  $f(t)$  在  $V_1$  空间的投影  $f_1(t)$  将比  $f_0(t)$  保留更多的高频细节. 随着

<sup>\*</sup> 浙江省自然科学基金(批准号: 601137)资助的课题.

$n$  增大  $f_n(t)$  与  $f(t)$  的误差不断减少, 当  $n \rightarrow \infty$  空间  $V_n$  将趋近整个平方可积函数空间  $L^2(R)$ , 即

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \subset \dots \subset L^2(R). \quad (3)$$

此时  $f(t)$  在空间  $V_n$  中的投影  $f_n(t)$  由下式给出:

$$f_n(t) = \sum_k v_{n,k} \phi_{n,k}(t), \quad (4)$$

这里基函数  $\phi_{n,k}(t)$  即为  $\phi(t)$  通过压缩平移扩展得到的函数集合:

$$\phi_{n,k}(t) = 2^{n/2} \phi(2^n t - k), \quad (5)$$

且满足正交性条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n,j}(t) \phi_{n,k}(t) dt = \delta_{j,k}, \quad (6)$$

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad (7)$$

这意味着在每一个尺度  $n$  上, 尺度函数  $\{\phi_{n,k}(t)\}$  是一个  $V_n$  的正交基, 但由于空间重叠 ( $V_n \subset V_{n+1}$ ), 不同尺度的尺度函数并不相互正交, 因此,  $\{\phi_{n,k}(t)\}$  不能作为  $L^2(R)$  空间的正交基. 然而, 函数的分解表示必须能够重构才有实际意义, 而保证重构的方法之一则是使分解正交化.

为了寻找一组  $L^2(R)$  空间的正交基, 我们讨论由小波函数序列  $\{\psi_{n,k}(t)\}$  构成的空间  $W_n$ . 小波函数  $\psi_{n,k}(t)$  相当于带通滤波器, 空间  $W_n$  中包含了从空间  $V_n$  到空间  $V_{n+1}$  的必要细节, 即空间  $W_n$  是  $V_n$  在空间  $V_{n+1}$  的补空间, 三者满足

$$V_{n+1} = V_n \oplus W_n. \quad (8)$$

用 (8) 式反复迭代, 可以把  $V_n$  表示成一系列不重叠的空间的和:

$$V_n = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1}. \quad (9)$$

(9) 式表明, 只要选择合适的小波函数  $\psi(t)$  和尺度函数  $\phi(t)$ , 任何一个函数空间  $V_n$  都能写成一个粗略近似 ( $V_0$  空间) 和一系列细节 ( $W_0, \dots, W_{n-1}$  空间) 的和. 由于各细节空间  $W_n$  是不重叠的, 因此, 小波函数不仅在同一空间  $W_n$  的各个基函数是正交的, 而且不同空间的基函数也正交, 满足下式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n,j}(t) \psi_{m,k}(t) dt = \delta_{n,m} \delta_{j,k}, \quad (10)$$

并且, 在同一尺度下, 尺度函数和小波函数也正交:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n,j}(t) \psi_{n,k}(t) dt = 0. \quad (11)$$

根据 (9) 式, 函数  $f(t)$  可以在  $V_n$  上近似表示为

$$f(t) \approx f_n(t)$$

$$= \sum_k v_{0,k} \phi_{0,k}(t) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (12)$$

(12) 式表明, 一个信号可表示为尺度空间上的粗略近似和若干小波空间的细节贡献的组合. 从 (8) 式和 (9) 式可知, 小波细节部分是由粗尺度逼近部分的进一步分解得到的, 不断重复这种分解, 就可以得到任意尺度 (或分辨率) 上的逼近部分和细节部分, 这正是多分辨分析的框架<sup>[10,11]</sup>. 在实际应用中, 可以根据需要确定分解的层次, 有时甚至在零尺度空间分解就可以获得所需要的精度.

