第 54 卷 第 6 期 2005 年 6 月
1000-3290/2005/54(06)/2784-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.6,June,2005

静止颗粒体的应变与弹性

王焕友[1)] 曹晓平[1)] 蒋亦民[1)2)] 刘 佑[2)]

[1)] (中南大学物理科学与技术学院,长沙 410083,中国)

[2)] (蒂宾根大学理论物理研究所,蒂宾根 72076,德国)

(2003 年 11 月 27 日收到;2004 年 10 月 18 日收到修改稿)

文章指出通过空间平均每个颗粒内应变的方法不能得到无粘性颗粒材料的宏观应变,位移矢量场和应变张量场一般没有粗粒化平均性质.但这并不妨碍以平衡态热力学为基础的宏观应变概念和弹性理论对静止颗粒体的有效性.

关键词:无粘性颗粒体,应变,弹性,粗粒化

PACC:4610,4620,4630C

1. 引 言

按照经典(线性或非线性)弹性理论[1],Cauchy 在 1822 年提出的位移矢量场 $u(r)$,或它的空间导数:应变张量场 $u_{ij}(r)$,是描述静止固体宏观状态的基本变量.由于对一给定的材料,静应力场 $\sigma_{ij}(r)$ 被位移的 3 个分量所确定[1)],如果已知边界条件,我们只需求解 3 个力平衡方程就能得到固体中的位移和应力分布,即解决固体的静力学问题.但是对很容易出现塑性形变和完全没有抗拉伸能力的颗粒体(本文出现的颗粒体都指无粘性颗粒体,如干沙堆等)来讲,上述意义下的位移和应变概念是否还能适用,却是一个在目前仍没有完全一致看法的基本问题.在文献[2,3]中,de Gennes 和 Evesque 倾向认为位移和应变仍是描述颗粒体的基本变量,并指出经典弹性理论仍能解释'筒仓'(silo)中的压力变化,只要我们注意到颗粒体的体弹模量 K 不是常数,而与压力有关(这一性质可从赫兹接触理论模型看出[1]).也就是说,考虑了 K 随压力变化的非线性弹性理论(他们称之为准弹性理论(quasielastic theory))对颗粒体仍有一定的适用价值.在文献[4]中,我们基于简单的线弹性理论计算发现,如果一受重力作用的松散颗粒堆在其制备过程中出现了微小的内松外紧,从而使堆的中间部分的体弹模量明显小于旁边时,堆底的压力分布会出现类似于一些实验中看到的低陷现象.但是近来有学者指出[5—7],因为容易发生塑性形变和不能抵抗拉伸,颗粒体没有上述弹性意义下的位移和应变.显然按照这一观念,颗粒体的静力学理论在结构上将与普通固体的弹性理论截然不同.由于 u 的 3 个分量不再有效,人们需要回答什么是取代它们的新状态量.文献[5—7]的作者建议直接把应力张量 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ 的 6 个分量当作独立状态变量.由于 3 个力平衡方程不能确定这 6 个未知数,他们需要另外提出 3 个新的微积分方程.

值得注意的是在工程实际中应变概念被广泛应用,测量和建立合适的应力-应变关系仍是土力学的基本课题之一[8].考虑到位移矢量的重要性,以及目前在物理文献中出现的争论,我们认为有必要对其概念,适用范围和前提作仔细考察.本文试从宏观和介观两方面来讨论这一问题.(文中提到的宏观变量指空间精确性远大于颗粒间距离,但远小于整个媒质大小的变量.介观变量指空间精确性远大于原子间距离,但远小于颗粒大小的变量.微观指原子大小的尺度.对宏观和介观尺度的物理现象可用经典力学描述.对微观尺度的物理现象应用量子力学描述.为了简便,我们将略去变量前面的宏观二字.因此除特别指明外,文中提到的物理量均指宏观变量).首先我们在第 2 节里强调说明,尽管位移和应变总能通过质量守恒原理一般地定义,但要作为状

[1)] 随材料的不同,确定应力的关系式可能是线性的虎克定律,或其他非线性关系.

