第 54 卷 第 7 期 2005 年 7 月
1000-3290/2005/54(07)/2985-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.7,July,2005

相对论 Birkhoff 系统的对称性与稳定性

张 凯 冯 俊

(西北大学物理系,西安 710069)

(2004 年 6 月 28 日收到;2004 年 11 月 29 日收到修改稿)

讨论了相对论 Birkhoff 系统的三种对称性之间的关系,并利用 Liapunov 方法得到系统稳定性的若干判据.随后,应用能量-Casimir 函数法将系统稳定性与守恒量联系在了一起,并给出了算例.

关键词:相对论 Birkhoff 系统,对称性关系,稳定性,Liapunov 方法,能量-Casimir 函数

PACC:0320,0330,0412

1.引 言

作为比 Hamilton 力学更为普遍的形式,Birkhoff 力学自 1927 年以来便备受关注,并成为分析力学现代发展的一个重要方向.近年来,更成为国内外数学力学界的一个热门研究课题.在建立 Birkhoff 动力学及其稳定性理论之后,很自然地希望得到其在相对论条件下的行为,作为相对论分析力学的进一步发展,促成了如今相对论 Birkhoff 动力学[1—4]和转动相对论 Birkhoff 动力学[5—8]的建立.同时动力学系统对称性及稳定性的研究在一定程度上与这种努力是相通的,都在寻找更为普遍的规律以联系并涵盖更为广泛的物理事实,这一点可以从 Noether 发表其"守恒量与其内在对称性具有深刻联系"以及 Arnold 等人建立的联系对称性与稳定性的能量-Casimir 函数法以来,大量物理学家的一系列相关工作中可见[9—11].

文章总结了相对论 Birkhoff 系统三类对称性之间的关系;其次,利用 Liapunov 方法得到相对论 Birkhoff 系统稳定性判据;最后,运用 Casimir 法讨论了稳定性与守恒量的关系,并给出了算例.

2.相对论 Birkhoff 系统的对称性

对文献[2]定义的相对论 Birkhoff 系统,定义 $\omega_{\mu\nu}$ 为 Birkhoff 协变张量

$$(\omega_{\mu\nu}) = \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}. \tag{1}$$

若系统非奇异,则存在反称逆变张量 $\omega^{\mu\nu} = (\omega_{\mu\nu})^{-1}$,则得相对论 Birkhoff 方程

$$\dot{a}^\mu - \omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right) = 0, \tag{2}$$

其中 B 和 R_ν 分别为系统的相对论性 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组.

一般地,除了以对称性定理判断系统是否具有某种对称性[9—11,14]以外,还可以通过考察对称性之间的联系来互相诱导三类对称性——Noether 对称性,Lie 对称性和 Mei 对称性.

引入无限小变换

$$\begin{cases} t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, a^\mu), \\ a^{\mu^*} = a^\mu + \varepsilon\xi_\mu(t, a^\mu), \end{cases} \tag{3}$$

其中 ε 为无穷小参量,ξ_0,ξ_μ 为无限小生成元.

定理 1. 若相对论 Birkhoff 系统具有 Noether 对称性,则当变换(3)中生成元 ξ_0,ξ_μ 和规范函数 G 满足

$$\begin{cases} X^{(0)}(R_\mu) = \dfrac{\partial}{\partial a^\mu}\displaystyle\int(R_\mu\dot{\xi}_\mu - B\dot{\xi}_0 + \dot{G})\mathrm{d}t, \\ X^{(0)}(B) = (R_\mu\dot{\xi}_\mu - B\dot{\xi}_0 + \dot{G}) \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial a^\mu}\displaystyle\int(R_\mu\dot{\xi}_\mu - B\dot{\xi}_0 + \dot{G})\mathrm{d}t. \end{cases} \tag{4}$$

相对论 Birkhoff 系统同时具有 Mei 对称性,并存在守恒量

$$I = R_\mu\xi_\mu - B\xi_0 + G = \text{const}. \tag{5}$$

定理 2 相对论 Birkhoff 系统在无穷小变换(3)下,无限小生成元 ξ_0,ξ_μ 满足条件

$$(\dot{a}^\nu\dot{\xi}_0 - \ddot{a}^\nu\xi_0 - \dot{\xi}_\nu)\omega_{\mu\nu} - \frac{\partial\xi_0}{\partial a^\mu}\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial\xi_\nu}{\partial a^\mu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu} - \dot{\xi}_0\frac{\partial R_\mu}{\partial t} - \dot{\xi}_\nu\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} = 0, \tag{6}$$

并可找到规范函数 G 满足结构方程,则其对应的 Lie 对称性是 Mei 对称性.