尺度函数  $\phi(t)$  和小波函数  $\psi(t)$  满足二尺度方程:

$$\phi(t) = \sum_n h_n \phi(2t - n), \quad (13)$$

$$\psi(t) = \sum_n g_n \psi(2t - n), \quad (14)$$

其中  $h_n$  和  $g_n$  分别为尺度函数和小波函数对应的滤波器, 并且满足

$$g_n = (-1)^n h_{1-n}. \quad (15)$$

二尺度方程描述了两个相邻尺度空间或相邻的尺度空间和小波空间的基函数之间的内在的本质联系<sup>[8]</sup>. 由 (4) 式中分解系数  $v_{n,k}$  和滤波器  $h_n, g_n$  求 (12) 式中的分解系数  $v_{0,k}$  和  $d_{n,k}$  就是正交小波变换. 这种分解算法和对应的重构算法统称为 Mallat 算法, 是一种纯数字的快速递推算法. 在算法实施过程中, 不需要尺度函数和小波函数的具体形式, 只要求它们存在并找出  $\{h_n\}$ , 就可以对信号快速地进行分解和重构处理. 在实际使用中, 初始数据  $\{v_{n,k}\}$  往往简单地采用  $f(t)$  的采样值  $\{f(t_k)\}$ . 理论研究表明, 当  $n$  尺度层采样间隔  $h_n \ll 1$  时, 这种替代能使 Mallat 算法准确地分解和重构原信号函数, 也不会影响对  $f(t)$  的时频分析.

### 3. 分步小波算法

#### 3.1. NLSE 分步解法的一般形式

在具有色散、损耗和非线性折射的光学介质中脉冲的传输, 由非线性薛定谔方程 (NLSE) 描述:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} - \frac{\alpha}{2} A + i\gamma |A|^2 A, \quad (16)$$

式中  $\alpha$  表示损耗效应, 介质中群速度色散的影响由  $\beta_2$  和  $\beta_3$  决定, 介质非线性折射效应被包含在  $\gamma$  项中. 习惯上, 在脉冲演化方程中, 时间  $T$  是在以传输脉冲的群速度平移的坐标系中测量的. 忽略脉冲包络一阶微商中小项的影响, 延迟坐标将改变脉冲中心的位置, 但不会改变其形状.

为了用分步方法解方程(16), 先将 NLSE 符号化:

$$\frac{\partial}{\partial z} A(T, z) = (\hat{L} + \hat{N})A(T, z), \quad (17)$$

这里  $\hat{L}$  和  $\hat{N}$  是线性和非线性算符,

$$\hat{L} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} - \frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3}{\partial T^3} - \frac{\alpha}{2}, \quad (18)$$

$$\hat{N} = i\gamma |A|^2. \quad (19)$$

通过距离  $h$  的传输后, 其解可被写为:

$$A(T, z+h) = \exp\left[\int_z^{z+h} (\hat{N} + \hat{L}) d\zeta\right] A(T, z) \\ \approx \exp[h(\hat{N} + \hat{L})] A(T, z). \quad (20)$$

一般情况下线性算符  $\hat{L}$  和非线性算符  $\hat{N}$  是不对易的, 根据 Baker-Hausdorff 方程:

$$\exp(h\hat{N})\exp(h\hat{L}) = \exp\left[h\hat{N} + h\hat{L} + \frac{1}{2}h^2[\hat{N}, \hat{L}] + \frac{1}{12}h^3[\hat{N} - \hat{L}, [\hat{N}, \hat{L}]] + \dots\right] \quad (21)$$

可以得出, 当  $h$  足够小时,  $\exp[h(\hat{N} + \hat{L})]$  可作如下近似:

非对称近似

$$\exp[h(\hat{N} + \hat{L})] = \exp(h\hat{N})\exp(h\hat{L}) + O(h^2), \quad (22)$$

对称近似

$$\exp[h(\hat{N} + \hat{L})] = \exp\left(\frac{h\hat{L}}{2}\right)\exp\left[h\hat{N}\left(z + \frac{h}{2}\right)\right] \\ \times \exp\left(\frac{h\hat{L}}{2}\right) + O(h^3). \quad (23)$$

为简单起见, 在下面的讨论中我们采用非对称近似, 于是:

$$A(T, z+h) = \exp(h\hat{L})\exp[h\hat{N}]A(T, z). \quad (24)$$

### 3.2. 分步小波算法

利用(24)式反复迭代, 就可得到在具有色散、损耗和非线性折射的光学介质中传输脉冲的演化. 与分步傅里叶方法不同的是, 此时色散和损耗效应在小波变换域中考虑(在分步傅里叶方法中, 色散和损耗效应在频域中计算), 而非线性折射效应仍在时间

域中计算.