态变量,还需要媒质在应力空间中有平衡态区域和可逆过程为前提.由于这些热力学概念普遍适用于任何静止宏观系统,颗粒体的位移仍是有明确物理意义的基本变量.从这一角度看,普通固体与颗粒体的区别主要是它们有不同形状的平衡态区域.在平衡区域内位移和经典弹性理论(不一定是线性的)仍然有效.在区域的边界,介质开始屈服.因此位移和应变的宏观定义是很清楚的.但有趣的是,它们的介观意义却不这么简单.作为有限大小颗粒的堆积物,人们自然期望颗粒体的宏观变量与其介观对应之间存在一般的粗粒化(coarse-graining)平均关系(见第 3 节).对许多场变量,如质量密度,质量流,能量密度,能量流,动量密度,应力张量等的确是这样,其主要原因是在介观尺度上,它们无论在颗粒内部,还是颗粒之间的空隙处[2],都有明确的取值.可是位移和应变虽然在颗粒内部有定义,我们却很难,几乎无法把它们的定义域合理地延拓到空隙中去,它们的介观对应和粗粒化平均因此失去意义.值得指出的是,我们不能简单地令介观应变场在空隙处等于零来解决这一困难,因为即使考虑只由颗粒链构成的简单模型,其宏观应变也不等于每个颗粒内的介观应变的简单空间平均(见第 4 节).

由此我们得出结论,位移或应变无论对正常固体还是颗粒体都是基本热力学变量,但不是粗粒化平均量.可以说它们是没有明显和直接介观对应的纯宏观状态量.这一性质会使介观与宏观之间的联系变得复杂,并增加从介观模型出发推导宏观应力－应变本构方程的难度.的确,粗粒化平均的失效会使我们从介观出发计算宏观位移或应变时,不可避免地用到定义它们的宏观方程.由于这些方程含时间导数,我们仅知道状态细节是不够的,还需要知道(可逆)过程细节.也就是说,对一静止颗粒体,即使我们有能力用接触力学分析计算,或实验测量的手段知道了其所有介观状态信息(即每个颗粒的形状,位置及其内部应力和应变的分布),一般却算不出它的位移或应变场.

值得注意的是对任何系统,只要所描述的物理现象的空间变化的波长远大于其组成粒子间的距离,都有场变量形式的宏观理论.换句话说,连续体概念即适用于颗粒间有相互接触的静止在地面上的沙堆,也适用于颗粒间没有长时间的接触(只有碰撞型的相互作用)的扬沙情况(就象空气的分子不接触在一起,但仍有宏观流体力学理论那样).本文仅限于考虑有弹性现象的前一种情形.扬沙系统不能抵抗静止剪切力,当然没有弹性行为,或弹性应力－应变关系这些问题.宏观方程在工程设计和应用中扮演着重要角色.进一步澄清和阐明颗粒体的应变概念,将有助于理解文献[9,10]中建立的颗粒体的非线弹理论.

2. 位移和应变的热力学基础

当我们对一媒质施加外力(包括象重力那样的体积力和边界上的表面力)时,其内部会出现质量流 j_k 使它的不同部分产生相对位移,或形变.原则上,如果知道(如通过实验测量)该形变过程中宏观质量流的时－空分布 $j_k(\boldsymbol{r},t)$,我们就能用质量守恒方程(对重复脚标求和)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial j_k}{\partial r_k}=0. \tag{1}$$

计算出密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$,然后再积分位移的运动方程

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+j_k\frac{\partial u_i}{\partial r_k}=j_i, \tag{2}$$

得到描写形变的位移矢量场 $u_i(\boldsymbol{r},t)$.(假定已知变形前的位移和密度).对它作空间微分,即得应变张量 $u_{ij}(\boldsymbol{r},t)$[3]:

$$u_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j}+\frac{\partial u_j}{\partial r_i}-\frac{\partial u_k}{\partial r_i}\frac{\partial u_k}{\partial r_j}\right). \tag{3}$$

(2)式通常也写成 $\partial u_i/\partial t+v_k\partial u_i/\partial r_k=v_i$,其中 $v_i=j_i/\rho$ 是速度.它表明质量守恒[4]方程中的质流 j_i(或速度 v_i)不仅决定着质量变化情况,还决定着形变的大小.这不难理解,因为发生形变就是发生了质流.当一个状态变化过程中的质流总是保持为零,当然不会有相应的形变.方程(1—3)反映着质量变化,质流,形变等概念之间的密切联系,并且是普适的,对固体和颗粒体都能应用.甚至对液体也可以用它们计算应变,尽管应变对液体来讲不是有用的东西.换句话讲,它们是一般的运动学关系式,不含材料系

[2] 本文只考虑没有任何填充物的真空空隙情况.注意通常遇到的颗粒的比重远大于空气,我们可略去后者对颗粒静力学的影响.