3. 相对论 Birkhoff 系统的稳定性

3.1. 相对论 Birkhoff 系统的受扰运动微分方程

设参考运动为

$$a_p^v = a_p^v(t;t_0,a_{p0}^1,a_{p0}^2,\cdots,a_{p0}^{2n}), \tag{7}$$

即在物理上表示给定初始条件

$$a_p^v(t_0;t_0,a_{p0}^1,a_{p0}^2,\cdots,a_{p0}^{2n}) = a_{p0}^v$$

的方程(2)的解.

令

$$a^v = a_p^v + \xi^v, \tag{8}$$

其中 ξ^v 为扰动. 将(8)式代入(2)式,得到相对论 Birkhoff 系统的受扰运动微分方程[12]

$$\omega_{\mu v}\big|_{a_p^v}\dot{\xi}^v + \frac{\partial}{\partial a^v}\left(\omega_{\mu\rho}\dot{a}^\rho - \left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)\right)\bigg|_{a_p^v}\xi^v$$

$$= \Lambda_\mu(\xi^v,\dot{\xi}^v,t). \tag{9a}$$

将(2)式代入上式得 $\omega_{\mu v}\ |_{a_p^v}\dot{\xi}^v = \Lambda_\mu(\xi^v,\dot{\xi}^v,t)$,因此,我们不能用(9a)式研究系统在运动状态流形上的稳定性.

利用 Liapunov 变换[15]

$$\begin{cases} \xi^v = a^v - a_p^v, \\ f(t,\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^{2n}) \\ \quad = \omega^{\mu v}\left(\dfrac{\partial B}{\partial a^\mu} + \dfrac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)\bigg|_{a^v} - \omega^{\mu v}\left(\dfrac{\partial B}{\partial a^\mu} + \dfrac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)\bigg|_{a_p^v}, \end{cases} \tag{10}$$

将(10)式代入(2)式,得到相对论 Birkhoff 系统的受扰运动微分方程

$$\dot{\xi}^v - \frac{\partial}{\partial a^\rho}\omega^{\mu v}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)\bigg|_{a_p^v}\xi^\rho = \Lambda_\mu(\xi^v,\dot{\xi}^v,t). \tag{9b}$$

相应的相对论 Birkhoff 系统的一次近似方程为

$$\omega_{\mu v}\big|_{a_p^v}\dot{\xi}^v + \frac{\partial}{\partial a^v}\left(\omega_{\mu\rho}\dot{a}^\rho - \left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)\right)\bigg|_{a_p^v}\xi^v = 0, \tag{11a}$$

$$\omega_{\mu v}\big|_{a_p^v}\dot{\xi}^v = \omega_{\mu v}\frac{\partial}{\partial a^\rho}\omega^{\mu v}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)\bigg|_{a_p^v}\xi^\rho. \tag{11b}$$

3.2. 自治、半自治相对论 Birkhoff 系统的稳定性

对自治、半自治相对论 Birkhoff 系统,(9)式变为

$$\omega_{\mu v}\big|_{a_p^v}\dot{\xi}^v + \frac{\partial}{\partial a^v}\left(\omega_{\mu\rho}\dot{a}^\rho - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\bigg|_{a_p^v}\xi^v = 0, \tag{12a}$$

$$\omega_{\mu v}\big|_{a_p^v}\dot{\xi}^v = \omega_{\mu v}\frac{\partial}{\partial a^\rho}\omega^{\mu v}\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\bigg|_{a_p^v}\xi^\rho. \tag{12b}$$

3.2.1 平衡稳定性[12,13]

自治相对论 Birkhoff 系统的平衡稳定性已经得到了完整的解决,在此仅引用结论:

定理 3 自治相对论 Birkhoff 系统一次近似方程的特征根总是成对互为反号出现,由定理 3 知

定理 4 如果自治相对论 Birkhoff 系统一次近似方程出现实部不为零的特征根,则平衡不稳定.若特征根的实部全为零,自治相对论 Birkhoff 系统的平衡稳定性取决于高阶项.

3.2.2 运动稳定性

考虑到 $\omega^{\mu v}$ 的反对称性,有

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial B}{\partial a^v}(\dot{a}_p^v + \dot{\xi}^v) = \frac{\partial B}{\partial a^v}\omega^{v\mu}\frac{\partial B}{\partial a^\mu} = 0.$$

根据 Liapunov 直接法得到

定理 5 如果相对论 Birkhoff 函数在解(7)附近相对 ξ^v 是定号的,正定的或负定的,那么系统的无扰运动是稳定的.