首先, 将包含非线性算符的  $\exp(h\hat{N})$  作用于  $A(T, z)$ , 得到  $B(T, z) = \exp(h\hat{N})A(T, z)$ . 然后, 利用快速小波变换把  $B(T, z)$  变换到小波域中, 得到  $B(w, z) = W\{B(T, z)\}$ . 再将线性算符  $\exp(h\hat{L})$  作用于  $B(w, z)$ , 线性算符在小波域中的形式是一个矩阵  $M$ . 最后, 用小波逆变换重构, 即得到输入脉冲  $A(T, z)$  经过一小段距离  $h$  后的输出  $A(T, z+h)$ :

$$A(T, z+h) = \exp(h\hat{L})B(T, z) \\ = \{W^{-1}MW\}B(T, z). \quad (25)$$

下面, 我们将导出小波域中线性算符矩阵  $M$  的具体表式.

### 3.3. 线性算符矩阵 $M$

若函数  $A(T, z)$  在尺度函数域中分解的系数为  $v_{j,k}$ , 则该函数的微分在尺度函数域中可分解为:

$$\frac{\partial}{\partial T} A(T, z) = \sum_{k=0}^{2^j-1} v'_{j,k} \phi_{j,k}(t), \quad (26)$$

这里  $v'_{j,k}$  是  $A(T, z)$  的微分在尺度函数域中的系数, 它可以通过对  $v_{j,k}$  与微分算符矩阵的相乘得到<sup>[9]</sup>, 即:  $v'_j = R^j v_j$ , 其中  $R^j$  是在尺度  $j$  下的微分算符矩阵,  $v_j$  和  $v'_j$  分别是信号和它的微分在尺度函数下分解的系数.  $R^j$  的每一个元素满足<sup>[12]</sup>:

$$r^j_{k,l} = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^j t - k) \phi'(2^j t - l) 2^j dt. \quad (27)$$

通过简单的数学运算, 可以得到  $r^j_{k,l}$  满足如下关系:

$r^j_{k,l} = 2^j r^j_{k-l}$ , 这里

$$r_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t - \lambda) \frac{d}{dt} \phi(t) dt. \quad (28)$$

在线性算符里包含对时间的二次偏微分, 并非所有的小波都存在二次微分算符矩阵  $R^j$ , 因此要选择合适的小波. Daubechies 6 小波及对应的尺度函数都是紧支的, 其二次微分算符和更高的偶次微分算符的序列  $\{r_\lambda\}$  是偶序列<sup>[13]</sup>, 即  $r_\lambda = r_{-\lambda}$ , 其中

$$r_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t - \lambda) \frac{d^n}{dt^n} \phi(t) dt. \quad (29)$$

计算表明, 此时的  $R^j$  中绝大多数元素均为零, 非零的元素集中在对角线附近, 因此  $R^j$  是一个稀疏矩阵.

把  $\exp(h\hat{L})$  展开成泰勒级数:

$$\exp(h\hat{L}) \approx 1 + h\hat{L} + \frac{h^2}{2!} \hat{L}^2 + \frac{h^3}{3!} \hat{L}^3 + \dots \quad (30)$$

忽略线性算符中的损耗或将它放到后面考虑, 且由于一般情况下高阶色散效应很小, 为简单起见,

在这里也不予考虑, 这样  $\hat{L}$  可以表示为  $-\frac{i}{2}\beta_2 \cdot R^j$ , 于是:

$$M \approx I - \frac{i}{2}h\beta_2 \cdot R^j - \frac{(h\beta_2)^2}{8}(R^j)^2 + \frac{i}{48}(h\beta_2)^3(R^j)^3 + \dots \quad (31)$$

其中,  $I$  为单位矩阵.

### 4. 高斯脉冲在光纤中线性和非线性传输的分步小波模拟

为了验证分步小波方法的有效性, 我们将利用上面给出的算法, 计算高斯脉冲在光纤中的线性和非线性传输. 首先考虑简单的线性传输, 将分步小波方法的结果与解析解比较, 验证分步小波数值模拟的精度. 然后考虑脉冲在光纤中的非线性传输, 将分步小波方法与常用的分步傅里叶方法的数值结果与计算速度进行比较和讨论.