[3] 文中的空间位置都是现实的,即采用 EULER 坐标,(3)式又称 ALMANSI 应变.

[4] 考虑没有质量变为光子这样的相对论效应.

数，不涉及材料的具体性质.

如果我们沿两条不同的路径对同一媒质加载到同一强度，方程(1—3)可能给出不同的应变.因此上面方法定义的应变一般与加载的过程(应力路径)有关.这里有两个极端情形.一是理想固体，其受力变形过程是完全可逆的.或者说，它对任何加载或卸载过程，无论大小和方式(剪切，压缩或拉伸)，都作可完全回复的弹性响应.由于对任何循环受力过程理想固体都保持不变，按照方程(1—3)定义的应变一定是只取决于初态和末态的，与路径无关的状态量.应力空间中具有这样性质的范围称为弹性区.理想固体的弹性区域遍及整个力平面.但实际固体在受力过大时会发生屈服，弹性区是有限的(图 1(a)).在弹性区里的每一点上，固体都能达到热平衡态[5)].反之，因为处于稳定热平衡状态下的系统必须对任何扰动作弹性响应，平衡态又一定在弹性区域内.因此弹性区域和热平衡区域实质上是同一概念.通常固体在平衡区内的加载或卸载过程都可看作是准静态(或可逆)的，由方程(1—3)给出的应变将仅取决于应力状态，与路径无关.另外，任何应力的改变都会产生质流，使应变发生变化.因此，u_{ij}和应力σ_{ij}之间存在一一对应的函数关系：

$$\sigma_{ij} = \Psi_{ij}(u_{lk}). \tag{4}$$

这里函数 Ψ_{ij} 的值域为整个平衡态区.根据平衡态热力学，能量也是状态量.因此固体的能量 ε 也一定是应变的单值函数[6)]：

$$\varepsilon = \phi(u_{ij}). \tag{5}$$

注意到动量密度等于质量流[7)]和应力等于动量流，利用一般的能量-动量守恒定律和标准的流体动力学推导(参见文献[11])，可以证明应力与能量之间存在关系(注意本文的记号 σ_{ij} 与文献[10,11]一致，它与文献[1]中的 σ_{ij} 有个负号的差别)

$$\sigma_{ij} = -\partial\phi/\partial u_{ij} + 2\sum_k u_{ik}(\partial\phi/\partial u_{ij}). \tag{6}$$

这里的 u_{ik} 是可逆弹性应变.如材料不是特别地软，有 $|u_{ik}|\ll 1$，上面的最后一项可以略去.注意即使是能量 $\phi\propto u_{ij}^k$，幂 k 大于 2 的非线弹情况，(6)式的最后一项也是可以略去的高级小项.因此近似 $\sigma_{ij}\approx -\partial\phi/\partial u_{ij}$ 不只局限于线弹理论.这一结果的热力学证明见文献[1].如考虑赫兹接触，沙子的幂 k 为 2.5，不是线弹材料，但 $|u_{ik}|\ll 1$.我们将总是略去这一高阶修正(如下面的应力-应变关系(7)中，它给出的是关于 u_{ij}^2 的修正，属于省略号中的部分).

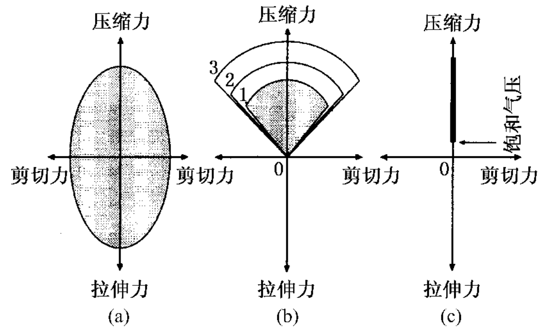

图 1 (a)普通固体的弹性区域示意.(b)颗粒体的弹性区域示意.屈服线 1，2，3 示意当颗粒排列变紧凑时弹性区域的变化趋势.(c)液体的弹性区域在力空间中退化成一条直线.