对于(9b)式,令

$$\Omega_{\mu\rho} = \omega_{\mu v}\frac{\partial}{\partial a^\rho}\omega^{\mu v}\frac{\partial B}{\partial a^\mu}$$

$$= \frac{\partial}{\partial a^\rho}\frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \omega^{\mu v}\left(\frac{\partial}{\partial a^\rho}\omega_{\mu v}\right)\frac{\partial B}{\partial a^\mu},$$

显然,当

$$\frac{\partial}{\partial a^\rho}\omega_{\mu v} = \frac{\partial^2 R_v}{\partial a^\rho\partial a^\mu} - \frac{\partial^2 R_\mu}{\partial a^\rho\partial a^v} = 0 \tag{13}$$

时,定理 3,4 也适用于自治、半自治相对论 Birkhoff 系统运动稳定性的判定.

3.3. 非自治相对论 Birkhoff 系统的稳定性

对非自治系统方程(12)不变.由于方程(12)一般都显含时间所以方程的稳定性分析变得更加困难,但有时也可以不显含时间 t.显然

当 Birkhoff 系统为非自治系统时,令

$$\Omega_{\mu\rho} = \omega_{\mu v}\frac{\partial}{\partial a^\rho}\omega^{\mu v}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial a^\rho}\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial^2 R_\mu}{\partial a^\rho\partial t} + \left(\omega^{\mu v}\frac{\partial}{\partial a^\rho}\omega_{\mu v}\right)\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right).$$

当

$$\frac{\partial}{\partial a^\rho}\omega_{\mu v} = \frac{\partial}{\partial t}\omega_{\mu v} = 0, \tag{14}$$

有

$$\Omega_{\mu\rho}-\Omega_{\rho\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial^2 R_{\mu}}{\partial a^{\rho}\partial t}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial a^{\mu}}\frac{\partial B}{\partial a^{\rho}}+\frac{\partial^2 R_{\rho}}{\partial a^{\mu}\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\omega_{\rho\mu}=0.$$

故当 Birkhoff 系统为非自治系统时，若(14)式成立，则定理 3，4 适用于非自治 Birkhoff 系统稳定性的判定.

4. 相对论 Birkhoff 系统守恒量与稳定性的关系

对自治形式的相对论 Birkhoff 方程，定义函数 $A(a^1,a^2,\cdots,a^{2n})$ 的时间导数

$$\dot{A}=\frac{\partial A}{\partial a^{\mu}}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}=\{A,B\},\tag{15}$$

显然有

定理 6　自治相对论 Birkhoff 系统具有 Poisson 结构.

由定理 6 知可将能量-Casimir 函数法[16]推广到自治相对论 Birkhoff 系统，从而体现守恒量与稳定性的关系，同时，它也是一种判断非线性稳定性的方法.该方法按如下五个步骤实现：

1) 将自治相对论 Birkhoff 系统写成在适当 Poisson 流形 M 上，具有 Birkhoff 函数 B 的形式

$$\dot{a}^{\mu}=\omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}=\{a^{\mu},B\}.\tag{16}$$

2) 寻求(16)式的一族运动常数 $I:M\to R$ 使得对(16)式的一切解 $a^{\mu}(t)$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(a^1,a^2,\cdots,a^{2n})=0$.

3) 选择守恒量 $I(a^1,a^2,\cdots,a^{2n})$ 使得 $B+I$ 以(16)式的平衡点 a_p^{μ} 为临界点.

4) 寻求 M 上的二次型 Q_1 和 Q_2，使得某些凸性条件对 a_p^{μ} 附近的有限变分成立，通过这样的 Q_1 和 Q_2 定义 M 上的一个新范数，记 $\Delta a^{\mu}=a^{\mu}-a_p^{\mu}$ 为 M 上的有限变分，寻求 M 上的二次型 Q_1 和 Q_2 使得下面条件成立：

$$Q_1(\Delta a^{\mu})\leqslant B(a_p^{\mu}+\Delta a^{\mu})-B(a_p^{\mu})-DB(a_p^{\mu})\cdot\Delta a^{\mu},\tag{17a}$$

$$Q_2(\Delta a^{\mu})\leqslant I(a_p^{\mu}+\Delta a^{\mu})-\mathrm{i}(a_p^{\mu})-DI(a_p^{\mu})\cdot\Delta a^{\mu},\tag{17b}$$

其中 D 表示相对于 a^{μ} 的全导数，进一步要求对 $\Delta a^{\mu}\neq 0$ 有

$$Q_1(\Delta a^{\mu})+Q_2(\Delta a^{\mu})>0.\tag{17c}$$

若 1)—4) 都已完成，则沿着系统(16)的任何解 $a^{\mu}(t)$，有变分 $\Delta a^{\mu}=a^{\mu}-a_p^{\mu}$ 估计式.