#### 4.1. 线性传输

考虑一个无啁啾的高斯脉冲在常规单模光纤中的传输, 忽略非线性效应和光纤损耗, 参数取值如下: 脉冲宽度  $T_0 = 20$  ps, 脉冲峰值功率为  $P_0 = 10$  mW, 光纤的二次色散系数  $\beta_2 = -4$  ps<sup>2</sup>/km, 传播距离为 200 km (即  $2L_D$ ), 分成 40 段, 即每段长度  $h = 5$  km. 分步小波法数值计算结果与解析解的比较如图 1 所示.

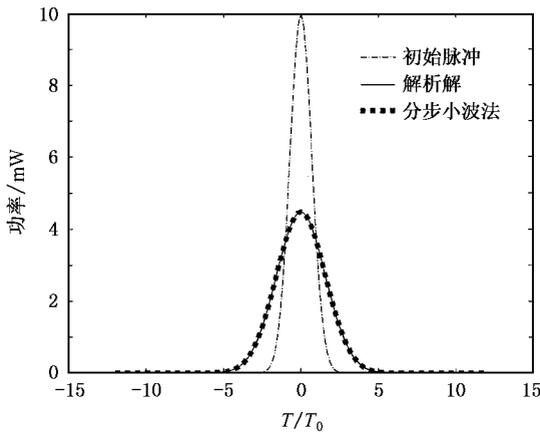


图 1 用分步小波法和解析法得到的无啁啾高斯脉冲在常规单模光纤中传输 200 km 距离后的波形

从图 1 中可以看出, 分步小波法和解析法得到的高斯脉冲线性传输 200 km 后的波形重合得很好,

最大相对误差仅为 0.19%, 能满足大多数计算的要求.

#### 4.2. 非线性传输

在本小节中, 我们分别用分步小波法和分步傅里叶法解带啁啾的高斯脉冲在单模非线性光纤中的传输. 设初始的啁啾高斯脉冲为:

$$A(0, T) = \sqrt{P_0} \exp\left[-\frac{1+i \cdot c}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right], \quad (32)$$

其中初始啁啾参数  $c = -1$ , 脉冲宽度  $T_0 = 20$  ps, 脉冲峰值功率  $P_0 = 10$  mW. 光纤的二次色散系数  $\beta_2 = -4$  ps<sup>2</sup>/km, 光纤非线性系数  $\gamma = 1$  W<sup>-1</sup>·km<sup>-1</sup>, 忽略光纤损耗. 传播距离仍取为 200 km (即  $2L_D$ ), 分成 40 段, 每段长度  $h = 5$  km.

从图 2 中可以看出, 在步长取 5 km 时, 分步小波法和分步傅里叶法的结果相当一致. 经过计算, 两种方法的最大相对误差不到 0.5%.

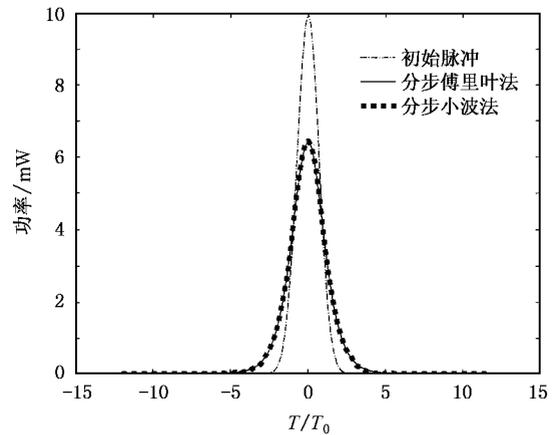


图 2 用分步小波法和分步傅里叶法得到的带啁啾高斯脉冲在光纤中非线性传输 200 km 距离后的波形

数值计算的速度与对信号的采样点数有很大关系. 表 1 为两种方法在上例情况下对光脉冲信号取不同采样点数时所需的计算时间, 运行的机器环境是赛扬 II700 处理器, 256M 内存.