从上面的讨论，我们可以看到描述静力学行为的本构关系(4—6)是建立在可逆过程这一热力学基本概念上的.注意它们仅适用于平衡态系统和相应的平衡过程(即可逆过程)，没有包含不可逆动态过程的各种耗散效应.由于固体在不受外力时可达到平衡状态，零应力点一定在平衡区内部，函数 Ψ_{ij} 和 ϕ 在该点有解析性.因此我们能不失一般地把它们写成多项式展开形式(约定 $u_{ij}=0$ 时 $\sigma_{ij}=0$.仅考虑各向同性固体)

$$\sigma_{ik} = Ku\delta_{ik} + \mu u_{ik}^{(0)} + \cdots, \tag{7}$$

$$\phi = Ku^2/2 + \mu u_{ik}^{(0)} u_{ik}^{(0)} + \cdots, \tag{8}$$

其中 K, μ 等是展开系数.$u = u_{nn}$ 是体形变[8)]，$u_{ik}^{(0)} = u_{ik} - u\delta_{ik}/3$ 是偏应变.如只保留(7)中的线性部分，即是常用的虎克定律(或线弹性理论).

---

5) 本文仅限于讨论在外力下的平衡态，略去与温度有关的热效应.

6) 由于本文不是具体讨论热效应，我们也像文献[1]中的公式(4.3)和下面的脚注那样，略去了 ε 随熵的变化(如把它理解成热力学能量)，或略去了 ε 随温度的变化(如把它理解成热力学自由能).在忽略热效应的情况下，把本文中的 ε 理解成能量或自由能都可以.

7) 如有电磁场，动量密度不等于质量流.本文将忽略任何电磁效应.

8) 由方程(1—3)可得任何时刻的密度 $\rho = \rho_0\sqrt{\det(\delta_{ij}-2u_{ij})}$，其中 ρ_0 是不随时间变的初始密度.因此严格地讲，相对初始态的体形变应为 $u=\rho/\rho_0-1$，这里的 $u=u_{nn}=\partial u_n/\partial r_n$ 只是它的最低近似，在没有大弯曲和大变形时有效.因实际沙子满足这个前提，本文将省略体形变中的高阶修正.

作为另一极端情形,对拉伸和剪切都没有抵抗能力的理想流体[9]的热平衡态区域退化成了一条直线(见图 1(c),注意液体内的压力要大于其饱和气压).在任何外力状态下流体都不能进入热平衡状态,除非是严格地压缩[10].这个平衡态区域的退化使得由方程(1—3)定义的应变一般与外力的路径有关.由于不存在一个有限大小的平衡态区域让应变成为状态量,流体没有象固体那样的应变 - 应力函数关系,因此应变概念对流体失去了意义.当然我们可以引入一个只在图 1(c)中的一维线上有效的应变概念,但它往往与质量密度 ρ 相关,不是新的状态变量.

颗粒体不能抵抗拉伸,但被压紧后却有抗剪能力.在一定的压力和剪切力的范围里,它能达到热平衡状态.因此颗粒体具有有限大小的,其形状大致如图 1(b)所示的弹性区域.仅从平衡态区的形状来看,可以说颗粒体介于固体和流体之间.存在有限大小的平衡区表明它原则上有与固体一样的,满足方程(4—6)的准静态过程.值得注意的是,由于颗粒体中比较容易出现因滑动造成的颗粒重新排列,它的耗散性远强于正常固体.特别是在松密度或压力较小的情况,很容易激发出各种耗散现象,如黏滞,微小的蠕动和明显的滑移等.这时,让它作准静态过程可能非常困难.但重要的是,这并不意味着它没有平衡区域和与之相应的弹性应变概念.颗粒体的另一个与固体不同的重要性质是在不受力时,系统开始失去其热力学稳定(或发生屈服).因此它的零应力点位于平衡区的边界上,函数 Ψ_{ij} 和 ϕ 可以在该点没有解析性.的确对颗粒体,从赫兹接触力学我们不难看到它们的展开形式不是(7),(8)式那样的多项式.在没有剪切形变时,赫兹模型提示我们 Ψ_{ij} 关于体形变($-u$)展开的头一项的幂约为 1.5(参见后面的公式(19).注意由于颗粒体不能拉伸,$u<0$).有剪切时,这个展开形式为 $\Psi_{ij}=-[B(-u)^{1.5}+A(-u)^{-0.5}u_{lk}u_{lk}]\delta_{ij}-A(-u)^{0.5}u_{ij}$,其中 A,B 是材料常数[9,10].这一特点表明它是纯粹的非线性弹性体,即使在最低级近似下也没有线性的应力-应变关系.

