

广义经典力学系统的对称性与 Mei 守恒量*

张 毅†

(苏州科技学院土木工程系, 苏州 215011)

(2004 年 11 月 1 日收到, 2004 年 12 月 15 日收到修改稿)

研究广义经典力学系统的对称性和一类新型守恒量——Mei 守恒量. 在高维增广相空间中建立了系统的运动微分方程, 给出了系统的 Mei 对称性、Noether 对称性和 Lie 对称性的判据, 得到了分别由三种对称性导致 Mei 守恒量的条件和 Mei 守恒量的形式. 举例说明结果的应用.

关键词: 广义经典力学, Mei 对称性, Noether 对称性, Lie 对称性, 守恒量

PACC: 0320, 1110, 0220

1. 引 言

力学系统的对称性与守恒量有密切关系. 对称性方法是研究守恒量的一个近代方法, 主要有 Noether 对称性^[1-6], Lie 对称性^[6-11], Mei 对称性^[12-17]等. 由 Noether 对称性可直接导出 Noether 守恒量, 由 Lie 对称性可直接导出 Hojman 守恒量. 最近梅凤翔从力学系统的形式不变性, 即 Mei 对称性, 直接得到了一类新型守恒量^[18], 可称为 Mei 守恒量.

描述动力学系统的 Lagrange 函数含广义坐标对时间的高阶导数, 称为广义经典力学系统或高阶微商系统. 1848—1858 年间, Ostrogradsky 和 Jacobi 最早开始了对此类系统的研究. 20 世纪中叶以来, 广义经典力学理论得到了很大发展, 取得了许多重要成果^[19-21]. 本文将梅凤翔的结果^[18]进一步推广到广义经典力学系统. 首先, 建立了系统的运动微分方程, 给出了系统在高维增广相空间中的 Mei 对称性、Noether 对称性、Lie 对称性的判据; 其次, 给出了由系统的 Mei 对称性直接导出守恒量的条件, 得到了系统的一类新型守恒量, 称之为广义经典力学系统的 Mei 守恒量. 同时指出由系统的 Noether 对称性、Lie 对称性通过 Mei 对称性也可间接导出 Mei 守恒量. 文末给出了一个算例, 以说明结果的应用.

2. 系统的运动微分方程

研究 n 个自由度的广义经典力学系统. 假设系统的位形由 n 个广义坐标 $q^i (i = 1, \dots, n)$ 来确定, 其 Lagrange 函数为

$$L = L(t, q^i_{(0)}, q^i_{(1)}, \dots, q^i_{(\omega)}), (i = 1, \dots, n), \quad (1)$$

其中

$$q^i_{(j)} = \frac{d^j}{dt^j} q^i(t), (i = 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, \omega), \quad (2)$$

系统的广义 Euler-Lagrange 方程为

$$\sum_{j=0}^{\omega} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial q^i_{(j)}} = 0, (i = 1, \dots, n). \quad (3)$$

引进广义动量和广义 Hamilton 函数

$$p_i^{(s)} = p_{i(s+1)} = \sum_{j=0}^{\omega-s-1} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial q^i_{(j+s+1)}}, \quad (i = 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, \omega - 1), \quad (4)$$

$$H(t, q_{(s)}, p^{(s)}) = p_i^{(s)} q^i_{(s+1)} - L, \quad (i = 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, \omega - 1), \quad (5)$$

则系统的运动方程(3)可表为正则形式^[5]

$$\dot{q}^i_{(s)} = \frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}} p_i^{(s)} = - \frac{\partial H}{\partial q^i_{(s)}}, \quad (i = 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, \omega - 1), \quad (6)$$

设系统是非奇异的, 则方程(6)可展开为显形式

$$\dot{q}^i_{(s)} = g^i_{(s)}(t, q_{(s)}, p^{(s)}),$$

* 江苏省高校自然科学基金(批准号 D4KJA130135), 江苏省青蓝工程基金资助的课题.