定理 7　对(16)式的任何解 $a^{\mu}(t)$，变分 $\Delta a^{\mu}=a^{\mu}-a_p^{\mu}$ 满足估计式

$$Q_1(\Delta a^{\mu})+Q_2(\Delta\alpha^{\mu})\leqslant B_I(a^{\mu}(0))-B_I(a_p^{\mu}),\tag{18}$$

其中 $B_I=B+I$.

5) 在 M 上定义新范数：

$$\|\boldsymbol{a}\|=Q_1(\boldsymbol{a})+Q_2(\boldsymbol{a}),\tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{a}=[a^2\quad a^2\quad\cdots\quad a^{2n}]^{\mathrm{T}}$，应用新范数(19)寻求 B_I 在 a_p^{μ} 处连续的充分条件.如果 B_I 在 a_p^{μ} 处关于范数(19)是连续的，下面的定理将保证 a_p^{μ} 是系统的非线性稳定平衡点.

命题 1　假设步骤 1)—5)满足，如果函数 B_I 关于新范数(19)在 a_p^{μ} 处连续，则 a_p^{μ} 是系统的非线性稳定平衡点.即对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得若 $\|\boldsymbol{a}(0)-\boldsymbol{a}_p\|<\delta$，则对一切 t，$\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_p\|<\varepsilon$ 成立.

证明　由于假设 B_I 关于新范数(19)在 a_p^{μ} 处连续，因此，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得 $\|\boldsymbol{a}(0)-\boldsymbol{a}_p\|<\delta$ 时有 $\|B_I(a^{\mu})-B_I(a_p^{\mu})\|<\varepsilon$ 于是，如果 $a^{\mu}(t)$ 是(16)式的解，且 $\|\boldsymbol{a}(0)-\boldsymbol{a}_p\|<\delta$，那么，由定理 7 中的不等式(18)得

$$\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_p\|=Q_1(\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{a}_p)+Q_2(\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{a}_p)\leqslant|B_I(\boldsymbol{a}(0))-B_I(\boldsymbol{a}_p)|<\varepsilon,$$

即只要 $a^{\mu}(t)$ 从 a_p^{μ} 的 δ 邻域出发，永远不会离开 a_p^{μ} 的 ε 邻域，从而 a_p^{μ} 是系统的非线性稳定平衡点.

5. 算　　例

考虑二维自治相对论 Birkhoff 系统

$$B=m\sum_{\mu=1}^{2}\sum_{\nu=1}^{2}\beta_{\mu\nu}a^{\mu}a^{\nu},$$

$$R_1=0\quad R_2=m\left(\frac{(a^1)^2}{2}+a^1\right),$$

其中 $m=m_0/\sqrt{1-((a^1)^2+(a^2)^2)/c^2}$.

1) 将自治相对论 Birkhoff 系统写成在适当 Poisson 流形 M 上，具有 Birkhoff 函数 B 的形式

$$\dot{\boldsymbol{a}}=\{\boldsymbol{a},B\},$$

$$\boldsymbol{a}=[a^1\quad a^2]^{\mathrm{T}},$$

$$\omega^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix},$$

其中

$$b = -\frac{c^2 - ((a^1)^2 + (a^2)^2)}{c^2(a^1 + 1) - \frac{1}{2}(a^1)^3 - a^1(a^2)^2}.$$

2)寻求运动常数

根据力学系统的 Lie 对称性及 Nother 对称性性质知系统有守恒量

$$I = R_\mu \xi_\mu - B\xi_0.$$

3)求一阶变分

要寻求一个 Casimir 函数 I,使得 $B_I = B + I$ 以系统平衡点为其临界点.显然 $\boldsymbol{a}_p = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ 是系统平衡点,显然有 $\delta B_I|_{\boldsymbol{a}_p} = m\xi_2\delta a^1$.

显然,当 $\xi_2 = 0$ 时,一阶变分为零.