本节的讨论表明,弹性理论的适用前提是系统在应力空间中存在有限的平衡态区域和可逆过程.有了平衡区,才有作为状态量的位移矢量和应变[11],并且应力和能量都是应变的函数.位移和应变概念的重要性在于它们反映了这一基本性质:由于热平衡的原因,系统的宏观自由度数目是 3(位移矢量),而不是 6(应力张量).这使得静力学分析只要 3 个力平衡方程加上边界条件就够了.因此,只要承认颗粒体在应力空间中也有有限大小的平衡态区这个事实,我们就不能否定弹性理论对它的适用性.

3. 场变量的粗粒化平均性质

任何宏观场变量 $a(\boldsymbol{r})$ 与其对应的微观或介观场变量 $a'(\boldsymbol{r})$ 一般可以通过在空间上做粗粒化平均

$$a(\boldsymbol{r})=\langle a'\rangle=\int_D a'(\boldsymbol{r}')\xi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \quad (9)$$

联系起来.这里 D 是整个系统占据的宏观空间区域,即场 $a(\boldsymbol{r})$ 和 $a'(\boldsymbol{r})$ 的定义域.$\xi(\boldsymbol{r})$ 是一个只在 $r<d$ 的范围内不为零的正函数(d 是一个远小于 D,但比原子或颗粒间距离大许多的尺寸),并满足归一化条件 $\int_{-\infty}^{\infty}\xi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}=1$.例如微观质量密度场为

$$\rho'(\boldsymbol{r})=\sum_{k=1}^{N}m_k\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k), \quad (10)$$

其中 m_k 和 $\boldsymbol{r}_k$ 分别是第 k 个原子核或电子的质量和位置,N 是系统中原子核和电子的总数.显然宏观质量密度场 ρ 等于 ρ' 的粗粒化平均.除质量密度外,类似的粗粒化平均量有质量流,能量密度,应力,等等.这些物理量都有这样的特点:它们的微观或介观场量在空隙处都为零.

一般地,如果一个物理场变量在微观或介观上有明确定义,其粗粒化平均一定是它的宏观场.但有趣的是,尽管大部分物理量具有这个粗粒化平均性质,也有一些在微观或介观上无法定义的场变量.我们可称这些没有相应的微观或介观对应,但在宏观

---

9) 忽略液体的表面张力.

10) 严格讲,理想流体没有热平衡态,因为它不能对剪切力扰动作弹性响应.但人们通常说气体和液体的热平衡时略去了这种剪切扰动,只要体积,压力,温度等对扰动保持稳定,即便有剪流型蠕动也称热平衡.

11) 可能即使在出平衡区不远的地方,位移和应变概念在近似意义上仍有效.

上却有明确意义的场为非粗粒化平均量，或纯宏观场. 速度场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ 即是一个这样的简单的例子. 它有明确的宏观意义，代表运动媒质内 r 点上的局域静止坐标与实验室坐标的相对速度，并等于宏观质量流与宏观密度的比：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}/\rho = \langle \boldsymbol{j}' \rangle \langle \rho' \rangle . \tag{11}$$

但在微观上，我们虽然有每个原子核或电子的速度，却定义不出这样一个微观速度场，它的粗粒化平均等于上面的宏观速度. 我们不能定义 $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{j}'/\rho'$，因为右边在空隙处变成了 0/0-不定式. 我们也不能象式(10)那样，考虑 $\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{v}_k \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_k)$ ($\boldsymbol{v}_k$ 是第 k 个原子核或电子的速度)，因为它的粗粒化平均显然不是(11)式给出的速度. 需要指出的是，速度不是粗粒化平均量并不意味宏观速度场概念的失效，实际上它总是由宏观(11)式来定义的. 与速度类似，位移和应变也不是粗粒化平均量. 尽管它们在每个颗粒的内部都有意义，但就我们所知，目前不存在一个一致合理地确定其空隙处的大小的定义公式. 这使得我们无法在粗粒化平均这个微观框架内来理解位移和应变. 因此我们认为它们是仅在(1—3)式和热力学意义下的纯宏观概念.