† E-mail: weidiezhang@pub.sz.jsinfo.net

$$p_i^{(s)} = h_i^{(s)} \chi(t, \mathbf{q}_{(s)}, \mathbf{p}^{(s)})$$

$$(i = 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, \omega - 1). \quad (7)$$

3. 系统的 Mei 对称性、Noether 对称性和 Lie 对称性判据

在高维增广相空间中,取无限小变换为

$$t^* = t + \Delta t, \quad q_{(s)}^i(t^*) = q_{(s)}^i(t) + \Delta q_{(s)}^i,$$

$$p_i^{(s)*}(t^*) = p_i^{(s)}(t) + \Delta p_i^{(s)}, \quad (8)$$

其展开式为

$$t^* = t + \varepsilon \tau(t, \mathbf{q}_{(s)}, \mathbf{p}^{(s)}),$$

$$q_{(s)}^i = q_{(s)}^i + \varepsilon \xi_{(s)}^i(t, \mathbf{q}_{(s)}, \mathbf{p}^{(s)}),$$

$$p_i^{(s)*} = p_i^{(s)} + \varepsilon \eta_i^{(s)}(t, \mathbf{q}_{(s)}, \mathbf{p}^{(s)}), \quad (9)$$

其中 ε 为无限小参数, $\tau, \xi_{(s)}^i, \eta_i^{(s)}$ 为无限小变换的生成元.

假设经历变换(9)后,广义 Hamilton 函数 $H(t, \mathbf{q}_{(s)}, \mathbf{p}^{(s)})$ 变为 $H^* = H(t^*, \mathbf{q}_{(s)}^*, \mathbf{p}^{(s)*})$, 如果用变换后的动力学函数 H^* 代替变换前的动力学函数 H , 方程(6)的形式保持不变, 则称这种不变性为广义经典力学系统(6)的形式不变性^[17], 或 Mei 对称性. 有如下判据.

判据 1 对广义经典力学系统(6), 如果无限小生成元 $\tau, \xi_{(s)}^i, \eta_i^{(s)}$ 满足关系

$$\frac{\partial}{\partial p_i^{(s)}} \{X^{(0)} \chi(H)\} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q_{(s)}^i} \{X^{(0)} \chi(H)\} = 0,$$

$$(i = 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, \omega - 1), \quad (10)$$

其中

$$X^{(0)} = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \xi_{(s)}^i \frac{\partial}{\partial q_{(s)}^i} + \eta_i^{(s)} \frac{\partial}{\partial p_i^{(s)}}, \quad (11)$$

则相应不变性为系统的 Mei 对称性.

称方程(10)为广义经典力学系统的 Mei 对称性的判据方程.

Noether 对称性是 Hamilton 作用量在群的无限小变换下的一种不变性^[1]. 对于广义经典力学系统(6), 有如下判据.

判据 2 对广义经典力学系统(6), 如果存在规范函数 $G_N = G_N(t, \mathbf{q}_{(s)}, \mathbf{p}^{(s)})$ 使无限小生成元 $\tau, \xi_{(s)}^i, \eta_i^{(s)}$ 满足条件

$$p_i^{(s)} \xi_{(s)}^i - \frac{\partial H}{\partial t} \tau - \frac{\partial H}{\partial q_{(s)}^i} \xi_{(s)}^i - H \tau + \dot{G}_N = 0,$$

$$(12)$$

则相应不变性为系统的 Noether 对称性.

称方程(12)为广义经典力学系统(6)的 Noether 等式.

Lie 对称性是微分方程在群的无限小变换下的一种不变性^[7]. 对于广义经典力学系统(6), 有如下判据^[17].