4)求二阶变分

由于所讨论系统是有限维的,为证 a_p^v 稳定性,只需考察二阶变分 $\delta^2 B_c$ 的正定或负定性即可.

$$\begin{aligned}\delta^2 B_I|_{a_p} = &2m[(1-\xi_0)\beta_{11} + \xi_2](\delta a^1)^2 \\ &+ 2m(1-\xi_0)(\beta_{12}+\beta_{21})\delta a^1\delta a^2 \\ &+ 2m(1-\xi_0)\beta_{22}(\delta a^2)^2,\end{aligned}$$

要使 $\delta^2 B_c$ 是正定或负定性,必有

$$\begin{cases} 2m(1-\xi_0)(\beta_{12}+\beta_{21}) = 0, \\ 2m[(1-\xi_0)\beta_{11}+\xi_2] > 0, \\ 2m(1-\xi_0)\beta_{22} > 0. \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} 2m(1-\xi_0)(\beta_{12}+\beta_{21}) = 0, \\ 2m[(1-\xi_0)\beta_{11}+\xi_2] < 0, \\ 2m(1-\xi_0)\beta_{22} < 0, \end{cases}$$

则有

当$(\beta_{12}+\beta_{21}) = 0$,$\beta_{11}\beta_{22} > 0$ 时,若存在无穷小生成元,满足条件 $\xi_0 \neq 1$,$\xi_2 = 0$,则 $\boldsymbol{a}_p = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ 是稳定平衡点.

以第一部分的方法,可计算出:

当 $\xi_0 = -1$,$\xi_2 = 0$ 时系统具有 Noether 对称性,由其导致的守恒量(15)判断 $\boldsymbol{a}_p = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ 的确是稳定平衡点.

进一步的,当 $\xi_1 = 0$ 时,系统同时具有 Lie 对称性.由定理 1 和 2 知,此时系统并不同时具有 Mei 对称性.

[1] Fu J L and Wang X M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1023 (in Chinese) [傅景礼、王新民 2000 物理学报 **49** 1023]

[2] Fu J L and Luo S K 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2289 (in Chinese) [傅景礼、罗绍凯 2001 物理学报 **50** 2289]

[3] Luo S K 2003 *Applied Mathematics and Mechanics* **24** 414 (in Chinese) [罗绍凯 2003 应用数学与力学 **24** 414]

[4] Fu J L 1999 *Jiangxi Science* **17** 137 (in Chinese) [傅景礼 1999 江西科学 **17** 137]

[5] Luo S K and Fu J L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 (in Chinese) [罗绍凯、傅景礼 2001 物理学报 **50** 383]

[6] Luo S K, Guo Y X and Chen X W and Fu J L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2049 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、陈向炜、傅景礼 2001 物理学报 **50** 2049]

[7] Luo S K, Guo Y X and Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2053 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053]

[8] Luo S K, Lu Y B, Zhou Q, Wang Y D and Ouyang S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1913 (in Chinese) [罗绍凯、卢一兵、周 强、王应德、欧阳实 2002 物理学报 **51** 1913]

[9] Mei F X 1993 *Science in China Ser.* A **23** 709 (in Chinese) [梅凤翔 1993 中国科学(A 辑) **23** 709]

[10] Zhang Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1327 (in Chinese) [张 毅 2003 物理学报 **52** 1327]

[11] Zhao Y Y and Mei F X 1999 *Symmetries and Conseved Quantities of Mechanical System* (Science Press, Beijing) (in Chinese). [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与守恒量(科学出版社,北京)]

[12] Fu J L and Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2683 (in Chinese) [傅景礼、罗绍凯等 2002 物理学报 **51** 2683]

[13] Chen X W and Fu J L 2000 *Journal of Shangqiu Teachers College* **16** 6 (in Chinese) [陈向炜、傅景礼 2000 商丘师范学院学报 **16** 6]

[14] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical System* (Science Press, Beijing) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(科学出版社,北京)]

[15] Martynyuk 2000 *Nonlinear Analysis* **40** 483

[16] Li J B, Zhao X H and Liu Z R 1999 *The Principle and Applications of General Hamilton System* (Science Press, Beijing) (in Chinese). [李继彬、赵晓华、刘正荣 1999 广义 *Hamilton* 系统理论及其应用(科学出版社,北京)]

Symmetry and stability of a relativistic birkhoff system

Zhang Kai　　Feng Jun

（*Department of Physics*，*Northwest University*，*Xi 'an* 710069，*China*）

（Received 28 June 2004；revised manuscript received 29 November 2004）

Abstract

Relationships among the three symmetries——Noether symmetry，Lie symmetry and Mei symmetry of a relativistic Birkhoff system have been obtained. Some stability criteria are given by using Liapunov method. Finally the conservation quantity and the stability of the relativistic Birkhoff system are correlated by the Energy – Casimir functional，and an example is given，to illustrate the application of the method.

Keywords：relativistic Birkhoff system，symmetrical relationships，stability，Liapunov method，Energy-Casimir functional

PACC：0320，0330，0412