直接用(1—3)式计算位移和应变显然很复杂，因为涉及到整个形变过程. 对相互作用质点系统(无序或纳米固体模型)，Goldhirsch 和 Goldenberg 建议用近似公式[12]

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{u}_i \xi(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)}{\sum_k m_k \xi(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_k)} \tag{12}$$

来计算位移场，这里 m_i 是第 i 个质点的质量，$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{r}_i^0 - \boldsymbol{r}_i$ 其中 $\boldsymbol{r}_i^0$ 和 $\boldsymbol{r}_i$ 分别是它在变形前后的位置. ξ 是前面的粗粒化函数. 在一维情况，他们通过数值方法验证了(12)式的确与由方程(1—3)给出的严格位移非常接近. 这个近似公式的好处是它避开了变形的中间动态过程. 但对把质点换成有限大小颗粒的系统，目前还没有类似的简单公式. 下面我们试用方程(1—3)来推导一简单颗粒体模型的弹性性质.

4. 弹性模量的介观推导:简单链模型

统计物理的一个基本任务是从微观(或介观)模型假设或物理理论出发推导宏观物体的材料系数. 对颗粒体静力学来讲，这主要指推导弹性模量 K，μ 与颗粒的物性(几何形状，硬度等)之间的关系，以及它们随应力的变化曲线. 显然这将涉及到计算应变的问题，因为 K，μ 是通过应力或能量关于应变的展开来定义的. 本节以一简单模型为例具体说明体弹模量 K 的推导思路，同时表明由方程(1—3)给出的宏观应变不是每个颗粒内的应变的简单平均.

考虑如图 2 所示的，由 N 个相同颗粒组成的模型系统. 系统左边固定，右边在外力 F 下以非常小的速度 v_0 沿 x 方向作匀速运动(即考虑控制速度的实验过程)，这时外力 F 是时间 t 的函数. 我们进一步假设颗粒只在 x 方向上有赫兹接触，忽略沿另外两个方向上有接触这个 3 维效应. 也就是说，假设所谓的力链(force chain)都保持一维直线，不构成三维网. 颗粒的质量为 m，杨氏模量 E_G，泊松比 ν_G，不受外力时的半径为 R.

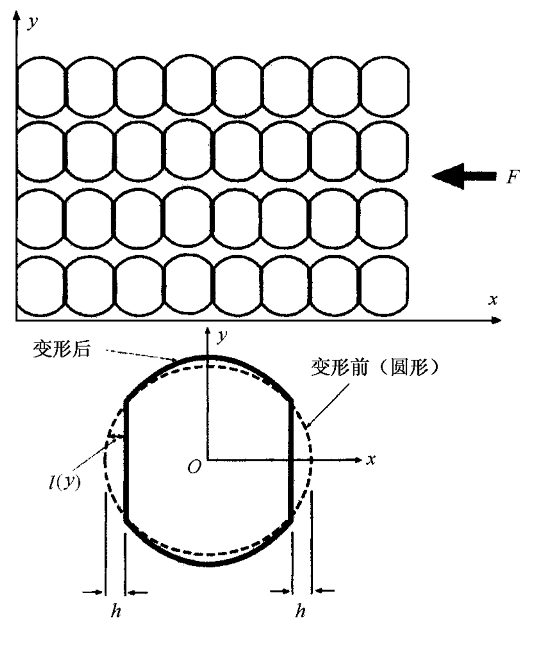

图 2 一维链系统在外力 F 下发生形变

利用赫兹理论我们能算出每个颗粒在任何时刻 t 的力学状态，因此系统的所有介观动态行为，如介观质量流 $j'(x,y,t)$，质量密度 $\rho'(x,y,t)$，弹性能 $\phi'(x,y,t)$ 和应力 $\sigma'_{ij}(x,y,t)$ 都可以计算出来. 这些介观变量在孔隙处的取值都是零. 尽管它们的具体形式很复杂，我们并不难求出它们的粗粒化平均. 注意到系统作匀速压缩，我们有宏观质量密度

$$\rho = \langle \rho' \rangle = \frac{mN}{L} = \frac{mN}{2N(R-h)} = \frac{mN}{2NR - v_0 t}, \tag{13}$$