判据 3 对广义经典力学系统(6), 如果无限小生成元 $\tau, \xi_{(s)}^i, \eta_i^{(s)}$ 满足关系

$$\xi_{(s)}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}} \tau = X^{(0)} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}} \right),$$

$$\xi_i^{(s)} + \frac{\partial H}{\partial q_{(s)}^i} \tau = -X^{(0)} \left(\frac{\partial H}{\partial q_{(s)}^i} \right),$$

$$(i = 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, \omega - 1), \quad (13)$$

则相应不变性为系统的 Lie 对称性.

称方程(13)为广义经典力学系统(6)的 Lie 对称性的确定方程.

4. 系统的对称性导致的 Mei 守恒量

广义经典力学系统的 Mei 对称性仅在一定条件下才导致守恒律. 由 Mei 对称性寻找守恒律的途径主要有: 一是通过 Noether 对称性间接得到 Noether 守恒量^[17]; 二是通过特殊 Lie 对称性可以间接得到 Hojman 守恒量. 而下面的定理导出了由广义经典力学系统的 Mei 对称性直接导致的一类新型守恒量——Mei 守恒量. 给出了由 Mei 对称性导致 Mei 守恒量的条件和 Mei 守恒量的形式.

定理 1 对于广义经典力学系统(6), 如果无限小变换(9)相应于系统的 Mei 对称性, 且存在规范函数 $G_M = G_M(t, \mathbf{q}_{(s)}, \mathbf{p}^{(s)})$ 满足如下结构方程

$$X^{(0)} \chi(p_i^{(s)}) \frac{\bar{d}}{dt} \xi_{(s)}^i + \frac{\bar{d}}{dt} \{X^{(0)} \chi(p_i^{(s)})\} \xi_{(s)}^i$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \{X^{(0)} \chi(H)\} \tau - X^{(0)} \chi(H) \frac{\bar{d}}{dt} \tau + \frac{\bar{d}}{dt} G_M$$

$$= 0, \quad (14)$$

其中

$$\frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}} \frac{\partial}{\partial q_{(s)}^i} - \frac{\partial H}{\partial q_{(s)}^i} \frac{\partial}{\partial p_i^{(s)}}, \quad (15)$$

则系统存在如下形式的 Mei 守恒量

$$I_M = X^{(0)} \chi(p_i^{(s)}) \xi_{(s)}^i - X^{(0)} \chi(H) \tau + G_M = \text{const.}$$

$$(16)$$

证明

$$\frac{\bar{d}}{dt} I_M = X^{(0)} \chi(p_i^{(s)}) \frac{\bar{d}}{dt} \xi_{(s)}^i + \frac{\bar{d}}{dt} \{X^{(0)} \chi(p_i^{(s)})\} \xi_{(s)}^i$$

$$- \frac{\bar{d}}{dt} \{X^{(0)} \chi(H)\} \tau - X^{(0)} \chi(H) \frac{\bar{d}}{dt} \tau + \frac{\bar{d}}{dt} G_M. \quad (17)$$

由(15)式得到

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}}{dt}\{X^{(0)}(H)\} &= \frac{\partial}{\partial t}\{X^{(0)}(H)\} \\ &+ \frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}} \frac{\partial}{\partial q_i^{(s)}}\{X^{(0)}(H)\} \\ &- \frac{\partial H}{\partial q_i^{(s)}} \frac{\partial}{\partial p_i^{(s)}}\{X^{(0)}(H)\}. \end{aligned} \quad (18)$$

由于无限小变换(9)相应于系统的 Mei 对称性,将 Mei 对称性的判据方程(10)代入上式,得

$$\frac{\bar{d}}{dt}\{X^{(0)}(H)\} = \frac{\partial}{\partial t}\{X^{(0)}(H)\}. \quad (19)$$

将(19)式代入(17)式,利用结构方程(14),有

$$\frac{\bar{d}}{dt}I_M = 0, \quad (20)$$

于是定理成立.证毕.

由定理 1 可以得到如下推论.