表 1 分步傅里叶方法和分步小波方法在不同采样点数下计算时间的比较

	128 点	512 点	2048 点
分步傅里叶方法	8.8 ms	40 ms	184 ms
分步小波方法	9 ms	26 ms	63 ms

从表 1 中可以看出, 在采样点数较少的情况下, 两种方法的计算时间差不多, 当点数增加到 2048

时,分步小波法的计算速度比分步傅里叶法快近三倍,这是由于快速小波分解速度比快速傅里叶分解速度快所致。一般来说,若对计算精度要求较高或信号变化剧烈,如瞬态信号、超短光脉冲,则在信号离散化时就需要较多的采样点,在这种情况下,分步小波法在计算速度上明显优于分步傅里叶法。

## 5. 结 论

正交小波基函数经过二比例缩放和平移可以表示任意的平方可积函数,这导致了任意带限信号可以由一族分立的系数来表达,这族分立的系数就构成了信号的小波变换,因为小波性质之一是它同时具有时间和尺度(与频率等价)局部化,所以小波变换系数产生了信号在尺度-时间平面上的分解,这种

分解是多分辨率的,即一个信号表示为尺度空间上的粗略近似和若干小波空间的细节贡献的组合。信号的小波分解和重构是一个  $O(N)$  过程,比基于快速傅里叶变换的方法有效。

本文将正交小波变换用于非线性薛定谔方程的分步算符形式,给出了分步小波算法(SSWM)的迭代公式和线性算符矩阵在小波域中的具体表式。分步小波算法要求线性算符用于小波域而非线性算符直接作用于信号的时域样本;利用快速小波变换将输入时域信号表示收敛到小波域;小波逆变换重构得到输出结果。作为一个例子,本文用上述分步小波方法解 NLSE,给出了高斯脉冲在光纤中的线性和非线性传输的波形演化,模拟结果与解析解和分步傅里叶方法的结果相当一致。在计算速度上,分步小波方法明显优于现在常用的分步傅里叶方法。

- [ 1 ] Agrawal G P 1989 *Nonlinear Fiber Optics* ( California : Academic Press , Inc. ) p44  
 [ 2 ] Rao M , Sun X H and Zhang M D 2003 *Chin . Phys .* **12** 502  
 [ 3 ] Gagnon L and Lina J M 1994 *Phys . A : Math . Gen .* **27** 8207  
 [ 4 ] Lionel W R and Zhou Y R 1994 *J . Lightwave Technol .* **12** 1536  
 [ 5 ] Kaiser G 1992 *Phys . Lett . A* **168** 28  
 [ 6 ] Kremp T *et al* 2002 *IEICE Trans . Electron .* E85-C 3 534  
 [ 7 ] Jeong H 2001 *NDT & E International* **34** 185

- [ 8 ] Borisov A G and Shabanov S V 2002 *Chem . Phys . Lett .* **361** 15  
 [ 9 ] Beylkin G , Coifman R and Rokhlin V 1991 *Comm . Pure Appl . Math .* **44** 141  
 [ 10 ] Daubechies I 1988 *Comm . Pur . Appl . Math .* **41** 909  
 [ 11 ] Mallat S 1989 *IEEE Trans . PAMI* **11** 674  
 [ 12 ] Beylkin G 1992 *SIAM J . Numer . Anal .* **29** 1716  
 [ 13 ] Pierce I , Rees P and Shore K A 2000 *J . Opt . Soc . Am . A* **17** 2431

# Split-step wavelet method for numerical simulation of optical pulse propagation \*

Chen Hong-Ping Wang Jian He Guo-Guang

( Department of Physics , Zhejiang University , Hangzhou 310027 , China )

( Received 20 October 2003 ; revised manuscript received 28 October 2004 )

## Abstract

The multi-scale wavelet decomposition and orthogonal wavelet transform are outlined and applied to the representation of optical pulses. The nonlinear Schrödinger ( NLS ) equation , which describes the pulse propagation in optical media , is used to represent the split-step operator form in wavelet domain. The iterative equation of the split-step wavelet algorithm for the solution of the NLS equation is presented. The expression of the linear operator in wavelet domain is given and the framework of the derivative operator is discussed. As an example , the linear and nonlinear propagations of ultrashort Gaussian pulse through optical fibers are numerically simulated by using the split-step wavelet method ( SSWM ) , and compared with that by using the analytic solution and the split-step Fourier method. The results show that SSWM is an accurate and effective numerical method for the study of the pulses propagation through optical media.

**Keywords :** split-step wavelet method , optical pulse propagation , NLS equation , multi-scale wavelet decomposition

**PACC :** 4281D , 0260

\* Project supported by Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China ( Grant No. 601137 ).