其中 $h = v_0 t/2N$ 代表在 t 时刻颗粒的压缩程度(h

$\ll R$,见图 2 下),$L = 2N(R-h)$是系统沿 x 方向上的长度,v_0 是右边界 $x = L$ 处的速度.由(13)式和质量守恒方程(1)不难看出 x 方向上的宏观质量流与 x 成正比,具体有

$$j_x = \langle j'_x \rangle = \frac{-mNv_0 x}{(2NR - v_0 t)^2}, \tag{14}$$

并且在另外两方向上没有质量流.宏观应力和弹性能都与空间位置无关.按照赫兹接触力学[1],我们有

$$\sigma_{xx} = \langle \sigma'_{xx} \rangle = \frac{\sqrt{2}E_G}{12(1-v_G^2)R^{2/3}}\left(\frac{v_0 t}{2N}\right)^{3/2}, \tag{15}$$

$$\phi = \langle \phi' \rangle = \frac{\sqrt{2}E_G}{30(1-v_G^2)R^{5/2}}\left(\frac{v_0 t}{2N}\right)^{5/2}. \tag{16}$$

(13—16)式即是用介观信息和粗粒化平均算出的质量和能量密度,以及它们的流.

位移场不是粗粒化平均量,我们只能根据它的宏观定义来计算.将(13),(14)式代入(2)式,并积分,得

$$u_x = \frac{-v_0 tx}{2NR - v_0 t}, \tag{17}$$

因此应变是

$$u_{xx} = \frac{-v_0 t}{2NR - v_0 t} \approx \frac{-v_0 t}{2NR}. \tag{18}$$

利用(18)式消去(15),(16)式中的 $v_0 t$,即得应力-应变关系和自由能表达式.在近似 $2NR \gg v_0 t$ 下,有

$$\sigma_{xx} = \frac{\sqrt{2}E_G}{12(1-v_G^2)}(-u_{xx})^{3/2}, \tag{19}$$

$$\phi = \frac{\sqrt{2}E_G}{30(1-v_G^2)}(-u_{xx})^{5/2}. \tag{20}$$

由此可得弹性模量

$$K = \frac{\sigma_{xx}}{-u_{xx}} = \frac{\sqrt{2}E_G}{12(1-v_G^2)}(-u_{xx})^{1/2}. \tag{21}$$

另外我们看到,热力学关系 $\sigma_{xx} = -\partial\phi/\partial u_{xx}$ 的确成立.

上面的推导过程大致如下:1)考虑一颗粒系统在外力下作可逆变形的动态过程,并用相应的介观理论(如赫兹接触力学)算出介观质量,介观质量流,介观能量,介观应力等的时空分布.2)用粗粒平均算出它们的宏观对应.3)将得到的宏观质量和质量流代入定义位移的方程(2),并积分算出位移.微分位移即得应变.4)通过对比,我们能找到应力和应变,或能量和应变之间的函数关系,由此可得到弹性模量.

因此,从介观出发推导颗粒体的力学参数的主要困难是我们往往不能只计算系统的某个静止状态,而需要考虑系统的某个可逆过程.显然这是因为位移或应变不是粗粒化平均量,并且定义它们的宏观方程含有时间的导数.值得注意的是,我们不能简单地认为颗粒体的应变等于每个粒子的应变的平均.的确,即使对这里讨论的模型,一个颗粒内的平均应变是(考虑 2D 情形)

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{\text{颗粒内}} u'_{xx}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{\text{颗粒内}} \frac{\partial u'_x(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi R^2}\int_{-R}^{R} l(y)\,\mathrm{d}y,$$