推论 1 如果无限小变换(9)的生成元满足关系

$$\begin{aligned} X^{(0)}(H) &= H, X^{(0)}(p_i^{(s)}) = p_i^{(s)}, \\ (i &= 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, \omega - 1), \end{aligned} \quad (21)$$

则广义经典力学系统(6)的 Mei 对称性结构方程(14)归为 Noether 等式,系统的 Mei 对称性也是系统的 Noether 对称性,系统的 Mei 守恒量归为系统的 Noether 守恒量.

推论 2 如果无限小变换(9)的生成元满足关系

$$\begin{aligned} X^{(0)}(H) &= 0, X^{(0)}(p_i^{(s)}) = 0, \\ (i &= 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, \omega - 1), \end{aligned} \quad (22)$$

则广义经典力学系统(6)的 Mei 对称性对应平凡守恒量,即 $I_M = 0$.

对广义经典力学系统(6),由 Noether 对称性通过 Mei 对称性可间接导出 Mei 守恒量,有如下结果.

定理 2 对于广义经典力学系统(6),如果系统 Noether 对称性的无限小生成元 $\tau, \xi_i^{(s)}, \eta_i^{(s)}$ 满足关系(10),且存在规范函数 $G_M = G_M(t, q_i^{(s)}, p_i^{(s)})$ 满足结构方程(14),则系统的 Noether 对称性导致 Mei 守恒量(16).

对广义经典力学系统(6),由 Lie 对称性通过 Mei 对称性可间接导出 Mei 守恒量,有如下结果.

定理 3 对于广义经典力学系统(6),如果系统 Lie 对称性的无限小生成元 $\tau, \xi_i^{(s)}, \eta_i^{(s)}$ 满足关系(10),且存在规范函数 $G_M = G_M(t, q_i^{(s)}, p_i^{(s)})$ 满足结构方程(14),则系统的 Lie 对称性导致 Mei 守恒

量(16).

5. 算 例

例 假设某广义经典力学系统的 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\alpha_1(q_{(1)}^1)^2 + \frac{1}{2}\alpha_2(q_{(2)}^1)^2, \\ (\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0), \end{aligned} \quad (23)$$

试研究系统的对称性与 Mei 守恒量.

首先,研究系统的 Mei 对称性与 Mei 守恒量.广义动量和广义 Hamilton 函数为

$$p_1^{(0)} = \alpha_1 q_{(1)}^1 - \alpha_2 \dot{q}_{(2)}^1, p_1^{(1)} = \alpha_2 q_{(2)}^1, \quad (24)$$

$$H = p_1^{(0)} q_{(1)}^1 + \frac{1}{2\alpha_2}(p_1^{(1)})^2 - \frac{1}{2}\alpha_1(q_{(1)}^1)^2. \quad (25)$$

系统的运动微分方程为

$$\begin{aligned} \dot{q}_{(0)}^1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1^{(0)}} = q_{(1)}^1, \dot{q}_{(1)}^1 = \frac{\partial H}{\partial p_1^{(1)}} = \frac{1}{\alpha_2} p_1^{(1)}, \\ \dot{p}_1^{(0)} &= -\frac{\partial H}{\partial q_{(0)}^1} = 0, \dot{p}_1^{(1)} = -\frac{\partial H}{\partial q_{(1)}^1} = -p_1^{(0)} + \alpha_1 q_{(1)}^1. \end{aligned} \quad (26)$$

利用(11)式,计算得

$$\begin{aligned} X^{(0)}(H) &= (\eta_1^{(0)} - \alpha_1 \xi_{(1)}^1) q_{(1)}^1 \\ &+ \xi_{(1)}^1 p_1^{(0)} + \frac{1}{\alpha_2} \eta_1^{(1)} p_1^{(1)}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$X^{(0)}(p_1^{(0)}) = \eta_1^{(0)}, X^{(0)}(p_1^{(1)}) = \eta_1^{(1)}, \quad (28)$$

取生成元为

$$\begin{aligned} \tau &= 0, \xi_{(0)}^1 = 1, \xi_{(1)}^1 = 0, \eta_1^{(0)} = p_1^{(1)}, \\ \eta_1^{(1)} &= -\alpha_2 q_{(1)}^1, \end{aligned} \quad (29)$$

则有

$$\begin{aligned} X^{(0)}(H) &= 0, X^{(0)}(p_1^{(0)}) = p_1^{(1)}, \\ X^{(0)}(p_1^{(1)}) &= -\alpha_2 q_{(1)}^1. \end{aligned} \quad (30)$$

由判据 1 可知生成元(29)对应系统的 Mei 对称性.结构方程(14)给出

$$G_M = p_1^{(0)} t - \alpha_1 q_{(0)}^1. \quad (31)$$

将(29)–(31)式代入(16)式,得到系统的一个 Mei 守恒量

$$I_M = p_1^{(1)} + p_1^{(0)} t - \alpha_1 q_{(0)}^1 = \text{const.} \quad (32)$$

若取生成元为

$$\tau = 0, \xi_{(0)}^1 = 1, \xi_{(1)}^1 = 0, \eta_1^{(0)} = 0, \eta_1^{(1)} = 0, \quad (33)$$

则有

$$\begin{aligned} X^{(0)}(H) &= 0, X^{(0)}(p_1^{(0)}) = 0, X^{(0)}(p_1^{(1)}) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

由定理 1 的推论 2 ,Mei 对称性生成元(33)相应的 Mei 守恒量是平凡的.

其次 ,研究系统的 Noether 对称性与 Mei 守恒量 .Noether 等式(12)给出

$$p_1^{(0)} \dot{\xi}_{(0)}^1 + p_1^{(1)} \dot{\xi}_{(1)}^1 - (p_1^{(0)} - \alpha_1 q_{(1)}^1) \dot{\xi}_{(1)}^1 - H\dot{\tau} + \dot{G}_N = 0, \quad (35)$$

方程(35)有如下解

$$\tau = 0, \dot{\xi}_{(0)}^1 = 0, \dot{\xi}_{(1)}^1 = p_1^{(1)}, \eta_1^{(0)} = \alpha_1 p_1^{(1)}, \eta_1^{(1)} = -\alpha_2 p_1^{(0)}, G_N = -(p_1^{(1)})^2. \quad (36)$$

经计算 ,有

$$X^{(0)}(H) = 0, X^{(0)}(p_1^{(0)}) = \alpha_1 p_1^{(1)}, X^{(0)}(p_1^{(1)}) = -\alpha_2 p_1^{(0)}. \quad (37)$$

因此生成元(36)满足关系(10) ,而结构方程(14)给出

$$G_M = -\alpha_2 (p_1^{(0)})^2 + \alpha_1 \alpha_2 p_1^{(0)} q_{(0)}^1. \quad (38)$$

守恒量(16)式给出

$$I_M = -\alpha_2 p_1^{(0)} p_1^{(1)} - \alpha_2 (p_1^{(0)})^2 + \alpha_1 \alpha_2 p_1^{(0)} q_{(0)}^1 = \text{const}. \quad (39)$$

这是由系统的 Noether 对称性(36)导致的 Mei 守恒量 .

最后 ,研究系统的 Lie 对称性与 Mei 守恒量 .Lie 对称性的确定方程(13)给出

$$\dot{\xi}_{(0)}^1 - q_{(1)}^1 \dot{\tau} = \dot{\xi}_{(1)}^1, \dot{\xi}_{(1)}^1 - \frac{1}{\alpha_2} p_1^{(1)} \dot{\tau} = \frac{1}{\alpha_2} \eta_1^{(1)}, \dot{\eta}_1^{(0)} = 0, \dot{\eta}_1^{(1)} + (p_1^{(0)} - \alpha_1 q_{(1)}^1) \dot{\tau} = -\eta_1^{(0)} + \alpha_1 \dot{\xi}_{(1)}^1. \quad (40)$$

方程(40)有解

$$\tau = 0, \dot{\xi}_{(0)}^1 = 1, \dot{\xi}_{(1)}^1 = 0, \eta_1^{(0)} = 0, \eta_1^{(1)} = 0. \quad (41)$$

计算可得

$$X^{(0)}(H) = 0. \quad (42)$$

易知 Lie 对称性(41)导致的 Mei 守恒量是平凡的 .