其中 $l(y)$的定义见图 2.它显然不等于从(18)式的宏观应变:

$$u_{xx} \approx R^{-1}h = R^{-1}l(y=0).$$

5.讨　　论

位移和应变与微观或介观模型之间的关系的确不是一个简单问题.早在五十多年前研究周期晶体的晶格动力学与经典弹性理论的关系时,玻恩和黄昆很慎重地讨论了均匀变形晶格情况下的弹性应变的算法,并认为长波长格波对应于经典弹性波[13].对非均匀形变以及纳米或无序系统,Goldhirsch 和 Goldenberg 最近提出的位移近似公式(12)与以前的一些工作有很大的出入[12],并提醒由于应变计算的不准确可能导致不可靠的本构关系.可以验证在均匀形变时,(12)式给出的应变与玻恩和黄昆的应变是吻合的.对颗粒体,由于组成颗粒的有限大小,无抗拉伸能力和远比晶体明显的耗散行为,应变问题变得更为复杂,这使得一些人怀疑它的有效性[5—7].在本文中,我们强调指出位移概念的热力学基础是有限大小的平衡区和准静态过程.尽管目前还不清楚它与介观理论之间的关系,但仅从干沙堆能在地球重力下稳定地存在这一简单事实,就可以看出位移对颗粒体仍然有效.因此仅从宏观上看,颗粒体的主要力学问题应是如何在古老的弹性理论结构框架内合理地找出它的应力-应变关系.有幸的是,这个问题仍能用简单的宏观论证加以解决[9,10].

从介观出发计算颗粒体的力学行为显然极其困难.首先三维的无序堆积系统和颗粒间的固-固接触力学就很难处理,特别是接触面上的剪切力问题(又称静摩擦力.注意赫兹接触理论仅局限于计算两固体球在沿球心连线方向上的压力作用下的变形,

未涉及剪切或静摩擦现象.)另外由于不是粗粒化平均量,位移和应变的计算也很复杂.为避免求解含时间导数的微分方程(1—2),可以试建立一个位移的近似公式.最简单的做法是直接推广(12)式,因为它的分母是质量密度,分子可以解释成"质量位移"场,而且两者都是粗粒化平均量,并对颗粒体也有意义.这类复杂的介观计算有助于我们进一步了解材料参数的大小和本构关系,但不会改变弹性理论的基本结构.

[1] Landau L D and Lifscitz E M 1954 *Continuum Dielectric Mechanics* (Soviet Russia : State-Run Techno-Theory Liber Press) (in Russian)

[2] de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 374

[3] Evesque P P and de Gennes P G 1998 *C. R. Acad. Sci. Paris* **326** 761

[4] Xie X M, Jiang Y M, Wang H Y, Cao X P and Mario Liu 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2194 (in Chinese) [**谢晓明、蒋亦民、王焕友、曹晓平、刘 佑** 2003 **物理学报 52** 2194]

[5] Wittmer J P, Bouchaud J P and Claudin P 1998 *Phil. Trans. R. Soc. Lond* A **356** 2535

[6] Wittmer J P, Cates M E and Claudin P 1997 *J. Phys. I France* **7** 39

[7] Cates M E, Wittmer J P, Bouchaud J P and Claudin P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1841

[8] Huang W X *et al* 1983 *The Engineering Character of Soil* (Beijing : Water Conservancy and Electric Power Press) (in Chinese) [**黄文熙主编** 1983 **土的工程性质(北京 冰利电力出版社)**]

[9] Jiang Y M and Mario Liu 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 148001

[10] Jiang Y M and Mario Liu 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 144301

[11] Temmen H, Pleiner H, Liu M and Brand H R 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 3228

[12] Goldhirsch I and Goldenberg C 2002 *Eur. Phys. J.* E **9** 245

[13] Born M and Huang K 1954 *Dynamical Theory of Crystal Lattice* (Oxford : Clarendon Press)

Strain and elasticity of static granular matter

Wang Huan-You[1)] Cao Xiao-Ping[1)] Jiang Yi-Min[1),2)] Mario Liu[2)]

[1)] (*College of Physical Science and Technology, Central South University, Changsha* 410083, *China*)

[2)] (*Theoretische Physik, Universitaet Tuebingen*, 72076 *Tuebingen, Germany*)

(Received 27 November 2003 ; revised manuscript received 18 October 2004)

Abstract

This paper shows that for a static cohesionless granular material simply averaging in space the strains inside grains does not result in its macroscopic strain, so the fields of displacement vector and strain tensor do not have the property of coarse-graining. However this gives no disturbance to the validity of the notions of strain and elasticity for the granular material because they are based on the equilibrium thermodynamics.

Keywords : cohesionless granular matter, strain, elasticity, coarse-graining

PACC : 4610, 4620, 4690