[1] Noether A E 1918 *Invariante Variationsprobleme Nachr Akad Wiss Göttingen Math Phys* **KI** , II 235

[2] Vujanović B 1986 *Acta Mechanica* **65** 63

[3] Liu D 1991 *Science in China (Series A)* **34** 419

[4] Mei F X , Liu D and Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing : Beijing Institute of Technology Press) [in Chinese] 梅凤翔、刘 端、罗 勇 1991 高等分析力学(北京 :北京理工大学出版社)

[5] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing : Beijing Polytechnic University Press) [in Chinese] 李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 :北京工业大学出版社)

[6] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing : Science Press) (in Chinese) 梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 :科学出版社)

[7] Lutzky M 1979 *Journal Phys A : Math Gen* **12** 973

[8] Zhao Y Y 1994 *Acta Mech. Sin.* **26** 380 [in Chinese] 赵跃宇 1994 力学学报 **26** 380]

[9] Zhang Y and Mei F X 2000 *Chinese Science Bulletin* **45** 1354

[10] Hojman S A 1992 *J. Phys. A : Math Gen* **25** L291

[11] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) 张 毅 2002 物理学报 **51** 461]

[12] Mei F X 2000 *Journal of Beijing Institute of Technology* **9** 120

[13] Wang S Y and Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[14] Fang J H , Yan X H and Chen P S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1561 (in Chinese) 方建会、闫向宏、陈培胜 2003 物理学报 **52** 1561]

[15] Wang S Y and Mei F X 2002 *Journal of Beijing Institute of Technology* **22** 130 [in Chinese] 王树勇、梅凤翔 2002 北京理工大学学报 **22** 139]

[16] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449

[17] Zhang Y and Mei F X 2003 *Chin. Phys.* **12** 1058

[18] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing : Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) 梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京 :北京理工大学出版社)

[19] Podolsky B 1942 *Phys. Rev.* **65** 228

[20] De León M and Rodrigues P R 1985 *Generalized Classical Mechanics and Field Theory* (ESPBV , Amster-dam) p 1

[21] Zhang Y 2004 *Journal of University of Science and Technology of Suzhou (Natural Science Edition)* **21** 32 [in Chinese] 张 毅 2004 苏州科技学院学报(自然科学版) **21** 32]

Symmetries and Mei conserved quantities for systems of generalized classical mechanics^{*}

Zhang Yi

(*Department of Civil Engineering , University of Science and Technology of Suzhou , Suzhou 215011 , China*)

(Received 1 November 2004 ; revised manuscript received 15 December 2004)

Abstract

In this paper , the symmetries and a new type of conserved quantities called Mei conserved quantities for systems of generalized classical mechanics are studied . In the high-dimensional extended phase space , the differential equations of motion of the systems are established , and the criteria for Mei symmetries , Noether symmetries and Lie symmetries of the systems are given . The conditions , under which the above three symmetries can respectively lead to the Mei conserved quantities , and the form of the Mei conserved quantities are obtained . Finally , an example is given to illustrate the application of the results .

Keywords : generalized classical mechanics , Mei symmetry , Noether symmetry , Lie symmetry , conserved quantity

PACC : 0320 , 1110 , 0220

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of High Education of Jiangsu Province , China (Grant No. 04KJA130135) and the ' Qing Lan ' Project Foundation of Jiangsu Province of China .